Siswanto - Umi Supraptinah

Matematika Inovatif 2

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XI SMA dan MA
Program Ilmu Pengetahuan Sosial

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya 2 untuk Kelas XI SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial
Siswanto - Umi Supraptinah

MATEMATIKA INOVATIF 2

Konsep dan Aplikasinya

untuk Kelas XI SMA dan MA

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Siswanto
Umi Supraptinah

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Matematika Inovatif 2

Konsep dan Aplikasinya

untuk SMA dan MA Kelas XI
Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Penulis	:	Siswanto
		Umi Supraptinah
Editor	:	Suwardi
Desain kulit	:	Agung Wibawanto
Desain tata letak isi	:	Agung Wibawanto
Penata letak isi	:	Mulyadi
Ilustrator	:	Sartana
Ukuran Buku	:	17,6 x 25,0 cm

510.07
SIS SISWANTO
m Matematika Inovatif 2 : Konsep dan Aplikasinya untuk Kelas XI SMA dan MA Program Ilmu Pengetahuan Sosial / penulis, Siswanto, Umi Supraptinah ; editor, Suwardi ; ilustrator, Sartana. — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.
vi, 250 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 245-246
Indeks : hlm. 249
ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-866-7

1. Matematika-Studi dan Pengajaran I. Judul
II. Umi Supraptinah III. Suwardi IV. Sartana

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009.

Diperbanyak oleh . . .

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*download*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Prakata

Selamat, kalian telah naik ke kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Sosial (IPS). Tentunya hal ini menjadi kebanggaan tersendiri bagi kalian. Semoga kalian terpacu untuk berpikir lebih dewasa lagi. Meskipun sudah naik di kelas XI, kalian tidak boleh lupa. Ingat, tantangan yang akan kalian hadapi di kelas ini tidaklah ringan. Kalian harus betul-betul tetap semangat dalam menggapai apa yang kalian cita-citakan. Untuk itu, kalian harus terus rajin belajar, gigih, dan pantang menyerah. Buku ini akan membantu kalian dalam menggapai cita-cita.

Buku ini disusun dengan urutan penyajian sedemikian rupa sehingga kalian akan merasa senang untuk mendalaminya. Dalam pembelajarannya, buku ini menuntut kalian untuk aktif dan bertindak sebagai subjek pembelajaran. Kalian dituntut untuk mengonstruksi, mengeksplorasi, dan menemukan sendiri konsep-konsep matematika sehingga kalian akan menjadi orang yang betul-betul kompeten secara matang, khususnya di bidang matematika.

Di kelas XI Program IPS ini, kalian akan mempelajari materi-materi berikut:

- Statistika
- Peluang
- Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers
- Limit Fungsi
- Turunan Fungsi

Penulis berharap semoga buku ini dapat membantu kalian dalam mempelajari konsep-konsep matematika. Akhirnya, semoga kalian berhasil dan sukses.

Solo, Februari 2008

Penulis

Daftar Isi

Semester 2

Bab III Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Bab IV Limit Fungsi

Bab V Turunan

Bab I Statistika

Sumber: *www.solopos.com*

Motivasi

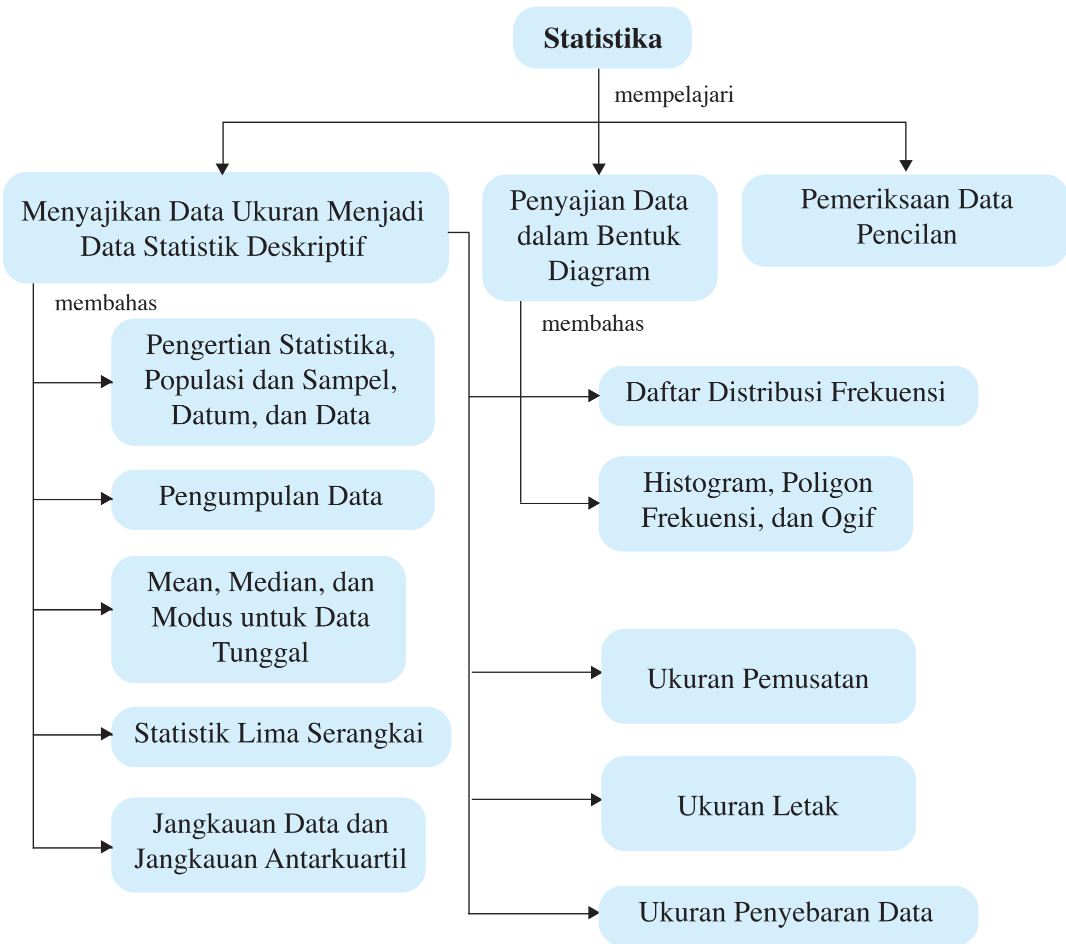
Salah satu bagian dari matematika yang banyak digunakan oleh berbagai kalangan adalah statistika. Statistika merupakan suatu alat yang sangat penting, khususnya dalam memberikan landasan untuk pengambilan keputusan. Pemerintah yang merencanakan anggaran belanja, bursa efek, pengusaha yang ingin meningkatkan produksi, perusahaan asuransi yang membuat ramalan, dan para ahli yang bekerja di laboratorium merupakan sedikit contoh pemakai statistika di lapangan. Mereka mengambil keputusan berdasarkan analisis data statistik yang diperoleh dari lapangan.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. membaca data dalam bentuk diagram garis, diagram batang daun, diagram kotak garis;
2. menyajikan data dalam bentuk diagram garis, diagram batang daun, diagram kotak garis;
3. membaca data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram;
4. menyajikan data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram;
5. menafsirkan kecenderungan data dalam bentuk tabel dan diagram;
6. menentukan ukuran pemusatan data: rataan, median, dan modus;
7. menentukan ukuran letak data: kuartil dan desil;
8. menentukan ukuran penyebaran data: rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku;
9. memeriksa data yang tidak konsisten dalam kelompoknya;
10. memberikan tafsiran terhadap ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran.

Peta Konsep

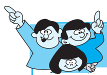


Kata Kunci

- data
- datum
- desil
- jangkauan
- kuartil
- mean
- median
- modus
- populasi
- sampel
- simpangan rata-rata
- standar deviasi
- statistik
- statistika
- stastistik lima serangkai
- varians

Kalian telah mempelajari beberapa konsep statistik di SMP, di antaranya pengertian populasi dan sampel, penyajian data statistik untuk data tunggal dan data majemuk, serta pengenalan histogram dan poligon frekuensi. Materi-materi tersebut akan kita ulang dan pelajari lebih mendalam, dilengkapi dengan sedikit penambahan, misalnya penyajian data dalam bentuk diagram batang daun dan diagram kotak garis, ukuran letak kumpulan data, yaitu desil serta penafsiran ukuran pemusatan, ukuran letak dan ukuran penyebaran kumpulan data.

Untuk menyegarkan ingatan kalian tentang materi statistika, seperti yang telah kalian pelajari di SMP, coba jawablah soal-soal berikut.



Uji Prasyarat — **Kerjakan di buku tugas**

1. Apa yang kalian ketahui tentang statistik, statistika, dan data?
2. Apakah mean, median, dan modus itu?
3. Misalkan diberikan data berikut.
   2 anak memiliki nilai 7
   5 anak memiliki nilai 8
   7 anak memiliki nilai 8,5
   8 anak memiliki nilai 9
   5 anak memiliki nilai 10
   Dari data tersebut, coba tentukan nilai mean, median, dan modusnya.

Setelah mempelajari pokok bahasan ini, diharapkan siswa menguasai *tujuan pembelajaran* bab ini.

A. Pengertian Dasar Statistika

Coba kalian perhatikan perilaku para pelayan toko yang sehari-harinya melayani pembeli dan mencatat setiap transaksi yang terjadi. Demikian pula pada saat pelayan tersebut telah selesai dengan tugasnya pada hari itu, dia akan merekap hasil penjualan yang diperolehnya. Misalnya, hari ke-1, pelayan itu mampu mencatat hasil penjualan senilai Rp500.000,00, hari ke-2 Rp550.000,00, hari ke-3 Rp700.000,00, dan seterusnya.

Pencatatan itu dilakukan setiap hari hingga pada akhir bulan dia mampu memperoleh kumpulan angka-angka dalam bentuk nominal rupiah. Dari kumpulan angka-angka itu, pelayan toko dapat mengetahui penjualan terendah, penjualan tertinggi, atau rata-rata penjualannya.

1. Statistik dan Statistika

Sumber: *Dokumen Penerbit*

Gambar 1.1 Kasir melakukan kegiatan statistik

Berdasarkan uraian di atas, sebenarnya pelayan toko itu telah menggunakan statistika untuk menyusun, mengelompokkan, dan menilai suatu kejadian dengan memerhatikan angka-angka yang dia catat. Dengan demikian, kita dapat mengartikan bahwa *statistik* adalah kumpulan informasi atau keterangan yang berupa angka-angka yang disusun, ditabulasi, dan dikelompok-kelompokkan sehingga dapat memberikan informasi yang berarti mengenai suatu masalah atau gejala. Adapun ilmu tentang cara mengumpulkan, menabulasi, mengelompokan informasi, menganalisis, dan mencari keterangan yang berarti tentang informasi yang berupa angka-angka itu disebut *statistika*.

2. Populasi dan Sampel

Misalnya, seorang peneliti akan mengadakan penelitian tentang mata pelajaran yang paling disenangi oleh siswa-siswa SMA 10. Dalam penelitian itu, *populasinya* adalah seluruh siswa SMA 10, sedangkan *sampel* yang diteliti dapat diambil dari beberapa siswa kelas X, kelas XI, atau kelas XII yang dianggap dapat mewakili populasinya. Kesimpulan yang diperoleh dari sampel itu digeneralisasikan pada populasinya.

Dari contoh tersebut dapat dikatakan bahwa *populasi* adalah keseluruhan objek yang akan diteliti, sedangkan *sampel* adalah sebagian atau keseluruhan populasi yang dianggap mewakili populasinya.

3. Datum dan Data

Perhatikan kembali perilaku pelayan toko di atas. Pelayan toko tersebut setiap harinya mencatat hasil rekap penjualan sehingga diperoleh angka-angka Rp500.000,00, Rp550.000,00, Rp700.000,00, dan seterusnya. Hasil rekap pada suatu hari yang dinyatakan dalam bentuk angka, misalnya Rp500.000,00 disebut datum, sedangkan kumpulan hasil rekap pada periode tertentu, misalnya selama satu bulan disebut data. Dengan demikian, kita dapat mengatakan bahwa *datum* adalah keterangan yang diperoleh dari hasil pengamatan atau penelitian. Kumpulan datum-datum itu disebut *data*. Jadi, bentuk jamak dari datum disebut *data*. Data yang berupa bilangan disebut *data kuantitatif*, sedangkan data yang tidak berupa bilangan disebut *data kualitatif*, misalnya berupa lambang atau sifat. Data kuantitatif dibedakan menjadi dua macam.

a. *Data diskret (cacahan),* yaitu data yang diperoleh dengan cara mencacah atau menghitungnya, misalnya, data tentang banyak anak dalam keluarga.
b. *Data kontinu (ukuran),* yaitu data yang diperoleh dengan cara mengukur, misalnya data tentang luas tanah, data tentang berat badan, dan data tentang tinggi badan.

Untuk matematika di SMA, statistika yang kita pelajari adalah *statistika deskriptif,* yaitu bagian dari statistika yang mempelajari cara mengumpulkan, mengolah, dan menyajikan data dalam bentuk diagram atau kurva. Adapun bagian dari statistika yang mempelajari cara-cara untuk menarik kesimpulan dan membuat ramalan dinamakan *statistika inferensial (inferential statistics)* atau *statistika induktif*. Statistika inferensial tidak dipelajari di sini, tetapi akan dipelajari di tingkat yang lebih lanjut.

Tugas Kreativitas **Kerjakan di buku tugas**

Dengan bahasamu sendiri, jelaskan apa yang dimaksud statistik, populasi, sampel, dan data. Masing-masing berikan contohnya.

4. Pengumpulan Data

Suatu data statistik dapat diperoleh di mana saja, bergantung pada maksud dan tujuan penelitian yang dilakukan. Hendaknya, data yang dikumpulkan adalah data yang akurat, terkini (*up to date*), *komprehensif* (menyeluruh), dan memiliki kaitan dengan persoalan yang diteliti. Untuk itu, seorang peneliti hendaknya memiliki perencanaan yang baik, agar memperoleh hasil seperti yang diharapkan.

Jika seorang peneliti ingin mengumpulkan data yang diperlukan, ada beberapa cara yang dapat ditempuh untuk mendapatkannya, antara lain dengan wawancara, angket atau kuesioner, dan pengamatan atau observasi.

a. Wawancara

Wawancara adalah tanya jawab secara langsung dengan sumber data atau orang-orang yang dianggap mampu memberikan data yang diperlukan.

b. Angket (Kuesioner)

Angket adalah teknik pengumpulan data dengan memberikan pertanyaan-pertanyaan yang disusun dalam suatu daftar pertanyaan. Angket digunakan apabila orang yang akan dimintai keterangan jumlahnya cukup banyak dan tempat tinggalnya tersebar cukup berjauhan.

c. Pengamatan (Observasi)

Pengamatan adalah teknik pengumpulan data, dalam hal ini pencari data mengadakan pengamatan baik langsung maupun tak langsung terhadap objek. Pengamatan dibedakan menjadi tiga macam.

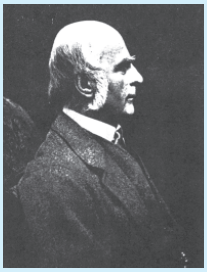
1) *Pengamatan langsung*, yaitu pengamatan yang dilakukan secara langsung terhadap objek penelitian.
2) *Pengamatan tak langsung*, yaitu pengamatan yang dilakukan terhadap objek penelitian menggunakan alat atau perantara, misalnya menggunakan mikroskop.
3) *Pengamatan partisipasif*, yaitu pengamatan yang dilakukan dengan cara peneliti ikut terlibat dan melibatkan diri dalam situasi yang dilakukan oleh responden (objek penelitian).


Sumber: *www.sabah.gov.com*
Gambar 1.2 Pengumpulan data melalui observasi

Data yang diperoleh langsung dari penelitian atau pengukuran dan masih berwujud catatan yang belum mengalami pengolahan ataupun penyusunan disebut *data kasar (raw data)*. Tahap berikutnya setelah data itu terkumpul adalah mengorganisir dan mengelompokkan fakta dari data tersebut sesuai dengan tujuan penelitian. Agar lebih mudah dianalisis, data tersebut disederhanakan terlebih dahulu, di antaranya dengan pembulatan.

Info Math: Informasi Lebih Lanjut

F. Galton


F. Galton
Sumber: *www.york.ac.uk*

Pada mulanya, kata statistik dipergunakan oleh *Caesar Augustus* pada zaman Romawi untuk memperoleh keterangan-keterangan yang dibutuhkan seperti nama, jenis kelamin, umur, pekerjaan, dan jumlah keluarga penduduk negaranya. Keterangan-keterangan itu dipergunakan untuk memperlancar penarikan pajak dan memobilisasi rakyat jelata ke dalam angkatan perang. Penggunaan statistika untuk penelitian ilmiah dipelopori oleh *F. Galton* pada tahun 1880. Untuk pertama kalinya, Galton menggunakan korelasi dalam penelitian biologi, namun pemakaian statistika untuk penelitian ilmiah pada saat itu dapat dikatakan tidak lazim. Bahkan, mereka menuai kecaman-kecaman yang amat pedas karena menggunakan statistika dalam berbagai penelitian, seperti yang dialami oleh *Karl Pearson* pada akhir abad kesembilan belas.

Mendekati pertengahan abad XX, tepatnya antara tahun 1918–1935, pemakaian statistika mengalami kemajuan sangat pesat. Hal ini dipelopori oleh *R. Fisher* yang memperkenalkan analisis variansi dalam literatur statistika. Sejak itu, pemakaian statistika makin meluas dari bidang biologi ke bidang-bidang pengetahuan lainnya. Carilah informasi tentang tokoh ini selengkapnya di perpustakaan atau internet.

Sumber: *www.myscienceblog.com*

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Jelaskan maksud istilah-istilah berikut.
   a. Statistik dan statistika
   b. Populasi dan sampel
   c. Datum dan data
   d. Data diskret dan data kontinu
   e. Statistika deskriptif dan statistika inferensial
   f. Wawancara dan angket (kuesioner)
   g. Observasi
   h. Pengamatan partisipatif
2. Pada penelitian berikut, tentukan sampel dan populasinya. Kemudian, jelaskan cara pengambilan sampelnya.
   a. Dinas kesehatan meneliti satu kantong ”lumpur Lapindo” untuk mengetahui ada/tidaknya kandungan zat berbahaya.
   b. Pemerintah ingin mengetahui pendapatan rata-rata per tahun masyarakat di Provinsi *X*.
   c. Seorang dokter ingin mengetahui naik turunnya suhu badan pasien selama dua hari terakhir.
   d. Dinas peternakan ingin meneliti rata-rata jumlah ternak setiap desa di Kecamatan *A*.
   e. Seorang siswa ingin mengetahui pertumbuhan 1.000 kecambah yang telah diberi pupuk tertentu setiap 12 jam.
3. Sebutkan data di bawah ini, termasuk data diskret atau kontinu.
   a. Data tinggi badan siswa kelas XI.
   b. Data jumlah jiwa dalam suatu keluarga.
   c. Data jumlah siswa yang mengikuti kegiatan olahraga di sekolah.
   d. Lama perjalanan seorang siswa menuju sekolahnya.
4. Tentukan hasil pembulatan bilangan-bilangan berikut ini dengan ketelitian sampai 2 tempat desimal (2 angka di belakang koma).
   a. 41,0001
   b. 2.821,3168
   c. 322,6677
   d. 453,736
   e. 996,907
   f. 28,600
5. Salah satu cara untuk menyederhanakan data adalah dengan menuliskannya ke bentuk baku, yaitu $a \times 10^n$, dengan $1 \leq a \leq 10$, n bilangan bulat, dan $n \neq 0$. Dengan menyatakan dalam bentuk baku, sederhanakanlah data berikut (ketelitian sampai 2 tempat desimal).
   a. 599,328
   b. 632,732
   c. 808,033
   d. 0,000373
   e. 0,000787
   f. 0,001419

B. Ukuran Pemusatan Data

Misalkan 8 siswa peserta tes Matematika yaitu, Andi, Budi, Cici, Dita, Efa, Fita, Gani, dan Haris. Setelah diadakan tes dan nilainya dibulatkan diperoleh data nilai dari Andi hingga Hari adalah 8, 6, 7, 4, 9, 4, 7, 7. Berapakah rata-rata nilai mereka, nilai manakah yang membagi data menjadi dua bagian yang sama (nilai tengah), yaitu 50% dari kelompok bawah dan 50% dari kelompok atas, serta nilai mana yang paling sering muncul dari hasil tes itu.

Ketiga pertanyaan itu memberikan gambaran pemusatan dari nilai kedelapan siswa peserta tes Matematika di atas. Pertanyaan pertama berkaitan dengan nilai-nilai rata-rata, pertanyaan kedua berkaitan dengan nilai tengah, dan pertanyaan ketiga berkaitan dengan nilai yang sering muncul. Nilai rata-rata disebut juga mean, nilai tengah disebut juga median, dan nilai yang sering muncul disebut juga modus. Ketiganya merupakan *ukuran pemusatan data* atau ukuran tendensi sentral. Pada subbab ini, kita akan belajar ukuran pemusatan data tunggal.

1. Mean

Mean dari suatu data didefinisikan sebagai jumlah semua nilai datum dibagi dengan banyaknya datum. Dengan demikian, dalam notasi pembagian dapat ditulis

$$\text{Mean} = \frac{\text{jumlah semua datum}}{\text{banyaknya datum}}$$

Mean disebut juga *rataan hitung* atau *rata-rata hitung* dan sering disingkat *rataan* atau *rata-rata* saja. Misalnya, suatu data kuantitatif terdiri atas datum x_1, x_2, ..., x_n, mean data tersebut dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

dengan $\overline{x}$ adalah mean ($\overline{x}$ dibaca: *x bar*).

Penjumlahan berulang $x_1 + x_2 + ... + x_n$ dapat dinyatakan dalam notasi sigma berikut.

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Keterangan:

$\sum_{i=1}^{n} x_i$ dibaca "sigma x_i untuk $i = 1$ sampai dengan n".

Oleh karena itu, nilai mean di atas dapat ditulis

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{atau} \quad \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai rata-rata ujian Matematika dari satu kelas yang terdiri atas 43 siswa adalah 56. Jika 3 siswa yang mendapat nilai 90 tidak dimasukkan maka nilai rata-ratanya menjadi ....

a. 55,15 d. 52,55
b. 54,35 e. 51,65
c. 53,45

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

Tugas

Berpikir Kritis

Kerjakan di buku tugas

Misalkan data x_1, x_2, x_3, ... mempunyai mean $\overline{x}$. Jika data diubah menjadi $(x_1 - 1)$, $(x_2 - 1)$. $(x_3 - 1)$, ..., bagaimanakah nilai meannya? Bagaimana meannya jika data diubah menjadi $5x_1$, $5x_2$, $5x_3$, ...?

Contoh:

1. Tentukan mean dari data: 3, 4, 3, 7, 8, 6, 6, 5.

Penyelesaian:

$$\text{Mean: } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{8} x_i}{8}$$

$$= \frac{3+4+3+7+8+6+6+5}{8}$$

$$= \frac{42}{8} = 5{,}25$$

2. Nilai mean (rata-rata) ujian sekelompok siswa yang berjumlah 30 orang adalah 60. Berapa nilai mean ujian tersebut jika seorang dari kelompok itu yang mendapat nilai 89 tidak dimasukkan dalam perhitungan?

Penyelesaian:

Nilai mean ujian dari 30 orang siswa adalah 60.
Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{30}}{30} = 60$$

$$\Leftrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_{30} = 1.800$$

Menurut soal, nilai 89 tidak diikutkan. Misalkan x_{30}= 89. Nilai dari 29 siswa itu adalah

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_{29} &= 1.800 - x_{30} \\ &= 1.800 - 89 \\ &= 1.711 \end{aligned}$$

Jadi, nilai mean ujian dari 29 siswa tersebut adalah $\frac{1.711}{29} = 59$.

2. Median

Median didefinisikan sebagai suatu nilai yang membagi suatu data yang telah diurutkan dari yang terkecil ke terbesar menjadi dua bagian sama banyak. Berdasarkan definisi tersebut, nilai median adalah

a. nilai datum yang ada di tengah (jika ukuran datanya ganjil);
b. rataan dua nilai datum yang ada di tengah (jika ukuran datanya genap).

Misalnya, suatu data yang telah diurutkan dituliskan sebagai x_1, x_2, ..., x_n, dengan $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_n$, nilai median dapat dirumuskan sebagai berikut.

a. Jika n (ukuran data) ganjil, mediannya adalah datum yang berada di tengah atau datum ke-$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ sehingga dapat ditulis

$$\text{median} = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

b. Jika n (ukuran data) genap, mediannya adalah rataan dari dua datum yang berada di tengah, yaitu datum ke-$\left(\frac{n}{2}\right)$ dan datum ke-$\left(\frac{n}{2}+1\right)$ sehingga dapat ditulis

$$\text{median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right).$$

Perlu ditekankan di sini bahwa nilai median hanya dapat ditentukan pada data yang telah diurutkan. Jika masih belum urut maka perlu diurutkan terlebih dahulu. Proses menyusun data dengan mengurutkan data dari datum terkecil ke datum terbesar ini disebut juga dengan proses menyusun *statistik peringkat*nya.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Misalnya x_0 adalah rata-rata dari data x_1, x_2, ..., x_{10}. Jika data berubah mengikuti pola:

$\frac{x_1}{2}+2$, $\frac{x_2}{2}+4$, $\frac{x_3}{2}+6$, $\frac{x_4}{2}+8$, dan seterusnya, nilai rata-rata data menjadi ....

a. $x_0 + 11$
b. $x_0 + 12$
c. $\frac{1}{2}x_0 + 11$
d. $\frac{1}{2}x_0 + 12$
e. $\frac{1}{2}x_0 + 20$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1996

Contoh:

Tentukan median dari setiap data berikut.

a. 3, 5, 4, 2, 6
b. 14, 12, 10, 20, 8, 8, 6, 10

Penyelesaian:

a. Data ini belum terurut sehingga perlu diurutkan terlebih dahulu. Urutan data dari datum yang terkecil adalah 2, 3, 4, 5, 6.

Ukuran data $n = 5$ (ganjil) sehingga median $= x_{\frac{5+1}{2}} = x_3 = 4$

Perhatikan posisi median data berikut.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	3	4	5	6

median $= x_3 = 4$

b. Data belum terurut sehingga perlu diurutkan terlebih dahulu. Urutan data dari datum yang terkecil adalah

6, 8, 8, 10, 10, 12, 14, 20.

Ukuran data n = 8 (genap) sehingga

$$\text{median} = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{8}{2}} + x_{\frac{8}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = \frac{1}{2}(10 + 10) = 10.$$

Perhatikan posisi median data berikut.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
6	8	8	10	10	12	14	20

$$\text{median} = \frac{1}{2}(x_4 + x_5) = 10$$

3. Modus

Modus adalah datum yang nilainya paling sering muncul atau datum yang frekuensinya (kekerapan atau keseringan munculnya) paling besar. Misalnya, dari data:

4, 3, 6, 6, 7, 8, 4, 2, 3, 7, 3, 5, 9,

modusnya adalah 3 karena frekuensi nilai 3 paling besar di antara nilai-nilai yang lain. Data yang bermodus tunggal atau hanya mempunyai satu modus dinamakan *data unimodal*. Data yang mempunyai dua modus dinamakan *data bimodal*. Misalnya, data:

3, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8,

modusnya adalah 5 dan 7. Adapun data yang modusnya lebih dari dua dinamakan *data multimodal* (bermodus banyak). Jika semua nilai datum mempunyai frekuensi sama besar, data tersebut dikatakan *tidak mempunyai modus*.

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba kalian cari data tentang jumlah anggota keluarga dan tingkat pendidikan (SD, SMP, SMA, Perguruan Tinggi) dengan salah satu cara berikut:

a. wawancara,

b. angket (kuesioner), atau

c. observasi.

Dari data yang kamu peroleh, tentukan nilai mean, median, dan modusnya. Apa arti angka-angka itu?

Uji Kompetensi 2 Kerjakan di buku tugas

1. Jelaskan pengertian istilah-istilah berikut.
   a. mean
   b. median
   c. modus
   d. unimodal
   e. bimodal
   f. multimodal
2. Susunlah statistik peringkat dari setiap data berikut. Kemudian, tentukan mean, median, dan modusnya.
   a. 5, 2, 4, 3, 6
   b. 3, 7, 2, 2, 4
   c. 7, 2, 5, 5, 5, 6
   d. 5, 8, 7, 7, 8, 5, 8
   e. 4, 8, 7, 7, 5, 7
   f. 6, 3, 5, 1, 2, 3, 4
3. Nilai rata-rata ulangan dari 20 siswa adalah 8,2. Jika nilai ulangan 15 siswa dari kelas lain digabungkan dengan 20 siswa itu, rata-rata nilai ulangan dari 35 siswa itu menjadi 8,9. Tentukan rata-rata nilai ulangan dari 15 siswa yang baru bergabung tadi.
4. Nilai mean ujian sekelompok siswa yang berjumlah 40 orang adalah 51. Jika seorang siswa yang mendapat nilai 90 dikeluarkan dari kelompok ini, berapa nilai mean ujian dari 39 siswa itu sekarang?
5. Nilai mean ujian sekelompok siswa yang berjumlah 39 orang adalah 45. Jika nilai seorang siswa lain digabungkan dengan kelompok tersebut, nilai mean dari 40 siswa itu menjadi 46. Tentukan nilai ujian siswa yang baru bergabung itu.

Soal Terbuka Kerjakan di buku tugas

Nilai rata-rata ujian dari 35 siswa adalah 7,1. Jika nilai dari 2 siswa lain tidak diikutsertakan dalam perhitungan maka nilai rata-rata menjadi 7,0.

a. Jika salah satu dari 2 siswa itu memiliki nilai 9, berapakah nilai siswa yang satunya lagi?
b. Jika kedua siswa itu memiliki nilai yang sama, berapakah nilai masing-masing siswa?

Tugas Eksplorasi Kerjakan di buku tugas

Telah kalian pelajari tentang mean, median, dan modus yang merupakan ukuran pemusatan data. Apa yang kalian ketahui tentang ukuran pemusatan data? Ungkapkan dengan bahasamu.

C. Ukuran Letak Data

Pada subbab sebelumnya, ketika membahas median, kalian telah mengetahui apa yang dimaksud statistik peringkat. Kali ini, kita akan memanfaatkan statistik peringkat ini untuk membahas tentang ukuran letak data. Sebenarnya ukuran letak data dalam statistika sangat banyak. Namun, untuk saat ini, kita hanya akan membahas tentang kuartil dan desil saja.

1. Kuartil

Kuartil adalah tiga nilai yang membagi data yang sudah diurutkan menjadi empat bagian yang sama banyak. Ketiga nilai itu adalah:

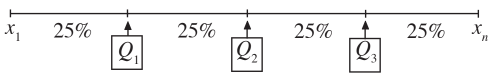
a. *median* atau *kuartil kedua* (Q_2), yaitu nilai yang membagi data yang sudah diurutkan dari terkecil ke terbesar menjadi dua bagian yang sama banyak.

b. *kuartil pertama* atau *kuartil bawah* (Q_1), yaitu nilai tengah dari semua data yang nilainya kurang dari kuartil kedua (Q_2).

c. *kuartil ketiga* atau *kuartil atas* (Q_3), yaitu nilai tengah dari semua data yang nilainya lebih besar dari kuartil kedua (Q_2).

Secara umum, dapat dikatakan sebagai berikut. (Ingat, data sudah terurut sesuai statistik peringkatnya).

1) Sampai dengan Q_1, terdapat 25% data dari data keseluruhan.
2) Dari Q_1 sampai Q_2, terdapat 25% data dari data keseluruhan.
3) Dari Q_2 sampai Q_3, terdapat 25% data dari data keseluruhan.
4) Ada 25% data dari data keseluruhan data yang berada di atas Q_3.



Gambar 1.3 Posisi kuartil

Contoh:

Susunlah statistik peringkatnya, kemudian tentukan nilai statistik minimum, kuartil bawah (Q_1), median (Q_2), kuartil atas (Q_3), dan statistik maksimum dari data berikut.

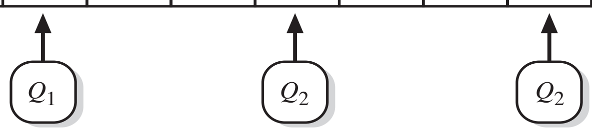
a. 3, 5, 1, 4, 2, 7, 9, 6, 6, 8, 7

b. 2, 3, 3, 8, 8, 9, 7, 6, 5, 7, 7, 4

Penyelesaian:

a. Statistik peringkat data tersebut tampak pada diagram di bawah ini.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
1	2	3	4	5	6	6	7	7	8	9



Dari bagan statistik peringkat di atas, dapat dilihat dengan jelas bahwa
kuartil bawah (Q_1) = x_3 = 3;
kuartil tengah (Q_2) = x_6 = 6;
kuartil atas (Q_3) = x_9 = 7.

b. Statistik peringkat data tersebut tampak pada bagan berikut.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
2	3	3	4	5	6	7	7	7	8	8	9

Q_1 Q_2 Q_3

Dalam soal ini, banyaknya data adalah 12 (genap) sehingga nilai-nilai kuartilnya tidak tepat berada pada datum tertentu seperti digambarkan pada bagan di atas. Oleh karena itu, nilai kuartil bawah (Q_1), median (Q_2), dan kuartil atas (Q_3) dari data di atas dapat dihitung sebagai rataan dua datum seperti berikut.

$Q_1 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{3+4}{2} = 3,5$ (Q_1 berada di antara x_3 dan x_4).

$Q_2 = \frac{x_6 + x_7}{2} = \frac{6+7}{2} = 6,5$ (Q_2 berada di antara x_6 dan x_7).

$Q_3 = \frac{x_9 + x_{10}}{2} = \frac{7+8}{2} = 7,5$ (Q_3 berada di antara x_9 dan x_{10}).

Untuk suatu data dengan ukuran cukup besar, nilai-nilai kuartil dapat ditentukan dengan pola interpolasi yang dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan suatu data berukuran n dapat dituliskan sebagai $x_1, x_2, ..., x_n$. Nilai-nilai data tersebut sudah diurutkan dari datum yang paling kecil ke datum yang paling besar.

a. Kuartil pertama (Q_1) merupakan nilai yang membagi data sehingga banyaknya data yang lebih kecil daripada Q_1 adalah $\frac{1}{4}n$ dan banyaknya data yang lebih besar daripada Q_1 adalah $\frac{3}{4}n$. Dengan demikian, kuartil pertama (Q_1) terletak pada urutan ke-$\frac{1}{4}(n+1)$.

b. Kuartil kedua (Q_2) merupakan nilai yang membagi data sehingga banyaknya data yang lebih kecil daripada Q_2 adalah $\frac{2}{4}n$ dan banyaknya data yang lebih besar daripada Q_2 adalah $\frac{2}{4}n$. Oleh karena itu, kuartil kedua (Q_2) merupakan nilai yang terletak pada urutan ke-$\frac{2}{4}(n+1)$.

c. Kuartil ketiga (Q_3) merupakan nilai yang membagi data sehingga banyaknya data yang lebih kecil daripada Q_3 adalah $\frac{3}{4}n$ dan banyaknya data yang lebih besar daripada Q_3 adalah $\frac{1}{4}n$. Dengan demikian, kuartil ketiga (Q_3) merupakan nilai yang terletak pada urutan ke-$\frac{3}{4}(n+1)$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Median dan kuartil atas dari data pengamatan 9, 11, 7, 11, 13, 7, 12, 13, 10, 6, 10 berturut-turut adalah ....

a. 9 dan 11
b. 9 dan $11\frac{1}{2}$
c. 10 dan $11\frac{1}{2}$
d. 10 dan 12
e. $10\frac{1}{2}$ dan 12

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

Oleh karena itu, secara umum untuk $i = 1, 2, 3$ dan $n > 4$ dapat dirumuskan bahwa letak kuartil ke-i (Q_i) adalah

$$\text{Letak } Q_i = \text{datum ke-}\frac{i}{4}(n+1)$$

Untuk menentukan nilai kuartil ke-i, perhatikan nilai letak Q_i. Misalnya, letak Q_i = datum ke-3 maka nilai $Q_i = x_3$. Bagaimana jika nilai letak Q_i = datum ke-$3\frac{1}{2}$? Keadaan seperti ini menunjukkan bahwa Q_i terletak di antara x_3 dan x_4. Oleh karenanya, nilai $Q_i = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 - x_3)$. Hal ini juga berlaku untuk letak Q_i = datum ke-$4\frac{1}{4}$ yang mempunyai nilai $Q_i = x_4 + \frac{1}{4}(x_5 - x_4)$.

Contoh:

Tentukan nilai kuartil bawah, kuartil tengah, dan kuartil atas dari data terurut berikut.

a. 3 7 7 7 8 8 9 10 11 11 11
b. 2 2 3 3 5 6 6 7 7 7 7 8 9
c. 3 4 5 6 8 9 9 10 11 12

Penyelesaian:

a. Karena data tersebut sudah terurut naik, kita dapat menentukan nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 sebagai berikut ($n = 11$).

- Letak Q_1 = datum ke-$\dfrac{1(11+1)}{4}$ = datum ke-3

  Karena datum ke-3 adalah 7 maka $Q_1 = 7$.

- Letak Q_2 = datum ke-$\dfrac{2(11+1)}{4}$ = datum ke-6

  Karena datum ke-6 adalah 8 maka $Q_2 = 8$.

- Letak Q_3 = datum ke-$\dfrac{3(11+1)}{4}$ = datum ke-9

  Karena datum ke-9 adalah 11 maka $Q_3 = 11$.

b. Data tersebut sudah terurut naik sehingga kita dapat menentukan nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 ($n = 13$).

- Letak Q_1 = datum ke-$\dfrac{1(13+1)}{4}$ = datum ke-$3\frac{1}{2}$

  Hal ini menunjukkan bahwa letak Q_1 berada di antara datum ke-3 dan ke-4. Karena datum ke-3 (x_3) = 3 dan datum ke-4 (x_4) = 3 maka

  $$Q_1 = x_3 + \frac{1}{2}(x_4 - x_3) = 3 + \frac{1}{2}(3 - 3) = 3.$$

- Letak Q_2 = datum ke-$\dfrac{2(13+1)}{4}$ = datum ke-7

  Karena datum ke-7 = 6 maka $Q_2 = x_7 = 6$.

- Letak Q_3 = datum ke-$\dfrac{3(13+1)}{4}$ = datum ke-$10\frac{1}{2}$

  Berarti, Q_3 berada di antara datum ke-10 dan ke-11.
  Karena datum $x_{10} = 7$ dan $x_{11} = 7$ maka

$$Q_3 = x_{10} + \frac{1}{2}(x_{11} - x_{10})$$

$$= 7 + \frac{1}{2}(7 - 7) = 7$$

c. Data di atas juga sudah terurut naik dengan $n = 10$ (genap).

Letak Q_1 = datum ke-$\dfrac{1(10+1)}{4}$

= datum ke-$2\frac{3}{4}$

Hal ini berarti Q_1 terletak di antara datum ke-2 dan ke-3.
Karena $x_2 = 4$ dan $x_3 = 5$ maka

$$Q_1 = x_2 + \frac{3}{4}(x_3 - x_2)$$

$$= 4 + \frac{3}{4}(5 - 4) = 4,75$$

Dengan cara yang sama, akan diperoleh $Q_2 = 8,5$ dan $Q_3 = 10,25$. Coba kalian tunjukkan.

2. Desil

Desil merupakan nilai-nilai yang membagi data yang sudah diurutkan menjadi sepuluh bagian yang sama banyak. Karena desil membagi data menjadi sepuluh bagian yang sama banyak, ada sembilan nilai desil, yaitu desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), desil ketiga (D_3), desil keempat (D_4), desil kelima (D_5), desil keenam (D_6), desil ketujuh (D_7), desil kedelapan (D_8), dan desil kesembilan (D_9).

Misalkan ukuran datanya adalah n dengan $x_1, x_2, ..., x_n$ nilai-nilai data yang sudah diurutkan dari yang terkecil sampai dengan terbesar. Seperti pada pembahasan tentang kuartil, desil pertama (D_1) merupakan nilai yang terletak pada urutan ke-$\dfrac{1}{10}(n + 1)$, desil kedua (D_2) merupakan nilai yang terletak pada urutan

Diskusi

Informasi Lebih Lanjut

Apa yang kalian ketahui tentang ukuran letak? Carilah informasi tentang ukuran letak ini. Apakah hanya kuartil dan desil yang merupakan ukuran letak?

ke-$\frac{2}{10}(n + 1)$, dan seterusnya, hingga desil kesembilan (D_9) merupakan nilai yang terletak pada urutan ke-$\frac{9}{10}(n + 1)$.

Letak desil ke-i, i = 1, 2, ..., 9 dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\text{Letak } D_i = \text{datum ke-}\frac{i}{10}(n + 1)$$

Keterangan:
D_i : desil ke-i
i : 1, 2, ..., 9
n : ukuran data

Untuk menentukan nilainya, dapat dilakukan seperti pada saat kalian mempelajari kuartil.

Contoh:

Tentukan desil pertama dan desil kelima, dari data berikut (n = 40).

10	10	10	10	12	12	12	14	14	15
16	17	18	20	20	20	20	20	21	21
22	23	24	25	26	27	28	28	28	28
30	30	32	34	36	36	36	38	40	40

Penyelesaian:

Karena data tersebut sudah terurut D_1 dan D_5 berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\text{Letak } D_1 &= \text{datum ke-}\frac{1}{10}(40 + 1)\\ &= \text{datum ke-}4\tfrac{1}{10}\end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa D_1 terletak di antara datum ke-4 (x_4) dan ke-5 (x_5). Karena x_4 = 10 dan x_5 = 12 maka

$$\begin{aligned}D_1 &= x_4 + \frac{1}{10}(x_5 - x_4)\\ &= 10 + \frac{1}{10}(12 - 10) = 10{,}2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Letak } D_5 &= \text{datum ke-}\frac{5}{10}(40 + 1)\\ &= \text{datum ke-}20\tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

Hal ini berarti D_5 terletak di antara datum ke-20 (x_{20}) dan ke-21 (x_{21}). Karena x_{20} = 21 dan x_{21} = 22 maka

$$\begin{aligned}D_5 &= x_{20} + \frac{5}{10}(x_{21} - x_{20})\\ &= 21 + \frac{5}{10}(22 - 21) = 21{,}5\end{aligned}$$

Tugas Kreativitas **Kerjakan di buku tugas**

Perhatikan nilai nilai D_5 dari data tersebut. Kemudian, coba kalian tentukan juga nilai kuartil keduanya. Apa yang dapat kalian katakan?

D. Statistik Lima Serangkai

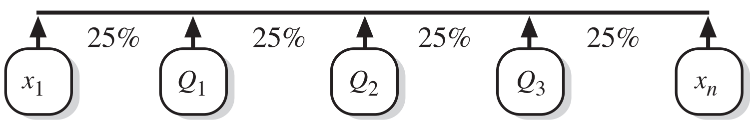
Statistik ini disebut statistik lima serangkai karena hanya memuat lima nilai statistik untuk suatu data. Kelima nilai itu dikelompokkan menjadi dua macam, yaitu dua buah nilai disebut *statistik ekstrem* dan *kuartil-kuartil*.

Statistik ekstrem terdiri atas dua macam, yaitu statistik minimum dan statistik maksimum. *Statistik minimum* adalah nilai terkecil dari suatu data atau datum terkecil. *Statistik maksimum* adalah nilai terbesar dari suatu data atau datum terbesar.

Statistik minimum sering ditulis dengan x_{min} dan statistik maksimum sering ditulis dengan x_{maks}. Karena datum terkecil dari data yang telah disusun statistik peringkatnya adalah datum pertama maka $x_{\text{min}} = x_1$, sedangkan datum terbesar untuk data dengan n datum adalah x_n sehingga $x_{\text{maks}} = x_n$.

Adapun kuartil-kuartil yang merupakan penyusun statistik lima serangkai terdiri atas kuartil bawah (kuartil ke-1), kuartil tengah (kuartil ke-2), dan kuartil atas (kuartil ke-3). Cara-cara menentukan nilai ketiga kuartil itu telah kalian pelajari di depan.

Apabila statistik lima serangkai itu kita sajikan dengan suatu bagan, kedudukannya adalah sebagai berikut.



Gambar 1.4 Bagan statistik lima serangkai

Urutan statistik lima serangkai menurut besarnya nilai adalah statistik minimum (x_{min}), kuartil bawah (Q_1), median (Q_2), kuartil atas (Q_3), dan statistik maksimum (x_{maks}). Statistik lima serangkai ditampilkan dalam bentuk bagan di samping.

Q_2	
Q_1	Q_3
(x_{min})	(x_{maks})

Sekali lagi perlu diingat bahwa dalam menentukan nilai-nilai statistik lima serangkai, data harus sudah dalam keadaan terurut dari nilai terkecil sampai dengan nilai terbesar. Apabila belum terurut, perlu diurutkan lebih dahulu.

Tinjau kembali contoh (halaman 15) soal a. Dari contoh itu, diperoleh $x_{\text{min}} = 3$, $Q_1 = 7$, $Q_2 = 8$, $Q_3 = 9$, dan $x_{\text{maks}} = 11$.

Statistik lima serangkai data ini ditampilkan seperti bagan berikut.

$Q_2 = 8$	
$Q_1 = 7$ $x_{min} = 3$	$Q_3 = 9$ $x_{maks} = 11$

atau

8	
7 3	9 11

Diskusi Mengomunikasikan Gagasan

Tentunya kalian telah mengerti tentang statistik lima serangkai. Dapatkah disimpulkan bahwa hanya dengan statistik lima serangkai tersebut, kita dapat mengetahui gambaran mengenai kecenderungan pemusatan data? Jelaskan seperlunya.

E. Ukuran Penyebaran Data

Kalian telah mempelajari ukuran pemusatan data dan ukuran letak data. Selain kedua ukuran tersebut, dalam statistik deskriptif masih dikenal ukuran lain, yaitu *ukuran dispersi* atau *ukuran penyebaran* data. Ukuran penyebaran data yang akan kalian pelajari sekarang adalah jangkauan data, jangkauan antarkuartil, jangkauan semiinterkuartil, langkah, dan pagar, sedangkan ukuran penyebaran lain, seperti simpangan rata-rata, ragam atau varians, dan simpangan baku atau deviasi standar akan kalian pelajari kemudian.

Diskusi
Inovasi

Apa pengaruh ukuran penyebaran dalam suatu data? Apa yang dapat kalian jelaskan jika statistik ukuran penyebaran suatu data bernilai besar? Menurut kalian, data yang baik memiliki ukuran penyebaran yang besar atau kecil? Diskusikan dengan teman-teman.

1. Jangkauan Data

Jangkauan data (J) didefinisikan sebagai selisih antara nilai statistik maksimum dan nilai statistik minimum. Jangkauan data disebut juga *range* data atau *rentangan* data. Jika x_{maks} adalah statistik maksimum suatu data dan x_{min} adalah statistik minimumnya, nilai J dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$J = x_{maks} - x_{min}$$

2. Jangkauan Antarkuartil

Jangkauan antarkuartil adalah selisih antara nilai kuartil atas (Q_3) dan kuartil bawah (Q_1). Jangkauan antarkuartil dinotasikan dengan J_K dan dirumuskan sebagai berikut.

$$J_K = Q_3 - Q_1$$

3. Jangkauan Semiinterkuartil

Jangkauan semiinterkuartil atau *simpangan kuartil* (Q_d) adalah setengah dari jangkauan antarkuartil.

$$Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

4. Langkah

Jangkauan antarkuartil telah kalian pahami. Misalkan panjang 1 langkah adalah L. Panjang 1 langkah didefinisikan sebagai $\frac{3}{2}$ kali panjang jangkauan antarkuartil.

$$L = \frac{3}{2} J_K = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1)$$

5. Pagar

Pagar ada dua macam, yaitu pagar dalam dan pagar luar. Pagar dalam (P_D) adalah suatu nilai yang letaknya 1 langkah di bawah kuartil bawah, sedangkan pagar luar (P_L) adalah suatu nilai yang letaknya 1 langkah di atas kuartil atas.

$$P_D = Q_1 - L$$
$$P_L = Q_3 + L$$

Contoh:

Tentukan jangkauan, jangkauan antarkuartil, jangkauan semiinterkuartil, langkah, pagar luar, dan pagar dalam dari data berikut.

a. 3, 5, 1, 4, 2, 7, 9, 6, 6, 8, 7

b. 2, 3, 3, 8, 8, 9, 7, 6, 5, 7, 7, 4

Penyelesaian:

a. Statistik peringkat dari data tersebut adalah

1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 9.

Berdasarkan statistik peringkat ini, diperoleh

$x_{min} = 1$, $Q_1 = 3$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 7$, dan $x_{maks} = 9$

1) $J = x_{maks} - x_{min} = 9 - 1 = 8$

2) $J_K = Q_3 - Q_1 = 7 - 3 = 4$

3) $Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(4) = 2$

4) Kalian telah memperoleh $Q_1 = 3$ dan $Q_3 = 7$.

Jadi, langkah $L = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{3}{2}(7 - 3) = 6$

Dengan demikian, pagar luar $P_L = Q_3 + L = 7 + 6 = 13$ dan pagar dalam $P_D = Q_1 - L = 3 - 6 = -3$.

b. Statistik peringkat data tersebut adalah

$$2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9.$$

Berdasarkan statistik peringkat ini, diperoleh
$x_{min} = 2$, $Q_1 = 3{,}5$, $Q_2 = 6{,}5$, $Q_3 = 7{,}5$, dan $x_{maks} = 9$.

1) $J = x_{maks} - x_{min} = 9 - 2 = 7$
2) $J_K = Q_3 - Q_1 = 7{,}5 - 3{,}5 = 4$
3) $Q_d = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2}(4) = 2$
4) $L = \frac{3}{2}(7{,}5 - 3{,}5) = 6$

   Dengan demikian, pagar dalam $P_D = Q_1 - L = 3{,}5 - 6 = -2{,}5$ dan pagar luar $P_L = Q_3 + L = 7{,}5 + 6 = 13{,}5$.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan kuartil bawah Q_1, kuartil tengah Q_2, dan kuartil atas Q_3 untuk setiap data berikut dengan menyusun statistik peringkatnya terlebih dahulu.
   a. 9, 7, 6, 7, 7, 8, 6, 7, 5, 10
   b. 9, 8, 7, 7, 5, 4, 8, 6, 9, 9, 12, 13, 13
   c. 80, 60, 65, 70, 75, 90, 70, 70, 70, 85, 80, 85, 75
   d. 15, 13, 14, 10, 11, 10, 11, 10, 11, 9, 11, 8, 6, 5, 7
   e. 8, 7, 5, 6, 9, 4, 8, 8, 9
2. Tentukan kuartil pertama, kuartil kedua, dan kuartil ketiga dari data berikut.

30	30	31	31	31	31	32	32	32	32
34	34	34	35	36	36	38	38	39	40
41	42	43	44	44	45	45	45	46	46
48	50	50	51	52	53	54	55	56	56

3. Tentukan desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), desil ketiga (D_3), desil keempat (D_4), desil kelima (D_5), desil keenam (D_6), desil ketujuh (D_7), desil kedelapan (D_8), dan desil kesembilan (D_9) dari data yang terdapat pada soal nomor 2.
4. Susunlah statistik peringkatnya, kemudian tentukan nilai-nilai statistik lima serangkai dari data berikut.
   a. 7, 3, 2, 7, 8, 6, 5
   b. 16, 18, 15, 17, 16, 20, 23, 22, 19, 19, 20, 15, 17, 25, 20
   c. 40, 45, 47, 43, 44, 45, 41, 43, 42, 44, 46, 44
   d. 101, 96, 98, 95, 108, 120, 111, 116, 115, 110, 99, 100, 101, 98, 112, 112, 108, 95,113
5. Perhatikan data berikut.

17	12	14	13	18	19	20	11	15	18
12	15	16	16	17	18	19	13	14	11
13	14	14	15	16	17	13	13	14	16

Tentukan
a. statistik lima serangkai;
b. jangkauan;
c. jangkauan antarkuartil dan jangkauan semiinterkuartil;
d. langkah dan pagar.

Dari data berikut, susunlah terlebih dahulu statistik peringkatnya.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

Perhatikan data berikut.

150	125	135	140	140	135	125	165	170	120
140	125	125	135	130	140	170	165	165	135
150	155	160	125	150	150	170	150	155	155
120	135	130	155	165	150	150	165	145	125

Dari data di atas, tentukan
a. statistik lima serangkai;
b. jangkauan;
c. jangkauan antarkuartil;
d. jangkauan semiinterkuartil.
e. langkah;
f. pagar dalam dan pagar luar.

F. Penyajian Data dalam Bentuk Diagram

Setelah data diperoleh dan dikumpulkan melalui metode pengumpulan data tertentu, kemudian data tersebut disajikan. Di antara metode penyajian data yang sangat sering digunakan adalah diagram atau kurva. Dengan diagram, seseorang akan lebih mudah untuk membaca dan menafsirkan data tersebut. Bentuk diagram yang akan kita pelajari adalah diagram garis, diagram lingkaran, diagram batang, diagram batang daun, dan diagram kotak garis

1. Diagram Garis

Diagram garis adalah suatu cara penyajian data statistik menggunakan garis-garis lurus. Biasanya, diagram garis digunakan untuk menyajikan data yang diperoleh dari hasil pengamatan terhadap suatu objek dari waktu ke waktu secara berurutan. Dalam hal ini, sumbu X menunjukkan waktu pengamatan, sedangkan sumbu Y menunjukkan hasil pengamatan. Kemudian, pasangan antara nilai pada sumbu X dan nilai pada sumbu Y digambarkan sebagai satu titik pada suatu sistem koordinat Cartesius. Kemudian, di antara dua titik yang berdekatan secara berturut-turut dihubungkan dengan sebuah garis lurus. Untuk lebih memahami penyajian data dengan diagram garis, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Misalnya, pada sebuah penelitian, seorang siswa mengukur panjang batang kecambah setiap dua hari sekali dengan hasil sebagai berikut.

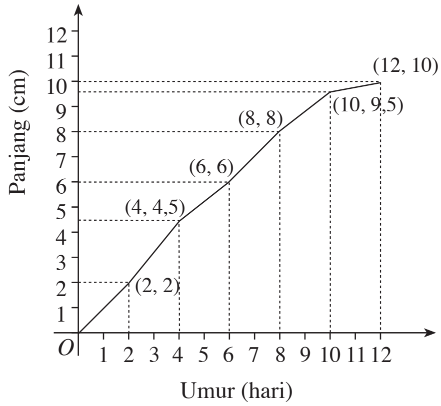
Tabel 1.1

Umur (hari)	0	2	4	6	8	10	12
Panjang (cm)	0	2	4,5	6	8	9,5	10

Sajikanlah data di atas dengan diagram garis.

Penyelesaian:

Berdasarkan data tersebut, diperoleh pasangan-pasangan koordinat (0, 0), (2, 2), (4, 4,5), (6, 6), (8, 8), (10, 9,5), dan (12, 10). Kemudian, pasangan-pasangan koordinat itu digambarkan sebagai sebuah titik pada bidang Cartesius. Dengan menghubungkan dua titik yang berdekatan secara berturut-turut menggunakan sebuah garis, diperoleh diagram garis seperti tampak pada gambar di samping. Berdasarkan grafik pada gambar di samping, dapatkah kalian memperkirakan



Gambar 1.5 Grafik pertambahan panjang (cm) kecambah vs. umur (hari)

a. panjang batang kecambah pada hari ke-3;
b. panjang batang kecambah pada hari ke-13;
c. pada hari ke berapa panjang kecambah akan mencapai 7 cm?

Kegiatan

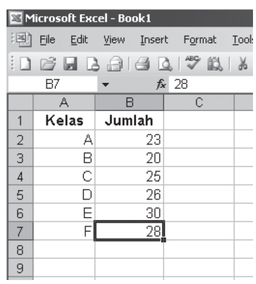
Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Membuat diagram garis dengan *software* komputer, misalnya Microsoft Excel.

Permasalahan:
Bagaimana menyajikan data dalam diagram garis yang lebih akurat dengan menggunakan komputer?

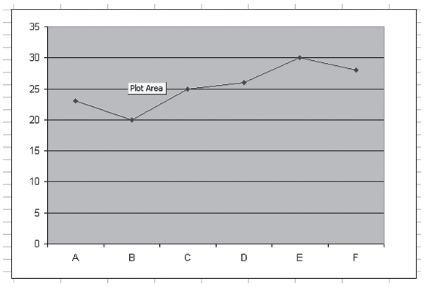
Langkah-Langkah:

1. Persiapkan data yang akan disajikan dalam diagram garis.
   Misalnya:



Gambar 1.6

2. Blok range data dari A2 sampai B7.
3. Klik **Insert** → **Chart**, pilih **Line**, kemudian pilih bentuk **Line** yang sesuai pada **Chart Sub-type**. Klik **Next**, ikuti perintah selanjutnya atau klik **Finish**. Akan kalian peroleh diagram garis berikut.



Gambar 1.7

Kesimpulan:
Suatu data dapat disajikan dalam diagram garis secara akurat dengan bantuan *software* komputer.

2. Diagram Lingkaran

Diagram lingkaran adalah diagram untuk menyajikan data statistik dengan menggunakan daerah lingkaran. Seluruh daerah lingkaran menunjukkan keseluruhan data (100%). Kemudian, daerah lingkaran itu dibagi-bagi menjadi beberapa bagian sehingga masing-masing bagian berbentuk juring lingkaran yang menunjukkan bagian atau persentase data.

Contoh:

Dari 400 siswa SMA 7, diperoleh data tentang pekerjaan orang tua/wali mereka sebagai berikut. Sebanyak 120 orang tua siswa menjadi PNS, 100 menjadi wiraswasta, 150 menjadi pegawai swasta, dan 30 menjadi TNI. Buatlah diagram lingkaran dari data tersebut.

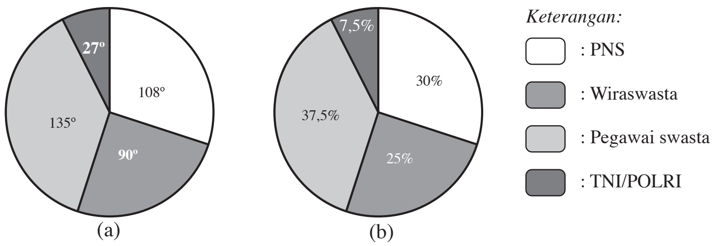
Tabel 1.2

Pekerjaan	Jumlah	Besar Sudut Pusat
PNS	120 orang	$\frac{120}{400} \times 360^\circ = 108^\circ$
Wiraswasta	100 orang	$\frac{100}{400} \times 360^\circ = 90^\circ$
Pegawai swasta	150 orang	$\frac{150}{400} \times 360^\circ = 135^\circ$
TNI/POLRI	30 orang	$\frac{30}{400} \times 360^\circ = 27^\circ$

Penyelesaian:

Karena luas juring lingkaran sebanding dengan besar sudut pusatnya maka ditentukan besar sudut pusatnya terlebih dahulu seperti tampak pada tabel di atas.

Berdasarkan besar sudut yang diperoleh pada **Tabel 1.2**, dapat dibuat diagram lingkaran seperti **Gambar 1.6**. Ukuran sudut pada diagram lingkaran sering kali tidak dituliskan,



Gambar 1.8 Diagram lingkaran (a) berdasarkan besar sudut; (b) berdasarkan persentase

tetapi cukup dituliskan persentase data yang tersedia.

Dengan demikian, diagram tersebut lebih mudah dibaca dan dimengerti. Jika data dinyatakan dalam persentase, diperoleh

$$\text{TNI/POLRI} = \frac{27^\circ}{360^\circ} \times 100\% = 7{,}5\%$$

$$\text{PNS} = \frac{108^\circ}{360^\circ} \times 100\% = 30\%$$

Dengan cara yang sama, diperoleh wiraswasta 25% dan pegawai swasta 37,5%. Diagram lingkaran dalam bentuk persen dapat dilihat pada **Gambar 1.8** (b).

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Tujuan:

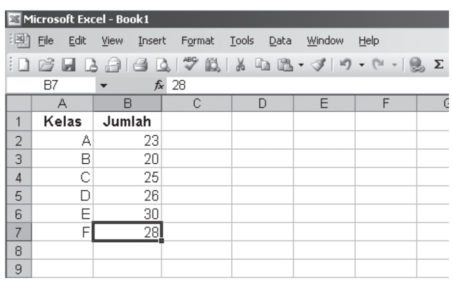
Membuat diagram lingkaran dengan *software* komputer, misalnya Microsoft Excel.

Permasalahan:

Bagaimana menyajikan data dalam diagram lingkaran yang lebih akurat dengan menggunakan komputer?

Langkah-Langkah:

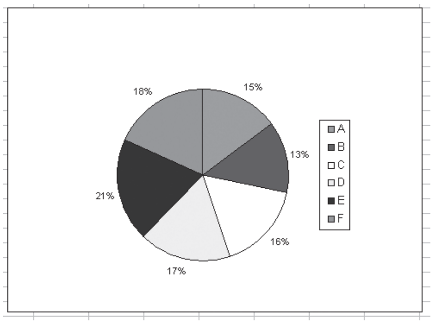
1. Persiapkan data yang akan disajikan dalam diagram lingkaran. Misalnya:



Kelas	Jumlah
A	23
B	20
C	25
D	26
E	30
F	28

Gambar 1.9

2. Blok range data dari A2 sampai B7.
3. Klik **Insert** → **Chart**, pilih **Pie**, kemudian pilih bentuk **Pie** yang sesuai pada **Chart Sub-type**. Klik **Next**, ikuti perintah selanjutnya atau klik **Finish**. Akan kalian peroleh diagram lingkaran berikut.



Gambar 1.10

Diagram di atas dapat diberi judul dan modifikasi menarik lainnya. Coba kalian lakukan.

Kesimpulan:
Suatu data dapat disajikan dalam diagram secara akurat dengan bantuan *software* komputer.

3. Diagram Batang

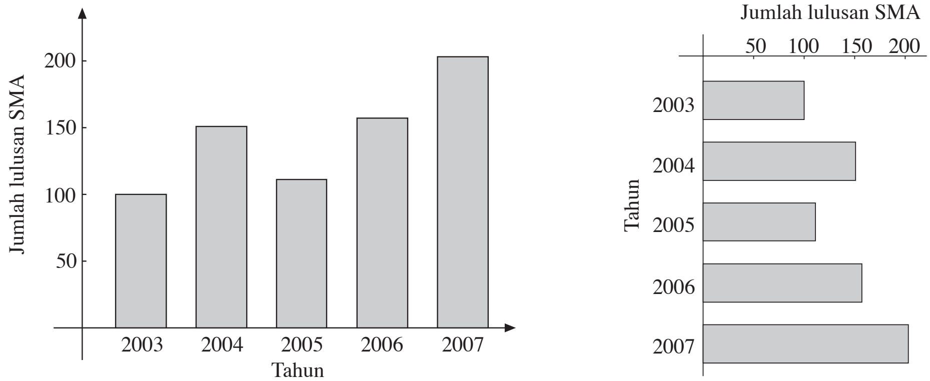
Diagram batang adalah diagram yang digunakan untuk menyajikan data statistik, dengan batang berbentuk persegi panjang. Bagaimana cara membuatnya? Caranya adalah batang-batang itu digambar tegak untuk diagram batang tegak atau mendatar dengan lebar sama pada sumbu-sumbu horizontal atau vertikal. Pada diagram batang, antara batang yang satu dengan yang lainnya digambarkan tidak berimpit. Ada kalanya, batang itu digambar tiga dimensi sehingga batang-batangnya digambarkan sebagai balok atau silinder. Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Banyaknya lulusan SMA di sebuah kelurahan selama lima tahun terakhir tercatat sebagai berikut.
Tahun 2003 : 100 orang
Tahun 2004 : 150 orang
Tahun 2005 : 120 orang
Tahun 2006 : 160 orang
Tahun 2007 : 200 orang
Sajikan data tersebut ke dalam diagram batang.

Penyelesaian:

Data tersebut dapat digambarkan dalam diagram batang berikut.



(a) Diagram batang tegak

(b) Diagram batang mendatar

Gambar 1.11 Diagram batang

Diagram batang pada **Gambar 1.11** menggunakan batang tunggal, yaitu setiap batang berdiri sendiri. Di samping diagram batang jenis tersebut, dapat dijumpai beberapa jenis diagram batang lainnya, antara lain sebagai berikut.

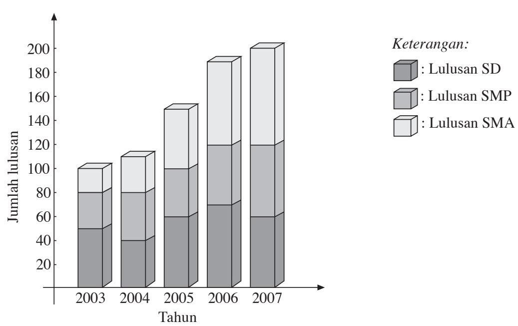
a. Diagram Batang Bersusun

Pada diagram batang ini, setiap batang terdiri atas beberapa batang yang disusun secara bertingkat, dari tingkatan yang paling bawah ke tingkatan yang paling atas. Misalnya, tabel berikut ini menggambarkan jumlah lulusan SD, SMP, dan SMA di sebuah kelurahan.

Tabel 1.3

Lulusan	Tahun				
	2003	2004	2005	2006	2007
SD	50	40	60	70	60
SMP	30	40	40	50	60
SMA	20	30	50	70	80

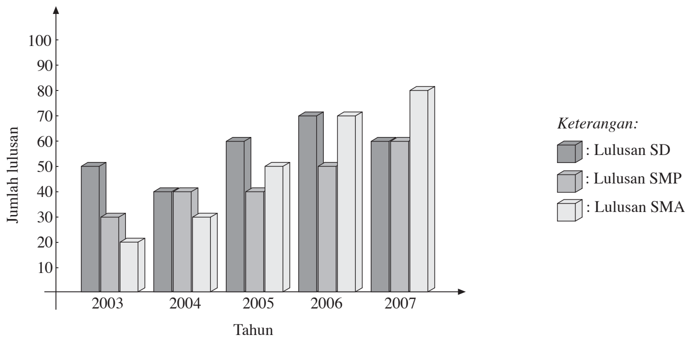
Dari tabel di atas dapat dibuat diagram batang seperti berikut (batang-batang digambarkan dalam tiga dimensi sehingga berbentuk balok-balok).



Gambar 1.12 Diagram batang bersusun

b. Diagram Batang Komparatif

Diagram batang jenis ini disebut *diagram batang komparatif* (*komparatif* dari kata *komparasi* yang artinya perbandingan) karena beberapa batang pada kelompok yang sama digambarkan pada satu kelompok sehingga terlihat jelas perbandingan masing-masing batang pada satu kelompok itu. Diagram batang komparatif disebut juga *diagram batang majemuk*. Misalnya, dari data jumlah lulusan SD, SMP, dan SMA pada **Tabel 1.3**, dapat dibuat diagram batang komparatif sebagai berikut.



Gambar 1.13

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba kalian cari data tentang jumlah peserta (akseptor) KB dari beberapa daerah atau desa (di kantor catatan sipil, internet, atau buku-buku referensi) pada periode-periode tertentu. Dari data yang kalian peroleh, buatlah diagram garis dan diagram batangnya. Apa yang dapat kalian jelaskan/simpulkan dari diagram yang kalian peroleh?

4. Diagram Batang Daun

Diagram batang daun merupakan bentuk penyajian data yang memperlihatkan data asli dan disusun secara vertikal dengan menyertakan masing-masing satuan untuk batang dan daun. Diagram ini cukup efektif untuk menggambarkan pola penyebaran data yang berukuran kecil. Sesuai dengan namanya, diagram ini terdiri atas kolom batang dan kolom daun. Setiap kumpulan data yang akan dibuat diagram batang daun dipisah menjadi dua kelompok digit, yaitu satu kelompok digit pertama ditulis pada kolom batang dan satu kelompok lain ditulis pada kolom daun. Pemilihan digit untuk batang dan daun *tidaklah baku*, tetapi perlu diperhatikan bahwa *batang harus memuat nilai terbesar dan terkecil*. Kolom paling kiri digunakan untuk menuliskan banyaknya data atau jumlah daun kumulatif sebelum atau sesudah letak median setiap baris.

Contoh:

1. Diberikan kumpulan data berikut.
   23, 26, 34, 39, 42, 45, 47, 51, 53, 59, 79
   Buatlah diagram batang daun dari data tersebut.

Penyelesaian:

Dari data tersebut, dapat dipilih digit puluhan sebagai batang dan digit satuan sebagai daun.

Jumlah daun kumulatif	Batang	Daun
0	0	
0	1	
2	2	3 6
4	3	4 9
(3)	4	2 5 7
4	5	1 3 9
0	6	
1	7	
0	8	
0	9	

Batang : Puluhan
Daun : Satuan

Data di atas juga dapat disajikan dengan diagram batang daun seperti berikut.

Jumlah daun kumulatif	Batang	Daun
0	1	
2	2	3 6
4	3	4 9
(3)	4	2 5 7
4	5	1 3 9
0	6	
1	7	

Batang : Puluhan
Daun : Satuan

2. Buatlah diagram batang daun dari data berikut (n = 40).

10	11	12	13	13	13	14	15	16	18
21	21	22	22	23	24	24	24	24	24
32	33	34	34	35	36	37	38	39	39
40	40	40	41	43	46	46	48	48	49

Penyelesaian:

Dengan memerhatikan data tersebut, kolom batang (dalam kotak) memuat puluhan, sedangkan kolom daun (sebelah kanan) memuat satuan.

Jumlah daun kumulatif	Batang	Daun
10	1	0 1 2 3 3 3 4 5 6 8
(10)	2	1 1 2 2 3 4 4 4 4 4
20	3	2 3 4 4 5 6 7 8 9 9
10	4	0 0 0 1 3 6 6 8 8 9

Batang : Puluhan
Daun : Satuan

Pada diagram batang daun di atas terdapat tiga kolom. Kolom pertama menyatakan jumlah daun kumulatif sebelum atau sesudah letak median, kolom kedua sebagai batang, dan kolom ketiga sebagai daun. Sekarang perhatikan kembali contoh nomor 2 di atas. Pada baris pertama memuat angka-angka 10, 1, dan 0 1 2 3 3 3 4 5 6 8. Angka-angka tersebut memberikan arti bahwa sampai baris pertama ada 10 data dengan masing-masing nilai 10, 11, 12, 13, 13, 13, 14, 15, 16, dan 18. Baris kedua memuat angka (10), 2, dan 1 1 2 2 3 4 4 4 4 4. Angka 10 dalam tanda kurung menunjukkan bahwa pada interval 20 sampai dengan 29 memuat titik median (kumpulan data ini mediannya adalah 28) dan ada 10 data dengan masing-masing nilai 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 24, dan 24. Setelah ditemukan interval yang memuat titik median, perhatikan urutan mulai dari baris terakhir (baris keempat). Baris keempat memuat angka-angka 10, 4, dan 0 0 0 1 3 6 6 8 8 9. Angka 10 memberikan arti bahwa baris keempat ada 10 data dengan masing-masing nilai 40, 40, 40, 41, 43, 46, 46, 48, 48, dan 49. Baris ketiga terdapat angka-angka 20, 3, dan 2 3 4 4 5 6 7 8 9 9. Sampai dengan baris ketiga terdapat 20 data, 10 data pada baris keempat ditambah 10 data pada baris ketiga dengan nilai-nilai 32, 33, 34, 34, 35, 36, 37, 38, 39, dan 39. Contoh tersebut dapat juga dibuat diagram batang daun sebagai berikut.

Jumlah daun kumulatif	Batang	Daun
7	1	0 1 2 3 3 3 4
10	1	5 6 8
20	2	1 1 2 2 3 4 4 4 4 4
(0)	2	
20	3	2 3 4 4
16	3	5 6 7 8 9 9
10	4	0 0 0 1 3
5	4	6 6 8 8 9

Batang : Puluhan
Daun : Satuan

Pada diagram di atas, baris pertama memuat angka-angka 7, 1, dan 0 1 2 3 3 3 4. Sampai dengan baris pertama ada 7 data dengan nilai 10, 11, 12, 13, 13, 13, 14. Sampai dengan baris kedua terdapat 10 data, terdiri atas 7 data pada baris pertama ditambah 3 data pada baris kedua dengan nilai-nilai 15, 16, 18. Sampai dengan baris ketiga terdapat 20 data, terdiri atas 10 data sampai baris kedua ditambah 10 data pada baris ketiga dengan nilai-nilai 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24, 24, 24, 24. Baris keempat memuat angka 0 dalam tanda kurung dan 2. Angka 0

Ketahuilah

Dalam membuat diagram batang daun, pada bagian bawah atau samping diagram tersebut harus dicantumkan satuan dari masing-masing batang dan daun.

menunjukkan bahwa tidak ada data pada interval 25 sampai 29, sedangkan tanda kurung memberikan arti bahwa pada interval 25 sampai 29 terdapat titik median. Setelah diperoleh interval yang memuat titik median, urutan dilihat dari baris terakhir.

5. Diagram Kotak Garis (*Box Plot*)

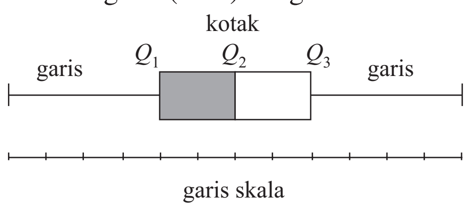
Diskusi

Mengomunikasikan Gagasan

Misalkan diberikan suatu diagram kotak garis. Dapatkah kalian menentukan nilai ketiga kuartil dan median data itu?

Kalian tentu masih ingat dengan statistik lima serangkai. Statistik itu tersusun atas 5 nilai statistik, yaitu datum terkecil, kuartil bawah, kuartil tengah (median), kuartil atas, dan datum terbesar. Kelima nilai statistik ini juga merupakan penyusun diagram kotak garis.

Diagram kotak garis merupakan suatu diagram yang tersusun atas kotak dan garis (ekor) dengan bentuk sebagai berikut.



Gambar 1.14 Diagram kotak garis

Data yang tercakup dalam bagian yang berbentuk kotak sebanyak 50%, dengan rincian dari Q_1 sampai Q_2 sebanyak 25% dan dari Q_2 sampai Q_3 sebanyak 25%. Bagian yang berbentuk garis (ekor kiri) mencakup data 25% dan garis (ekor kanan) mencakup data 25%.

Penyajian data dengan diagram ini memudahkan kita untuk mengetahui sebaran data dan ada/tidaknya pencilan (*outlier*). Khusus mengenai hal ini, akan kalian pelajari pada subbab berikutnya.

Contoh:

Buatlah diagram kotak garis dari data berikut (n = 40).

10	11	12	13	13	13	14	15	16	18
21	21	22	22	23	24	24	24	24	24
32	33	34	34	35	36	37	38	39	39
40	40	40	41	43	46	46	48	48	49

Penyelesaian:

Dari data tersebut, diperoleh nilai-nilai berikut.

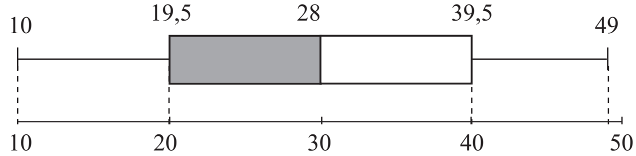
Q_1 = 19,5

Q_2 = 28

Q_3 = 39,5

(Coba kalian tunjukkan)

Dengan menggunakan kelima nilai statistik di atas diperoleh diagram kotak garis berikut.

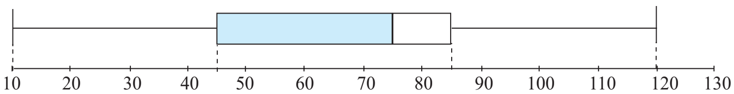


Gambar 1.15

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

Diberikan diagram kotak garis berikut.



Gambar 1.16

Dari diagram di atas, tentukan

a. x_{min}, Q_1, Q_2, Q_3, dan x_{maks};

b. besar simpangan kuartil;

c. besar satu langkah.

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Sajikan data berikut ini dalam bentuk diagram garis, diagram lingkaran, dan diagram batang.

   a. Data jumlah panen padi di Karang Agung selama 5 tahun.

Tabel 1.4

Tahun Ke-	1	2	3	4	5
Jumlah Panen (ribu ton)	11	12,5	13	13	14

   b. Data suhu badan seorang pasien diukur 3 jam sekali

Tabel 1.5

Waktu	4.00	7.00	10.00	13.00	16.00	19.00	21.00	24.00
Suhu (°C)	39	37	34	34	35	36	37	39

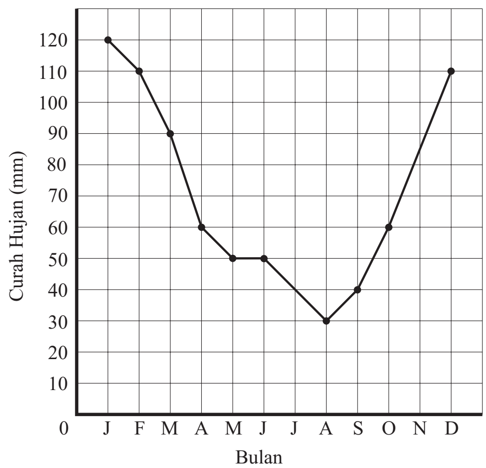
2. Suatu balai pengobatan membuka 3 macam layanan baru untuk pemeriksaan, konsultasi, dan pengobatan dengan dokter spesialis, yaitu spesialis mata, spesialis kulit, dan spesialis THT (telinga, hidung, dan tenggorokan). Jumlah pasiennya dipantau setiap bulan untuk dievaluasi. Selama lima bulan pertama, jumlah pasien itu terlihat pada daftar berikut.

Tabel 1.6

Spesialis	Bulan				
	I	II	III	IV	V
Mata	10	15	18	18	15
Kulit	5	10	12	15	20
THT	8	10	12	12	15

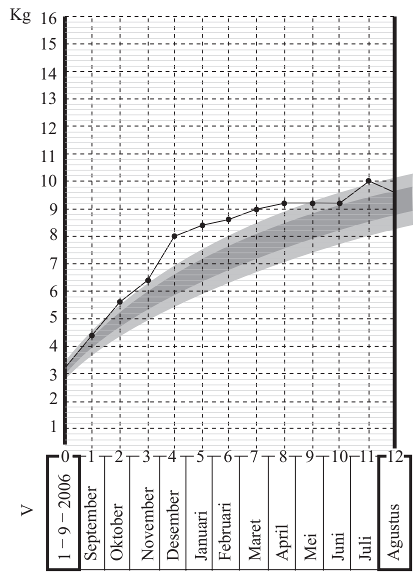
a. Sajikan data di atas dengan diagram batang bertingkat.
b. Sajikan data di atas dengan diagram batang komparatif.

3. Diagram di bawah ini menunjukkan banyaknya curah hujan selama satu tahun pada suatu daerah.
   a. Berapa curah hujan pada bulan Mei?
   b. Berapa curah hujan pada bulan Oktober?
   c. Bulan apa yang memiliki curah hujan paling tinggi?
   d. Bulan apa yang memiliki curah hujan paling rendah?
   e. Jika curah hujan di bawah 70 mm dikatakan kemarau untuk daerah tersebut, berapa bulan daerah tersebut mengalami musim kemarau?



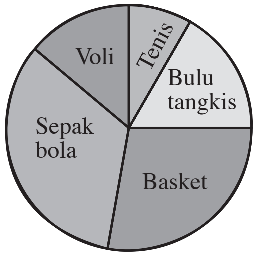
Gambar 1.17

4. Perhatikan kartu menuju sehat (KMS) di samping.
   Coba kalian amati dengan saksama. Kemudian, catatlah berat badan bayi itu dari usia 0–12 bulan.
   a. Dari data, pada interval bulan manakah bayi itu mengalami
      1) kenaikan berat badan paling drastis;
      2) penurunan berat badan paling drastis?
   b. Berapakah berat badan bayi saat dilahirkan?
   c. Berapakah berat badan bayi pada awal bulan ke-7?
   d. Berapakah berat badan bayi pada akhir bulan ke-10?



Gambar 1.18

5. Diagram lingkaran di samping adalah lima cabang olahraga yang paling digemari oleh 270 siswa kelas XI. Ukurlah sudut pusat masing-masing bagian, kemudian jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut.
   a. Berapa persen siswa yang menyukai sepak bola?
   b. Berapa persen siswa yang menyukai basket?
   c. Berapa siswa yang menyukai olahraga tenis?
   d. Berapa siswa yang menyukai olahraga voli?

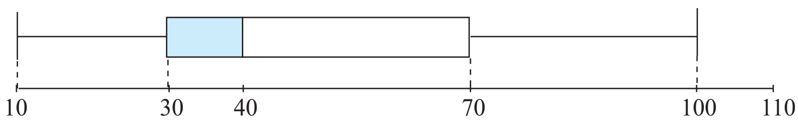


Gambar 1.19

6. Sajikan data hasil ulangan Matematika dari 30 anak berikut dalam diagram batang daun dan diagram kotak garis.

45	55	65	45	67	82
91	92	87	72	75	89
90	80	60	99	92	72
56	58	62	98	69	77
72	73	73	73	60	91

7. Suatu data disajikan dalam diagram kotak garis. Data itu mempunyai nilai minimum 3 dan nilai maksimum 8. Jumlah kuartil bawah dan atas adalah 10. Jangkauan antarkuartilnya 2. Median data itu adalah tepat nilai rata-rata kuartil atas dan bawah.
   a. Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3.
   b. Gambarkan diagram kotak garisnya.
8. Perhatikan diagram kotak garis berikut.



Gambar 1.20

Dari diagram kotak di atas, tentukan
   a. x_{min} dan x_{maks};
   b. Q_1, Q_2, dan Q_3;
   c. jangkauan antarkuartil;
   d. langkah;
   e. pagar dalam dan pagar luar.

G. Daftar Distribusi Frekuensi

Data yang sudah terkumpul dapat disajikan dalam bentuk daftar atau tabel. Data dapat dibedakan menurut ukurannya menjadi dua macam, yaitu data yang berukuran kecil ($n < 30$) dan data yang berukuran besar ($n \geq 30$). Untuk data yang berukuran besar, pada umumnya disusun dalam suatu daftar atau tabel yang disebut *daftar distribusi frekuensi* atau *daftar sebaran frekuensi*. Daftar distribusi frekuensi juga dapat dibedakan menjadi dua macam, yaitu daftar *distribusi frekuensi tunggal* dan *daftar distribusi frekuensi berkelompok*.

1. Daftar Distribusi Frekuensi Tunggal

Misalkan pada percobaan melempar sebuah dadu sebanyak 30 kali, diperoleh data permukaan yang muncul sebagai berikut.

2	6	3	3	5	6	4	2	4	3
5	3	2	1	4	1	6	5	3	4
4	6	4	3	2	5	1	1	3	2

Data tersebut dapat disusun dalam distribusi frekuensi tunggal berikut.

Tabel 1.7 Permukaan yang Muncul

Nomor (x_i)	Tally (Turus)	Frekuensi (f_i)
1	IIII	4
2	~~IIII~~	5
3	~~IIII~~ II	7
4	~~IIII~~ I	6
5	IIII	4
6	IIII	4
Jumlah		30

Penyajian data tunggal seperti ini dinamakan penyajian data tunggal dalam daftar distribusi frekuensi. *Daftar distribusi frekuensi tunggal* adalah suatu daftar distribusi frekuensi yang disusun sedemikian rupa sehingga dapat diketahui secara langsung frekuensi setiap datum. *Frekuensi* adalah kekerapan atau keseringan muncul yang biasa dilambangkan dengan huruf *f*.

2. Daftar Distribusi Frekuensi Berkelompok

Misalkan nilai ulangan harian Matematika dari 40 siswa kelas XI tercatat sebagai berikut.

32	78	90	67	64	52	84	78	49	77
45	83	65	69	38	65	49	88	76	84
63	76	54	75	56	64	67	78	90	59
76	89	87	93	84	39	74	83	92	75

Apabila data di atas dibuat daftar distribusi frekuensi (tunggal) secara langsung, maka akan diperoleh suatu daftar yang sangat panjang. Oleh karena itu, data tersebut perlu dikelompokkan dalam kelas-kelas terlebih dahulu agar diperoleh daftar distribusi yang lebih pendek (praktis). Misalnya, data di atas dibuat kelompok dalam kelas-kelas seperti terlihat pada tabel berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Suatu ujian diikuti dua kelompok, dari setiap kelompok terdiri atas 5 siswa. Nilai rata-rata kelompok I adalah 63 dan kelompok II adalah 58. Seorang siswa kelompok I pindah ke kelompok II sehingga nilai rata-rata kelompok I menjadi 65. Maka nilai rata-rata kelompok II sekarang adalah ....

a. 55,5 d. 58
b. 56 e. 58,5
c. 57,5

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

Tabel 1.8 Daftar Distribusi Frekuensi Berkelompok

Kelompok Nilai	Titik Tengah (x_i)	Tally (Turus)	Frekuensi (f_i)
31–40	35,5	III	3
41–50	45,5	III	3
51–60	55,5	IIII	4
61–70	65,5	~~IIII~~ III	8
71–80	75,5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
81–90	85,5	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
91–100	95,5	II	2
Jumlah			40

Karena nilai-nilai yang terdapat pada daftar di atas merupakan kelompok nilai, maka daftarnya disebut daftar distribusi frekuensi berkelompok. *Daftar distribusi frekuensi berkelompok* adalah suatu daftar distribusi frekuensi yang disusun sedemikian rupa sehingga data yang berukuran besar disederhanakan dengan mengelompokkannya menurut kelompok-kelompok atau kelas-kelas tertentu. Kemudian, dari masing-masing kelas tersebut dihitung frekuensinya.

Beberapa istilah yang perlu dipahami pada daftar distribusi frekuensi berkelompok adalah sebagai berikut.

a. Kelas

Kelas atau *kelas interval* adalah nama tiap-tiap kelompok data. Pada contoh di atas data dikelompokkan menjadi 7 kelas interval. Kelas pertama adalah 31–40, kelas kedua adalah 41–50, dan seterusnya hingga kelas ketujuh adalah 91–100. Kemudian,

kelas 31–40 mencakup data 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, dan 40;

kelas 41–50 mencakup data 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, dan 50;

….

kelas 91–100 mencakup data 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, dan 100.

b. Batas Kelas

Batas kelas adalah nilai-nilai yang membatasi suatu kelas. Nilai yang lebih kecil atau sama dengan setiap data dalam suatu kelas disebut *batas bawah*, sedangkan nilai yang lebih besar atau sama dengan setiap data dalam suatu kelas disebut *batas atas*. Pada contoh di atas, batas-batas kelasnya adalah sebagai berikut.

Kelas 31–40 batas bawahnya 31 dan batas atasnya 40.
Kelas 41–50 batas bawahnya 41 dan batas atasnya 50.
Kelas 91–100 batas bawahnya 91 dan batas atasnya 100.

c. Tepi Kelas

Tepi kelas disebut juga batas nyata kelas. Untuk data yang diperoleh dari hasil pengukuran, dengan ketelitian sampai satuan terdekat, tepi kelas ada dua, yaitu tepi bawah dan tepi atas dan ditentukan sebagai berikut.

Tepi bawah = batas bawah – 0,5
Tepi atas = batas atas + 0,5

Pada contoh di atas, diperoleh bahwa
tepi bawah kelas pertama 31 – 0,5 = 30,5 dan tepi atasnya 40 + 0,5 = 40,5;
tepi bawah kelas kedua 41 – 0,5 = 40,5 dan tepi atasnya 50 + 0,5 = 50,5;
….
tepi bawah kelas ketujuh 91 – 0,6 = 90,5 dan tepi atasnya 100 + 0,5 = 100,5.

Diskusi Inkuiri

Perhatikan **Tabel 1.8**. Dalam menentukan nilai tepi kelas, terdapat pengurangan atau penjumlahan 0,5. Diperoleh dari manakah angka 0,5 tersebut? Bagaimana jika datanya berupa pecahan desimal dengan satu angka di belakang koma atau dua angka di belakang koma?

d. Panjang Kelas

Panjang kelas yang disebut juga *panjang kelas interval (p)* adalah lebar suatu kelas yang dihitung dari perbedaan antara kedua tepi kelas. Dengan demikian, panjang kelas adalah selisih antara tepi atas dan tepi bawah.

Panjang kelas = tepi atas – tepi bawah

Pada suatu daftar distribusi frekuensi, masing-masing kelas memiliki panjang kelas interval yang sama. Oleh karena itu, untuk menentukan panjang kelas cukup diambil kelas tertentu. Misalnya, distribusi frekuensi pada **Tabel 1.18**, panjang kelasnya dapat dihitung dengan mengambil panjang kelas pertama, yaitu $p = 40{,}5 - 30{,}5 = 10$.

e. Titik Tengah Kelas

Titik tengah kelas adalah nilai yang dianggap mewakili suatu kelas, yaitu nilai yang terdapat di tengah-tengah kelas. Titik tengah kelas ditentukan dengan rumus berikut.

Titik tengah kelas = $\frac{1}{2}$(batas bawah + batas atas kelas)

Pada contoh di atas, dapat ditentukan bahwa,

titik tengah kelas pertama = $\frac{1}{2}(31 + 40) = 35{,}5$ dan

titik tengah kelas kedua = $\frac{1}{2}(41 + 50) = 45{,}5$.

Dalam praktiknya, panjang kelas juga dapat dihitung menggunakan titik tengah kelas, yaitu selisih antara dua titik tengah kelas yang berurutan. Jika x_1 adalah titik tengah kelas ke-i maka panjang kelasnya adalah

$$p = x_i - x_{i-1}$$

Perhatikan kembali contoh di atas. Panjang kelas pada contoh tersebut adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned} p &= x_2 - x_1 \\ &= 45{,}5 - 35{,}5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

3. Membuat Daftar Distribusi Frekuensi Berkelompok

Setelah memahami istilah-istilah pada daftar distribusi frekuensi berkelompok di atas, kalian dapat membuat distribusi frekuensi berkelompok.

Untuk dapat membuat daftar distribusi frekuensi, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

Langkah 1:

Tentukan jangkauan (J), yaitu statistik maksimum dikurangi statistik minimum atau dirumuskan

$$J = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}}$$

Langkah 2:

Tentukan banyaknya kelas (k) yang diperlukan.

Untuk menentukan banyaknya kelas, biasanya digunakan *aturan Sturgess*, yaitu

$$k = 1 + 3{,}3 \log n$$

dengan n adalah ukuran data.

Kemudian, nilai k tersebut dinyatakan dalam bilangan bulat melalui pembulatan.

Langkah 3:

Tentukan panjang kelas interval (p) dengan rumus berikut.

Diskusi

Investigasi

Dalam menentukan distribusi frekuensi data berkelompok jika kalian mendapatkan salah satu kelas dengan frekuensi nol, apa yang akan kalian lakukan? Jika kalian mengurangi atau menambah jumlah kelas, dapatkah dikatakan bahwa langkah tersebut bertentangan dengan aturan Sturgess? Berikan penjelasan secukupnya.

$$\text{Panjang kelas} = \frac{\text{Jangkauan}}{\text{Banyak kelas}} \text{ atau } p = \frac{J}{k}$$

Langkah 4:

Pilihlah batas bawah kelas pertama dengan mengambil datum terkecil atau bilangan lain yang lebih kecil daripada datum terkecil, tetapi selisihnya dengan datum terkecil kurang dari panjang kelas. Kemudian, berdasarkan panjang kelas yang diperoleh pada langkah 3, tentukan kelas-kelasnya sedemikian rupa sehingga seluruh nilai data dapat tercakup di dalamnya.

Langkah 5:

Tentukan frekuensi masing-masing kelas dengan sistem turus atau *tally* (dihitung satu per satu). Masukkan hasilnya dalam sebuah daftar sehingga tersusunlah suatu daftar distribusi frekuensi berkelompok. Agar lebih jelas dalam memahami langkah-langkah dalam membuat daftar distribusi frekuensi berkelompok di atas, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Skor hasil tes IQ dari 50 siswa SMA 8 tercatat sebagai berikut.

80	111	122	124	119	125	88	100	117	87
104	86	112	88	96	118	127	129	85	89
123	110	92	127	103	89	128	103	115	95
127	104	117	89	110	116	103	84	127	97
113	93	88	123	121	92	119	89	125	118

Dari data tersebut buatlah daftar distribusi frekuensi berkelompok.

Penyelesaian:

Langkah 1: menentukan jangkauan

$J = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} = 129 - 80 = 49.$

Langkah 2: menentukan banyak kelas

$$\begin{aligned} k &= 1 + 3{,}3 \log n \\ &= 1 + 3{,}3 \log 50 \\ &= 1 + 3{,}3 \times 1{,}698 \\ &= 6{,}6 \text{ (dibulatkan menjadi 6 atau 7 kelas).} \end{aligned}$$

Langkah 3: menentukan panjang kelas

Misalnya diambil $k = 6$ sehingga diperoleh

$$p = \frac{J}{k} = \frac{49}{6} = 8{,}166$$

Karena $p = 8{,}166$, panjang kelas interval dapat diambil 8 atau 9.

Langkah 4: menentukan kelas-kelas interval
Misalnya, diambil $p = 9$, $k = 6$, dan batas bawah kelas pertama adalah 80, maka diperoleh kelas-kelas berikut.
Kelas pertama adalah 80–88
Kelas kedua adalah 89–97
Kelas ketiga adalah 98–106
Kelas keempat adalah 107–115
Kelas kelima adalah 116–124
Kelas keenam adalah 125–133

Langkah 5: menyusun daftar distribusi frekuensi berkelompok.
Berdasarkan kelas-kelas yang diperoleh pada langkah 4, dapat dihitung frekuensi masing-masing kelas dengan tally atau turus. Hasilnya seperti pada daftar distribusi frekuensi berkelompok berikut.

Tabel 1.9

Nilai	Tally (Turus)	Frekuensi
80 – 88	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|\|\|$	8
89 – 97	$\cancel{\|\|\|\|}\ \cancel{\|\|\|\|}$	10
98 – 106	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|$	6
107 – 115	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|$	6
116 – 124	$\cancel{\|\|\|\|}\ \cancel{\|\|\|\|}\ \|\|$	12
125 – 133	$\cancel{\|\|\|\|}\ \|\|\|$	8
Jumlah		50

4. Daftar Distribusi Frekuensi Relatif

Pada daftar distribusi frekuensi yang telah kita pelajari di atas, frekuensi menyatakan banyaknya datum yang terdapat pada tiap-tiap kelas. Nilai frekuensi ini selalu berupa bilangan bulat tak negatif sehingga sering disebut *frekuensi absolut*.

Di samping daftar distribusi tersebut, ada kalanya diperlukan daftar distribusi frekuensi data statistik berupa perbandingan secara persentase. Oleh karena itu, frekuensi masing-masing kelas perlu diubah menjadi bentuk perbandingan secara persentase. Frekuensi yang dinyatakan dalam perbandingan seperti ini disebut dengan *frekuensi relatif* (f_r). Jadi, frekuensi relatif suatu kelas adalah persentase frekuensi kelas tersebut terhadap jumlah seluruh frekuensi (ukuran data). Oleh karena itu, jika ukuran datanya n, frekuensi relatif kelas ke-i dapat dirumuskan

$$f_r = \frac{f_i}{n} \times 100\%$$

Daftar distribusi yang memuat frekuensi relatif seperti di atas disebut *daftar distribusi frekuensi relatif*. Misalnya, perhatikan kembali daftar distribusi frekuensi berkelompok pada **Tabel 1.9**. Apabila kalian menghitung frekuensi relatif masing-masing kelas, kemudian hasilnya dimasukkan ke dalam sebuah tabel distribusi, akan diperoleh daftar distribusi frekuensi relatif seperti yang ditampilkan pada tabel berikut.

Tabel 1.10

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Relatif
80 – 88	8	$\frac{8}{50} \times 100\% = 16\%$
89 – 97	10	$\frac{10}{50} \times 100\% = 20\%$
98 – 106	6	$\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$
107 – 115	6	$\frac{6}{50} \times 100\% = 12\%$
116 – 124	12	$\frac{12}{50} \times 100\% = 24\%$
125 – 133	8	$\frac{8}{50} \times 100\% = 16\%$
Jumlah	50	100%

Agar kalian lebih memahami cara membuat daftar distribusi frekuensi, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Tujuan:

Membuat daftar distribusi frekuensi frekuensi relatif dari hasil pengukuran berat badan (dalam pon) 30 siswa dengan data berikut.

138,5	138,4	139,2	137,5	142,7	142,1
143,6	145,8	143,9	142,8	147,3	144,2
149,8	146,3	150,5	148,4	151,6	152,1
155,2	157,3	153,8	157,1	160,4	162,2
165,6	163,7	172,4	168,3	177,5	175,7

Permasalahan:

Bagaimana daftar distribusi frekuensi frekuensi relatif berat badan 30 siswa?

Langkah-Langkah:
1. Menentukan jangkauan.
2. Menentukan banyak kelas.
3. Menentukan panjang kelas.
4. Menentukan kelas-kelas interval.
5. Menyusun daftar distribusi frekuensi berkelompok.
6. Menghitung frekuensi relatif dari masing-masing kelas.

Kesimpulan:

Tabel 1.11 Daftar Distribusi Frekuensi Relatif

Nilai	Frekuensi	Frekuensi Relatif
137,5 – 144,2	10	33,3%
144,3 – 151,0	6	20,0%
151,1 – 157,8	6	20,0%
157,9 – 164,6	3	10,0%
164,7 – 171,4	2	6,7%
171,5 – 178,2	3	10,0%
Jumlah	30	100%

Adanya perbedaan pengambilan banyak kelas atau panjang kelas, dimungkinkan diperoleh daftar distribusi frekuensi yang berbeda.

5. Daftar Distribusi Frekuensi Kumulatif

Frekuensi kumulatif adalah kumpulan frekuensi kelas dari frekuensi kelas-kelas sebelumnya atau sesudahnya. Frekuensi kumulatif ada dua macam, yaitu frekuensi kumulatif kurang dari dan frekuensi kumulatif lebih dari.

Frekuensi kumulatif kurang dari (F_k kurang dari) adalah jumlah frekuensi semua nilai data yang kurang dari atau sama dengan ($\leq$) nilai tepi atas kelas tertentu. Misalnya, dari daftar distribusi frekuensi pada **Tabel 1.9**, dapat dibuat daftar distribusi frekuensi kumulatif kurang dari sebagai berikut.

Tabel 1.12

Nilai	Frekuensi	Tepi Atas	Nilai Kumulatif Kurang dari	F_k Kurang dari
80 – 88	8	88,5	88,5	8
89 – 97	10	97,5	97,5	18
98 – 106	6	106,5	106,5	24
107 – 115	6	115,5	115,5	30
116 – 124	12	124,5	124,5	42
125 – 133	8	133,5	133,5	50

Dari tabel di atas, tampak bahwa:

a. frekuensi kumulatif yang kurang dari atau sama dengan 88,5 adalah 8;

b. frekuensi kumulatif yang kurang dari atau sama dengan 97,5 adalah 18, dan seterusnya.

Frekuensi kumulatif lebih dari (F_k lebih dari) adalah jumlah frekuensi semua nilai data yang lebih dari atau sama dengan nilai tepi bawah kelas tertentu.

Misalnya, dari daftar distribusi frekuensi pada **Tabel 1.9** dapat dibuat daftar distribusi frekuensi kumulatif lebih dari, seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.13

Nilai	Frekuensi	Tepi Bawah	Nilai Kumulatif Lebih dari	F_k Lebih dari
80– 88	8	79,5	79,5	50
89– 97	10	88,5	88,5	42
98–106	6	97,5	97,5	32
107–115	6	106,5	106,5	26
116–124	12	115,5	115,5	20
125–133	8	124,5	124,5	8

Dari tabel di atas, tampak bahwa

a. frekuensi kumulatif yang lebih dari atau sama dengan 97,5 adalah 32,

b. frekuensi kumulatif yang lebih dari atau sama dengan 115,5 adalah 20, dan seterusnya.

Uji Kompetensi 5

Kerjakan di buku tugas

1. Koperasi "Sumber Sehat" yang bergerak di bidang penjualan dan penyaluran susu sapi melaksanakan pendataan jumlah ternak sapi perah yang dimiliki oleh anggotanya. Dari 40 orang anggotanya, diperoleh data sebagai berikut.

1	3	2	4	1	2	5	2	3	3
3	1	6	2	2	4	4	3	5	1
4	3	3	3	1	3	3	3	5	3
5	4	2	2	3	1	2	1	4	3

   a. Buatlah daftar distribusi frekuensi tunggal untuk data di atas.
   b. Buatlah daftar distribusi frekuensi relatif untuk data tersebut.
   c. Berapa persen peternak yang jumlah ternaknya 5 ekor?
   d. Berapa orang yang memiliki ternak kurang dari 3 ekor?
   e. Berapa orang yang memiliki ternak kurang dari 5 ekor?

2. Data berikut adalah upah minimum yang diberikan kepada karyawan dari 100 perusahaan kecil dan menengah di sebuah kota. Data ini sudah disusun dalam daftar distribusi frekuensi berkelompok seperti tampak pada tabel berikut.

Tabel 1.14

Upah Minimum (ribuan rupiah)	Frekuensi
300 – 349	5
350 – 399	7
400 – 449	16
450 – 499	9
500 – 549	8
550 – 599	25
600 – 649	18
650 – 699	12
Jumlah	100

 a. Data tersebut terbagi dalam berapa kelas?
 b. Sebutkan batas atas dan batas bawah setiap kelas.
 c. Sebutkan tepi atas dan tepi bawah setiap kelas.
 d. Tentukan panjang kelas dan titik tengah kelas.
 e. Tentukan frekuensi relatif setiap kelas.
 f. Tentukan kelas yang memiliki frekuensi relatif paling besar dan kelas yang memiliki frekuensi relatif paling kecil.

3. Suatu koperasi unit desa (KUD) melakukan penelitian hasil panen padi yang diperoleh oleh para petani setelah menggunakan jenis pupuk yang baru. Setiap petani menggunakan pupuk tersebut dalam jumlah yang sama, untuk luas tanah yang sama. Hasil panen dari 50 petani tersebut adalah sebagai berikut (dalam kuintal).

15	11	16	16	22	22	28	18	24	17
17	15	12	20	12	25	21	25	25	25
23	19	16	20	16	20	25	26	17	21
24	19	20	24	24	17	18	27	27	26
21	21	28	20	14	20	17	30	26	22

 a. Dari data di atas, buatlah statistik peringkatnya kemudian tentukan nilai statistik lima serangkainya.
 b. Buatlah daftar distribusi frekuensi berkelompok dengan panjang kelas interval 4 dan batas bawah kelas interval pertama 11.

4. Perhatikan kembali data yang ada pada soal nomor 3.
 a. Buatlah daftar distribusi frekuensi relatif.
 b. Buatlah daftar distribusi frekuensi kumulatif
  1) kurang dari;
  2) lebih dari.

5. Seorang petugas kesehatan melakukan penelitian tentang suatu penyakit yang diderita oleh pasien pada suatu rumah sakit. Pada penelitian tersebut digunakan hipotesis (dugaan) bahwa ada hubungan antara penyakit tersebut dan usia penderitanya.
   Hasil penelitian itu disajikan dalam tabel berikut.

   Tabel 1.15

Usia (tahun)	Frekuensi
1 – 4	2
5 – 8	11
9 – 12	17
13 – 16	30
17 – 20	22
21 – 24	14
25 – 28	4
Jumlah	100

   a. Pada usia berapa tahun pasien paling banyak menderita penyakit itu?
   b. Pada usia berapa tahun pasien paling sedikit menderita penyakit itu?
   c. Buatlah daftar distribusi frekuensi relatif.
   d. Berapa persen penderita penyakit itu yang berusia antara 17 dan 20 tahun?
   e. Pada usia berapa tahun penderita penyakit itu mencapai 11%?

6. Buatlah daftar distribusi frekuensi kumulatif lebih dari dan kurang dari pada data yang terdapat pada soal nomor 5.
   a. Berapa banyak penderita penyakit itu yang berusia kurang dari 12,5 tahun?
   b. Berapa banyak penderita penyakit itu yang berusia kurang dari 16,5 tahun?
   c. Berapa banyak penderita penyakit itu yang berusia lebih dari 20,5 tahun?
   d. Berapa banyak penderita penyakit itu yang berusia lebih dari 8,5 tahun?

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Carilah data jumlah siswa pendidikan dasar dan menengah tahun 2007 untuk SD, SMP, SMA, dan SMK di beberapa kabupaten atau provinsi di Indonesia (minimal 30 kabupaten atau provinsi). Dari data yang kalian peroleh, lakukan pembulatan ke ratusan terdekat. Kemudian, susunlah daftar distribusi frekuensi berkelompok dengan menggunakan aturan Sturgess.

G. Histogram, Poligon Frekuensi, dan Ogif

Pada pembahasan sebelumnya kita telah mengetahui bahwa data yang sudah diperoleh dapat disajikan dalam bentuk diagram, di antaranya adalah diagram garis, diagram lingkaran, dan diagram batang. Pertanyaannya, dapatkah data statistik yang telah disusun menjadi daftar distribusi frekuensi disajikan dalam bentuk diagram?

Untuk data yang telah tersusun pada distribusi frekuensi baik tunggal maupun berkelompok, dapat dibentuk suatu diagram yang dinamakan *histogram* dan *poligon frekuensi*, sedangkan untuk data yang tersusun dalam distribusi frekuensi kumulatif dapat disajikan dalam diagram yang disebut *ogif*.

1. Histogram dan Poligon Frekuensi

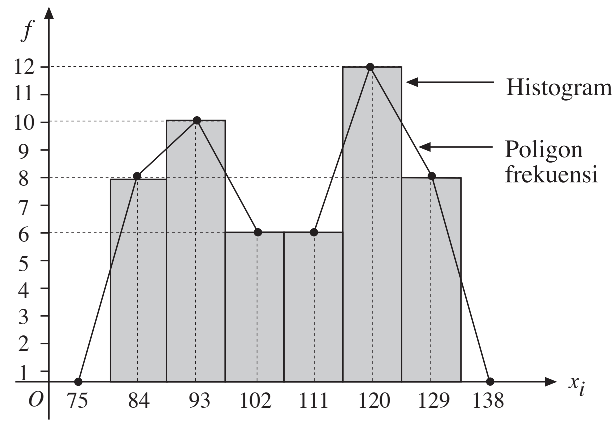
Histogram adalah bentuk penyajian daftar distribusi frekuensi dengan menggunakan batang-batang atau persegi-persegi panjang yang lebarnya sama. Histogram hampir sama dengan diagram batang, tetapi antara batang yang satu dengan batang yang lain tidak terdapat jarak.

Pada histogram, setiap persegi panjang menunjukkan frekuensi kelas tertentu. Lebar persegi panjang menunjukkan panjang kelas interval (bisa diwakili titik tengah), sedangkan tinggi persegi panjang menunjukkan frekuensi kelas tersebut. Frekuensi selalu ditempatkan pada sumbu tegak. Pada distribusi frekuensi tunggal, setiap batang mewakili satu nilai.

Apabila titik-titik tengah dari puncak-puncak histogram tersebut dihubungkan dengan garis, garis yang menghubungkan titik-titik tengah dari puncak-puncak histogram itu dinamakan *poligon frekuensi*. Misalnya, kita lihat kembali daftar distribusi frekuensi pada **Tabel 1.9** yang dapat kita tampilkan kembali dalam bentuk lain sebagai berikut.

Nilai	Titik Tengah	Frekuensi
71 – 79	75	0
80 – 88	84	8
89 – 97	93	10
98 – 106	102	6
107 – 115	111	6
116 – 124	120	12
125 – 133	129	8
134 – 142	138	0
Jumlah		50

Daftar distribusi frekuensi data di atas dapat digambarkan dalam histogram dan poligon frekuensi seperti gambar berikut.



Gambar 1.21

2. Ogif

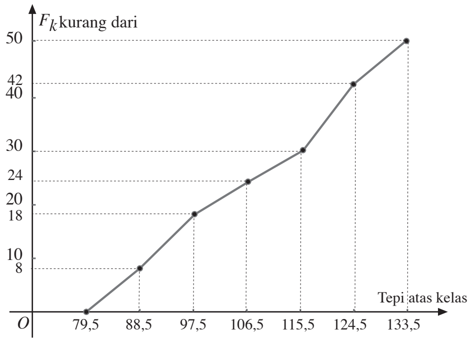
Daftar distribusi frekuensi kumulatif dapat digambarkan pada suatu diagram dengan cara menempatkan nilai-nilai tepi kelas pada sumbu mendatar (sumbu X) dan nilai-nilai frekuensi kumulatif pada sumbu tegak (sumbu Y). Jika titik-titik yang merupakan pasangan nilai tepi kelas dan nilai frekuensi kumulatif tersebut kita hubungkan dengan garis, diagram garis yang terjadi dinamakan *poligon frekuensi kumulatif*. Apabila poligon frekuensi kumulatif ini dihaluskan, diperoleh suatu kurva yang disebut *kurva frekuensi kumulatif* atau *ogif*.

Untuk lebih memahami pengertian ogif, perhatikan kembali daftar distribusi frekuensi kumulatif yang telah kita peroleh pada **Tabel 1.12** dan **Tabel 1.13**. Tabel tersebut dapat kita tampilkan kembali sebagai berikut.

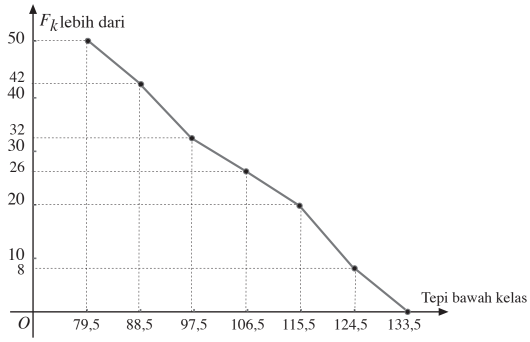
Nilai Kumulatif Kurang dari	F_k Kurang dari
88,5	8
97,5	18
106,5	24
115,5	30
124,5	42
133,5	50

Nilai Kumulatif Lebih dari	F_k Lebih dari
79,5	50
88,5	42
97,5	32
106,5	26
115,5	20
≥ 124,5	8

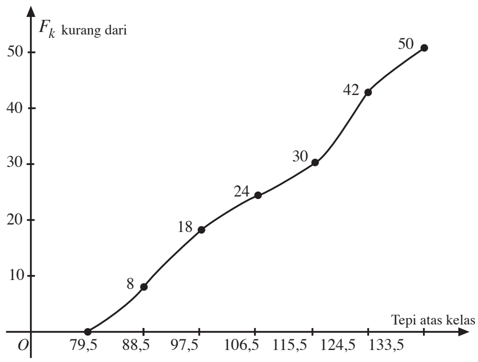
Dari kedua tabel di atas dapat dibuat kurva frekuensi kumulatif dan kurva frekuensi kumulatif seperti pada gambar berikut.



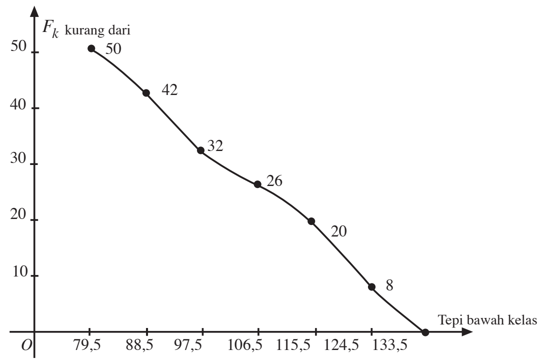
(a) Poligon F_k kurang dari



(b) Poligon F_k lebih dari



(c) Ogif positif



(d) Ogif negatif

Gambar 1.22

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Pada suatu kegiatan sosial, suatu sekolah memberikan santunan kepada orang-orang kurang mampu di sekitarnya. Kegiatan itu telah dilakukan secara rutin selama enam tahun. Banyaknya orang yang disantuni tercatat sebagai berikut.

Tabel 1.16

Tahun Ke-	1	2	3	4	5	6
Banyak Orang yang Disantuni	75	100	120	120	130	150

   a. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.
   b. Pada tahun keberapa jumlah orang yang disantuni paling banyak?
   c. Pada tahun keberapa saja jumlah orang yang disantuni sama banyak?

2. Suatu sekolah mengadakan pertunjukan amal yang hasilnya digunakan untuk menyumbang korban bencana alam. Selama 7 hari pertunjukan, penonton yang hadir dicatat dan hasilnya adalah sebagai berikut.

Tabel 1.17

Hari Ke-	1	2	3	4	5	6	7
Banyak Penonton	175	250	225	250	175	150	250

a. Buatlah histogram dan poligon frekuensi data tersebut.
b. Berapa jumlah penonton paling banyak? Pada hari keberapa saja?
c. Berapa jumlah penonton paling sedikit? Pada hari keberapa saja?

3. Buatlah histogram dan poligon frekuensi data berikut.

a.

Tabel 1.18

Tinggi Badan (cm)	**Frekuensi**
145 – 149	5
150 – 154	7
155 – 159	15
160 – 164	20
165 – 169	13
Jumlah	60

b.

Tabel 1.19

Berat Badan (kg)	**Frekuensi**
36 – 40	3
41 – 45	6
46 – 50	11
51 – 55	15
56 – 60	13
61 – 65	2
Jumlah	50

4. Perhatikan kembali soal nomor 3.
   a. Susunlah daftar distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari.
   b. Buatlah poligon frekuensi kumulatif dan ogif dari daftar tersebut.

5. Data berikut adalah upah minimum yang diberikan kepada karyawan dari sejumlah 100 perusahaan kecil dan menengah di sebuah kota yang ditampilkan kembali dari **Tabel 1.14**.

Upah Minimum (ribuan rupiah)	**Frekuensi**
300 – 349	5
350 – 399	7
400 – 449	16
450 – 499	9
500 – 549	8
550 – 599	25
600 – 649	18
650 – 699	12
Jumlah	100

   a. Susunlah daftar distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan lebih dari.
   b. Buatlah poligon frekuensi kumulatif dan ogif dari daftar tersebut.

I. Statistik Deskriptif untuk Data Berkelompok

Pada subbab sebelumnya, kalian telah mempelajari statistik deskriptif untuk data tunggal, seperti statistik ukuran pemusatan data, ukuran letak data, dan ukuran penyebaran data. Pada subbab ini kita akan mempelajari kembali pembahasan tersebut untuk data yang telah tersusun dalam daftar distribusi frekuensi (data berkelompok).

Misalkan diberikan data nilai tes Matematika dari 12 siswa berikut 6 8 8 8 8 6 6 8 9 7 5 5. Data tersebut dapat disusun dalam daftar distribusi frekuensi atau dalam bentuk tabel berikut.

Tabel 1.20

Nilai	Frekuensi
5	2
6	3
7	1
8	5
9	1
Jumlah	12

Dengan menyajikan data ke dalam daftar (tabel) distribusi frekuensi, penyajian data akan menjadi lebih simpel, menarik, dan mudah dibaca. Data yang tersaji dalam daftar distribusi frekuensi dapat dengan simpel ditentukan ukuran-ukuran statistiknya.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Kelas	f
2 – 6	2
7 – 11	3
12 – 16	4
17 – 21	5
22 – 26	6

Dari daftar distribusi tersebut, dapat disimpulkan bahwa rata-rata data adalah ....

a. 16,50 d. 15,75
b. 17,99 e. 17,75
c. 15,50

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2002

1. Menentukan Mean Data Berkelompok

Kita telah mempelajari bahwa mean suatu data ukuran x_1, x_2, …, x_n dapat ditentukan dengan rumus

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Untuk data yang disajikan dalam daftar distribusi frekuensi, mean dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan diberikan data yang terdiri atas n datum dan terbagi dalam r kelompok data sebagai berikut.

$$\underbrace{x_1, x_1, ..., x_1}_{f_1}, \underbrace{x_2, x_2, ..., x_2}_{f_2}, ..., \underbrace{x_r, x_r, ..., x_r}_{f_r}$$

Rata-rata (mean) data tersebut dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_1 + ... + x_1 + x_2 + x_2 + ... + x_2 + ... + x_r + x_r + ... + x_r}{n}$$

$$= \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_rx_r}{f_1 + f_2 + \ldots + f_r}$$

$$= \frac{\sum f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} f_i}$$

Jadi, mean data berkelompok ditentukan dengan rumus berikut.

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} f_i}$$

Keterangan:

f_i : frekuensi kelas ke-i

r : jumlah kelas

$\sum\limits_{i=1}^{r} f_i = n$: ukuran data

Bagaimana jika data tersaji dalam rentang interval? Untuk menentukan nilai meannya, caranya sama, yaitu dengan menggunakan rumus

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{r} f_i}$$

Namun, x_i adalah nilai tengah dari interval kelas masing-masing kelas.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Umur rata-rata (rata-rata hitung) dari suatu kelompok yang terdiri atas dokter dan jaksa adalah 40 tahun. Jika umur rata-rata para dokter 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa 50 tahun, maka perbandingan banyak dokter dan banyak jaksa adalah ....

a. 3 : 2
b. 3 : 1
c. 2 : 3
d. 2 : 1
e. 1 : 2

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1989

Contoh:

1. Tentukan mean data berikut.

Tabel 1.21

x_i	f_i	$f_i \times x_i$
3	2	6
4	3	12
5	4	20
6	8	48
7	5	35
8	10	80
9	8	72
Jumlah	40	273

Penyelesaian:

Dengan nilai-nilai seperti yang terdapat pada tabel di atas, diperoleh mean berikut.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{273}{40} = 6{,}825$$

Jadi, mean data tersebut adalah 6,825.

2. Tentukan mean dari data pada daftar distribusi frekuensi berkelompok berikut.

Tabel 1.22

Nilai	Frekuensi
31 – 40	5
41 – 50	2
51 – 60	6
61 – 70	3
71 – 80	4
81 – 90	12
91 – 100	8
Jumlah	40

Penyelesaian:

Tabel 1.23

Nilai	f_i	x_i	$f_i \times x_i$
31 – 40	5	35,5	177,5
41 – 50	2	45,5	91
51 – 60	6	55,5	333
61 – 70	3	65,5	196,5
71 – 80	4	75,5	302
81 – 90	12	85,5	1.026
91 – 100	8	95,5	764
Jumlah	40		2.890

Dengan nilai-nilai seperti yang terdapat pada tabel di atas, diperoleh mean sebagai berikut.

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{2.890}{40} = 72{,}25$$

Jadi, mean data tersebut adalah 72,25.

Problem Solving

Empat kelompok siswa yang masing-masing terdiri atas 4, 8, 18, 20 orang siswa mengumpulkan dana untuk sumbangan korban bencana alam. Setiap siswa pada kelompok pertama menyumbang Rp5.000,00, kelompok kedua Rp3.000,00, kelompok ketiga Rp4.000,00, dan kelompok keempat Rp2.000,00. Berapa mean sumbangan setiap siswa dari keempat kelompok tersebut?

Penyelesaian:

Untuk menghitung besarnya mean sumbangan setiap siswa dari keempat kelompok tersebut, gunakan rumus berikut.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{4} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{4} f_i} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + f_4x_4}{f_1 + f_2 + f_3 + f_4}$$

$$= \frac{4(5.000) + 8(3.000) + 18(4.000) + 20(2.000)}{4 + 8 + 18 + 20}$$

$$= \frac{156.000}{50} = 3.120$$

Jadi, mean sumbangan setiap siswa dari keempat kelompok tersebut adalah Rp3.120,00.

2. Menentukan Mean dengan Menggunakan Mean Sementara

Selain dengan cara yang sudah kita pelajari di atas, mean dapat dihitung dengan menggunakan *mean sementara*. Biasanya, mean sementara dipilih titik tengah kelas yang mempunyai frekuensi tertinggi. Langkah-langkah untuk menentukan mean menggunakan mean sementara adalah sebagai berikut.

a. Tentukan mean sementara ($\bar{x}_s$).

b. Tentukan simpangan (deviasi) setiap nilai terhadap mean sementara, yaitu

$$d_i = x_i - \bar{x}_s$$

dengan x_i nilai tengah kelas ke-i dan d_i simpangan nilai x_i terhadap $\bar{x}_s$.

c. Hitunglah mean simpangannya ($\bar{d}$) dengan rumus berikut.

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

d. Hitunglah mean yang sebenarnya yang merupakan jumlah antara mean sementara dan mean simpangan, yaitu $\bar{x} = \bar{x}_s + \bar{d}$.

Jadi, mean sebenarnya adalah

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

Contoh:

Tentukan mean dari daftar distribusi frekuensi pada **Tabel 1.22** dengan menggunakan mean sementara.

Penyelesaian:

Misalnya, mean sementara adalah $\bar{x}_s = 85{,}5$ (titik tengah kelas dengan frekuensi tertinggi). Kemudian, kita hitung simpangan setiap nilai (dalam hal ini titik tengah masing-masing kelas) terhadap mean sementara itu dan kita kalikan dengan setiap frekuensinya. Hasil perhitungan itu terlihat seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.24

Nilai	f_i	x_i	$d_i = x_i - \bar{x}_s$	$f_i \times d_i$
31 – 40	5	35,5	–50	–250
41 – 50	2	45,5	–40	– 80
51 – 60	6	55,5	–30	–180
61 – 70	3	65,5	–20	– 60
71 – 80	4	75,5	–10	– 40
81 – 90	12	$85{,}5 = \bar{x}_s$	0	0
91 – 100	8	95,5	10	80
Jumlah	40			–530

Dengan nilai-nilai seperti yang terdapat pada tabel di atas, diperoleh

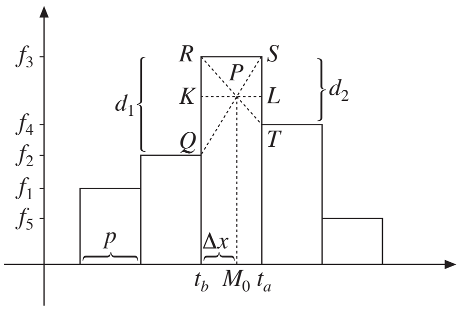
$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{7} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{-530}{40} = -13{,}25$$

Jadi, mean sesungguhnya data tersebut adalah

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_s + \bar{d} \\ &= 85{,}5 - 13{,}25 \\ &= 72{,}25 \end{aligned}$$

3. Menentukan Modus Data Berkelompok

Pada suatu data kuantitatif yang tidak dikelompokkan, *modus* merupakan datum yang paling sering muncul atau datum dengan frekuensi paling besar. Oleh karena itu, modus data yang tidak dikelompokkan itu dapat langsung ditentukan dengan membandingkan besar frekuensi masing-masing.



Gambar 1.23

Bagaimana cara menentukan modus data yang ditampilkan dalam daftar distribusi frekuensi? Perhatikan uraian berikut.

Misalkan suatu data disajikan dalam tabel distribusi frekuensi dengan 5 kelas interval dan disajikan dalam histogram **Gambar 1.23**.

Pada gambar di samping ΔPQR sebangun ΔPST. Dengan demikian, berlaku perbandingan

$$\frac{KP}{PL} = \frac{RQ}{TS} \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{p - \Delta x} = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{d_1}{d_2}(p - \Delta x)$$

$$\Leftrightarrow \Delta x + \left(\frac{d_1}{d_2}\right)\Delta x = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)p$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)p}{\left(1 + \frac{d_1}{d_2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$$

Pada gambar tampak bahwa d_1 = selisih antara f_3 dan f_2, sedangkan d_2 = selisih antara f_3 dan f_4. Modus terletak di kelas ketiga.

Karena modus $M_0 = t_b + \Delta x$ maka $M_0 = t_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$.

Jadi, untuk data kuantitatif yang dikelompokkan dalam daftar distribusi frekuensi, modusnya ditentukan dengan rumus berikut.

$$M_0 = t_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p$$

Keterangan:

M_0 : Modus
t_b : Tepi bawah kelas modus (kelas dengan frekuensi terbesar)
d_1 : Frekuensi kelas modus – frekuensi kelas sebelumnya
d_2 : Frekuensi kelas sesudah modus – frekuensi kelas modus
p : Panjang kelas interval

Contoh:

Perhatikan kembali daftar distribusi frekuensi yang terdapat pada **Tabel 1.24**, kemudian tentukan modusnya.

Penyelesaian:

Dari tabel tersebut terlihat bahwa kelas modus terletak pada interval 81 – 90 (kelas dengan frekuensi paling besar, yaitu 12), dengan t_b = 80,5, d_1 = 12 – 4 = 8, d_2 = 12 – 8 = 4, dan p = 90,5 – 80,5 = 10. Perhatikan **Tabel 1.24** yang ditampilkan kembali seperti berikut.

Nilai	f	x_i
31–40	5	35,5
41–50	2	45,5
51–60	6	55,5
61–70	3	65,5
71–80	4	75,5
81–90	12	85,5
91–100	8	95,5

Oleh karena itu, modus data tersebut dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$
\begin{aligned}
M_0 &= t_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p \\
&= 80,5 + \left(\frac{8}{8+4}\right)\times 10 \\
&= 80,5 + 6,67 \\
&= 87,17
\end{aligned}
$$

Jadi, modus data tersebut adalah 87,17.

4. Menentukan Median dan Kuartil Data Berkelompok

Seperti yang telah kita pelajari sebelumnya, median adalah suatu nilai yang membagi data yang telah diurutkan menjadi dua bagian sama banyak. Adapun pengertian kuartil adalah tiga buah nilai yang membagi data yang telah diurutkan menjadi empat bagian sama banyak. Ketiga nilai itu disebut *kuartil bawah* (Q_1), *kuartil tengah* (Q_2), dan *kuartil atas* (Q_3). Penentuan letak dan nilai median serta nilai-nilai kuartil untuk data tunggal telah kita pelajari di awal pembahasan bab ini.

Bagaimana cara menentukan nilai-nilai kuartil jika data tersusun dalam tabel distribusi frekuensi berkelompok? Perhatikan uraian berikut.

Misalkan diberikan suatu data yang tersusun dalam daftar distribusi berkelompok dengan 5 kelas interval masing-masing frekuensinya f_1, f_2, f_3, f_4, dan f_5. Kita akan menentukan nilai kuartil kedua (Q_2) atau median data. Misalkan data itu disajikan dalam histogram berikut.

Perhatikan bahwa segitiga TQP sebangun segitiga TRS. Dengan demikian, berlaku perbandingan berikut.

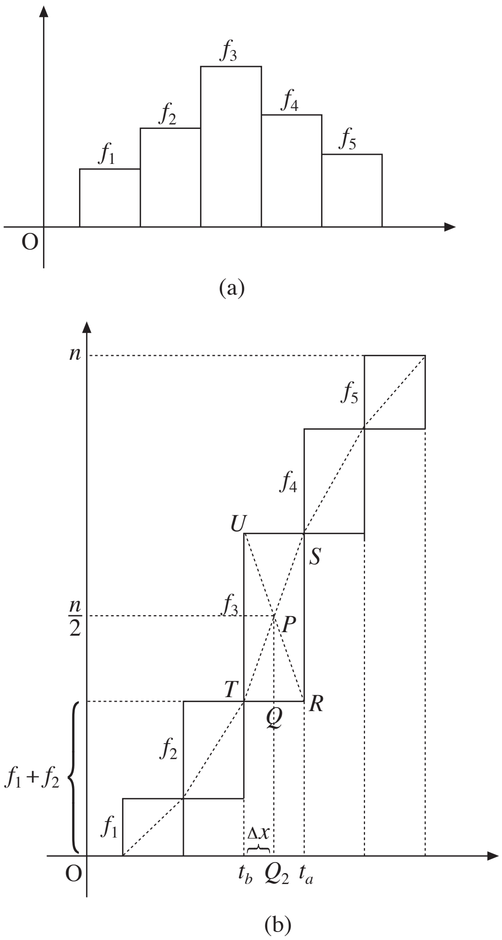
$$\frac{TQ}{TR} = \frac{PQ}{SR} \Leftrightarrow \frac{\Delta x}{p} = \frac{\frac{n}{2} - (f_1 + f_2)}{f_3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\Delta x}{p} = \frac{\frac{n}{2} - F_2}{f_{Q_2}} \quad \ldots (F_2 = f_1 + f_2)$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \left(\frac{\frac{n}{2} - F_2}{f_{Q_2}} \right) p$$

Karena median $= Q_2 = (t_b)_{Q_2} + \Delta x$ maka

$$\text{median} = Q_2 = (t_b)_{Q_2} + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_2}{f_{Q_2}} \right) p$$



Gambar 1.24

Diskusi Eksplorasi

Dengan cara serupa, coba kalian tunjukkan bahwa

$$Q_1 = (t_b)_{Q_1} + \left(\frac{\frac{n}{4} - F_1}{f_{Q_1}} \right) p,$$

dengan F_1 adalah frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_1, f_{Q1} frekuensi kelas Q_1, dan $(t_b)_{Q1}$ batas bawah kelas Q_1.

$$Q_3 = (t_b)_{Q_3} + \left(\frac{\frac{3n}{4} - F_3}{f_{Q_3}} \right) p,$$

dengan F_3 frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_3, f_{Q_3} frekuensi kelas Q_3, dan $(t_b)_{Q_3}$ batas bawah kelas Q_3.

Secara umum, untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi berkelompok, kuartil dapat ditentukan dengan rumus berikut.

$$Q_i = (t_b)_{Q_i} + \left(\frac{\frac{i}{4} n - F_i}{f_{Q_i}} \right) p$$

Keterangan:

$(t_b)_{Qi}$: tepi bawah kelas Q_i (i = 1, 2, 3)
n : ukuran data
F_i : frekuensi kumulatif sebelum kelas Q_i (i = 1, 2, 3)
f_{Qi} : frekuensi kelas Q_i (i = 1, 2, 3)
p : panjang kelas interval

Contoh:

Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data yang terdapat pada **Tabel 1.22**.

Penyelesaian:

Distribusi frekuensi berkelompok pada **Tabel 1.22** dapat kita tampilkan kembali dengan menambah satu kolom untuk frekuensi kumulatif kurang dari seperti tampak pada tabel di samping.

Tabel 1.25

	Nilai	f_i	F_k Kurang dari
	31 – 40	5	5
	41 – 50	2	7
Kelas Q_1 ←	51 – 60	6	13
	61 – 70	3	16
Kelas Q_2 ←	71 – 80	4	20
Kelas Q_3 ←	81 – 90	12	32
	91 – 100	8	40
	Jumlah	40	

Kelas Q_1 adalah kelas yang memuat data ke-: $\frac{1}{4} \times n = \frac{1}{4} \times 40 = 10$, yaitu kelas ketiga atau kelas 51–60 sebab dengan f_k kurang dari tampak bahwa data yang masuk dalam kelas 51–60 adalah data ke-8, ke-9, ke-10, sampai data ke-13. Penalaran yang sama berlaku untuk Q_2 dan Q_3.

Kelas Q_2 adalah kelas yang memuat data ke-: $\frac{1}{2} \times n = \frac{1}{2} \times 40 = 20$, yaitu kelas kelima atau kelas 71–80.

Kelas Q_3 adalah kelas yang memuat data ke-: $\frac{3}{4} \times n = \frac{3}{4} \times 40 = 30$, yaitu kelas keenam atau kelas 81–90.

Oleh karena itu, nilai-nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 berturut-turut adalah sebagai berikut.

$$Q_i = (t_b)_{Q_i} + \left(\frac{\frac{i}{4}n - F_i}{f_{Q_i}} \right) p$$

$$Q_1 = (t_b)_{Q_1} + \left(\frac{\frac{1}{4}(40) - F_1}{f_{Q_1}} \right) p$$

$$= 50{,}5 + \left[\frac{10-7}{6} \right] 10$$

$$= 50{,}5 + 5 = 55{,}5$$

$$Q_2 = (t_b)_{Q_2} + \left[\frac{\frac{1}{2}(40) - F_2}{f_{Q_2}} \right] p$$

$$= 70{,}5 + \left[\frac{20-16}{4} \right] 10$$

$$= 70{,}5 + 10 = 80{,}5$$

$$Q_3 = (t_b)_{Q_3} + \left[\frac{\frac{3}{4}(40) - F_3}{f_{Q_3}} \right] p$$

$$= 80{,}5 + \left[\frac{30-20}{12} \right] 10$$

$$= 80{,}5 + 8{,}3 = 88{,}8$$

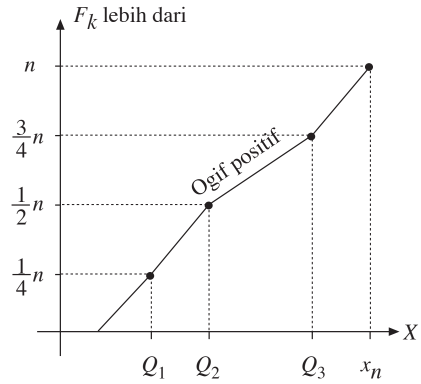
Selain menggunakan rumus, nilai-nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 dapat ditentukan menggunakan ogif positif dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1) Tetapkan nilai-nilai $\frac{1}{4}n$, $\frac{1}{2}n$, dan $\frac{3}{4}n$ pada sumbu tegak (frekuensi kumulatif).

2) Buatlah garis mendatar melalui titik-titik $\frac{1}{4}n$, $\frac{1}{2}n$, dan $\frac{3}{4}n$ sehingga memotong ogif (ogif positif), kemudian buatlah

garis tegak dari titik-titik potong itu sampai memotong sumbu X (nilai). Ketiga titik potong dengan sumbu X tersebut menunjukkan nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 seperti gambar di samping.

Dari **Gambar 1.25**, dapat diperoleh nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 secara langsung, namun ketelitian nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 yang ditentukan dengan cara ini bergantung pada skala yang digunakan dalam penggambaran ogif.



Gambar 1.25

5. Menentukan Desil Data Berkelompok

Kalian telah mampu menentukan desil dari data tunggal. Kalian juga telah mempelajari cara menentukan kuartil data berkelompok. Adapun cara menentukan desil dari data berkelompok analog dengan cara menentukan kuartil data berkelompok. Oleh karena itu, untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi berkelompok, desil ditentukan dengan rumus berikut.

$$D_i = (t_b)_{D_i} + \left[\frac{\frac{i}{10}n - F_i}{f_{D_i}} \right] p$$

Keterangan:

$(t_b)_{D_i}$: tepi bawah kelas D_i

n : ukuran data

F_i : frekuensi kumulatif sebelum kelas D_i ($i = 1, 2, ..., 9$)

f_{D_i} : frekuensi kelas D_i ($i = 1, 2, ..., 9$)

p : panjang kelas interval

Contoh:

Tentukan D_1 dan D_5 data berikut.

Tabel 1.26

Nilai	f_i	F_k Kurang dari
40 – 49	2	2
50 – 59	5	7
60 – 69	12	19
70 – 79	10	29
80 – 89	5	34
90 – 99	2	36
Jumlah	36	

Penyelesaian:

Dari tabel di atas, diperoleh sebagai berikut.

Kelas D_1 adalah kelas yang memuat data ke-$\frac{1}{10} \times n = \frac{1}{10} \times 36 = 3{,}6$, yaitu kelas kedua sehingga

$$D_1 = (t_b)_{D_1} + \left[\frac{\frac{1}{10}n - F_1}{f_{D_1}}\right]p$$

$$= 49{,}5 + \left[\frac{\frac{1}{10}(36) - 2}{5}\right]10$$

$$= 49{,}5 + \left[\frac{3{,}6 - 2}{5}\right]10$$

$$= 49{,}5 + 3{,}2$$

$$= 52{,}7$$

Kelas D_5 adalah kelas yang memuat data ke-$\frac{5}{10} \times n = \frac{5}{10} \times 36 = 18$, yaitu kelas ketiga sehingga

$$D_5 = (t_b)_{D_5} + \left[\frac{\frac{5}{10}n - F_5}{f_{D_5}}\right]p$$

$$= 59{,}5 + \left[\frac{\frac{5}{10}(36) - 7}{12}\right]10$$

$$= 59{,}5 + \left[\frac{18 - 7}{12}\right]10$$

$$= 59{,}5 + 9{,}17$$

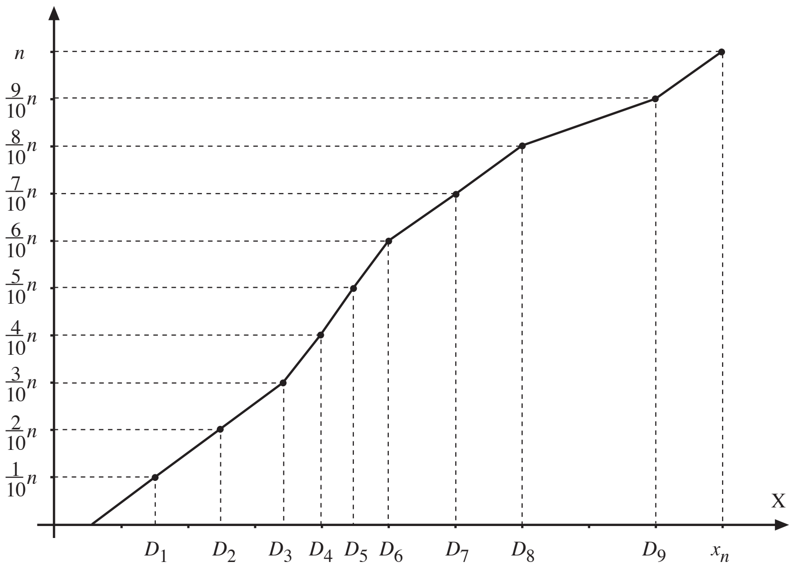
$$= 68{,}67$$

Coba kalian tentukan nilai median dari soal ini, kemudian bandingkan dengan nilai D_5. Apa kesimpulan kalian?

Selain menggunakan rumus, nilai-nilai desil dapat juga ditentukan dengan langkah-langkah berikut.

1. Pada sumbu tegak (frekuensi kumulatif) ditetapkan nilai-nilai $\frac{1}{10}n$, $\frac{2}{10}n$, $\frac{3}{10}n$, $\frac{4}{10}n$, $\frac{5}{10}n$, $\frac{6}{10}n$, $\frac{7}{10}n$, $\frac{8}{10}n$, dan $\frac{9}{10}n$.

2. Melalui titik-titik $\frac{1}{10}n$, $\frac{2}{10}n$, $\frac{3}{10}n$, $\frac{4}{10}n$, $\frac{5}{10}n$, $\frac{6}{10}n$, $\frac{7}{10}n$, $\frac{8}{10}n$, dan $\frac{9}{10}n$, dibuat garis mendatar sehingga memotong ogif (ogif positif), kemudian dari titik-titik potong tersebut dibuat garis tegak sampai memotong sumbu X (nilai). Kesembilan titik potong tersebut menunjukkan nilai D_1, D_2, ..., dan D_9. Untuk lebih jelasnya, perhatikan **Gambar 1.26**.



Gambar 1.26

Dari **Gambar 1.26**, dapat diperoleh nilai-nilai D_1, D_2, D_3, D_4, D_5, D_6, D_7, D_8, dan D_9 secara langsung, namun ketelitian nilai-nilai tersebut bergantung pada skala yang digunakan dalam penggambaran ogif.

Tugas Berpikir Kritis **Kerjakan di buku tugas**

Misalkan diberikan suatu data berkelompok yang terdiri atas dua kelas saja. Setiap kelas mempunyai frekuensi yang sama. Total frekuensi data adalah 10. Jika kelas pertama 10–15, dapatkah ditentukan desilnya? Jika bisa, tentukan D_1 dan D_9.

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan mean dari data yang terdapat pada distribusi frekuensi berikut.

a. **Tabel 1.27**

Nilai	Frekuensi
31–40	1
41–50	5
51–60	6
61–70	14
71–80	15
81–90	8
91–100	1
Jumlah	50

b. **Tabel 1.28**

Nilai	Frekuensi
51–60	5
61–70	8
71–80	10
81–90	20
91–100	7
Jumlah	50

2. Dengan menggunakan mean sementara, coba tentukan nilai mean data berkelompok dari soal nomor 1.
3. Tentukan mean, median, dan modus dari setiap data dalam daftar distribusi frekuensi yang tersaji pada tabel-tabel berikut.

a. **Tabel 1.29**

Nilai	Frekuensi
20 – 22	4
23 – 25	12
26 – 28	10
29 – 31	3
32 – 34	1
Jumlah	30

b. **Tabel 1.30**

Nilai	Frekuensi
141 – 145	3
146 – 150	6
151 – 155	9
156 – 160	11
161 – 165	18
166 – 170	3
Jumlah	50

4. Tentukan kuartil pertama dan kuartil ketiga dari soal nomor 3 di atas.
5. Tentukan median, kuartil pertama (Q_1), kuartil ketiga (Q_3), desil pertama (D_1), desil kedua (D_2), desil ketiga (D_3), desil keempat (D_4), desil kelima (D_5), desil keenam (D_6), desil ketujuh (D_7), desil kedelapan (D_8), dan desil kesembilan (D_9) dari soal nomor 3.

J. Ukuran Penyebaran Data (Lanjutan)

Dalam statistik, untuk mengetahui karakteristik data yang telah dikelompokkan, dapat digunakan nilai-nilai ukuran pemusatan data dan ukuran penyebaran data. Dengan nilai-nilai ukuran tersebut, kita dapat mengetahui informasi data secara sederhana, tetapi memiliki pengertian yang dapat menjelaskan data secara keseluruhan. *Ukuran pemusatan data* merupakan informasi yang memberikan penjelasan bahwa data memiliki satu atau lebih titik di mana dia memusat.

Adapun *ukuran penyebaran data* adalah nilai ukuran yang memberikan gambaran tentang seberapa besar data menyebar dari titik-titik pemusatannya.

Di depan, kalian telah mempelajari beberapa ukuran penyebaran data (khususnya data tunggal), antara lain jangkauan, jangkauan antarkuartil, dan jangkauan semiinterkuartil. Dalam subbab ini kita akan membahas ukuran penyebaran data yang lain, baik untuk data tunggal ataupun berkelompok, yaitu

a. simpangan rata-rata;
b. ragam atau varians;
c. simpangan baku.

1. Simpangan Rata-Rata

Simpangan rata-rata atau *deviasi rata-rata* adalah ukuran penyebaran data yang mencerminkan penyebaran setiap nilai data terhadap nilai meannya. Jika suatu data kuantitatif dinyatakan dengan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ simpangan rata-rata (S_R) dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right|$$

Keterangan:

$\overline{x}$: rata-rata hitung
x_i : datum ke-i
n : ukuran data
$|\;|$: tanda harga mutlak

Untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi, simpangan rata-rata dirumuskan sebagai berikut.

Misalkan diberikan data
x_1 sejumlah f_1
x_2 sejumlah f_2
$\vdots$
x_r sejumlah f_r

Untuk menentukan simpangan rata-rata digunakan rumus di atas.

$$\begin{aligned} S_R &= \frac{1}{n}\{\underbrace{|x_2 - \overline{x}| + |x_1 - \overline{x}| + \ldots + |x_1 - \overline{x}|}_{f_1} \\ &\quad + \underbrace{|x_2 - \overline{x}| + |x_2 - \overline{x}| + \ldots + |x_2 - \overline{x}|}_{f_2} \\ &\quad + \underbrace{|x_r - \overline{x}| + |x_r - \overline{x}| + \ldots + |x_r - \overline{x}|\}}_{f_r} \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh rumus berikut.

$$S_R = \sum_{i=1}^{r} f_i \times \left|x_i - \overline{x}\right|$$

Keterangan:

$\overline{x}$: rata-rata hitung
f_i : frekuensi kelas ke-i
x_i : titik tengah kelas ke-
r : jumlah kelas

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Diketahui $x_1 = 2{,}0$; $x_2 = 3{,}5$; $x_3 = 5{,}0$; $x_4 = 7{,}0$; dan $x_5 = 7{,}5$. Jika deviasi rata-rata nilai tersebut dinyatakan oleh

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i - \overline{x}|}{n},$$ dengan

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$ maka deviasi (simpangan) rata-rata nilai di atas adalah ....

a. 0
b. 1,0
c. 1,8
d. 2,6
e. 5,0

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1998

Contoh:

1. Tentukan simpangan rata-rata data: 3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 9.

Penyelesaian:

Untuk menentukan simpangan rata-rata, terlebih dahulu kita tentukan mean data tersebut. Mean data tersebut adalah

$$\overline{x} = \frac{3+4+4+5+7+8+8+9}{8} = \frac{48}{8} = 6$$

Setelah diperoleh $\overline{x}$, dapat ditentukan nilai simpangan rata-rata, yaitu

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \overline{x}\right| = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}\left|x_i - \overline{x}\right|$$

$$= \frac{1}{8}(|3-6| + |4-6| + |4-6| + |7-6| + |8-6| + |9-6|)$$

$$= \frac{1}{8}(16) = 2$$

2. Tentukan simpangan rata-rata dari data pada distribusi frekuensi di samping.

Penyelesaian:

Dari data yang terdapat pada distribusi frekuensi tersebut, tentukan meannya terlebih dahulu. Kemudian, hitung nilai $\left|x_i - \overline{x}\right|$ dan $f_i \times \left|x_i - \overline{x}\right|$. Hasilnya terlihat pada tabel di samping.

Tabel 1.31

Nilai	Frekuensi
1 – 10	5
11 – 20	6
21 – 30	10
31 – 40	4
41 – 50	3
51 – 60	2
Jumlah	30

Tabel 1.32

Nilai	f_i	x_i	$f_i \times x_i$	$\left|x_i - \overline{x}\right|$	$f_i \times \left|x_i - \overline{x}\right|$
1 – 10	5	5,5	27,5	20	100
11 – 20	6	15,5	93	10	60
21 – 30	10	25,5	255	0	0
31 – 40	4	35,5	142	10	40
41 – 50	3	45,5	136,5	20	60
51 – 60	2	55,5	111	30	60
Jumlah	30		765		320

Dari nilai-nilai yang terdapat pada **Tabel 1.32**, diperoleh

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i \times x_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{765}{30} = 25,5$$

Dengan demikian, nilai-nilai pada kolom ke-5 dan ke-6 dapat ditentukan. Jadi, simpangan rata-ratanya adalah

$$S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} f_i \times |x_i - \overline{x}| = \frac{1}{30} \times 320 = 10,67.$$

2. Ragam

Ragam atau *varians* merupakan ukuran penyebaran data yang dianggap lebih baik daripada simpangan rata-rata, karena simpangan rata-rata menggunakan simpangan secara mutlak tanpa menghiraukan tanda positif atau negatif yang menyulitkan manipulasi secara matematis. Walaupun demikian, simpangan rata-rata dianggap sebagai ukuran penyebaran yang lebih baik daripada jangkauan atau jangkauan antarkuartil yang hanya bergantung pada nilai-nilai ekstrem.

Ragam atau *varians* adalah ukuran penyebaran data yang mengukur rata-rata jarak kuadrat setiap nilai data terhadap nilai meannya. Jika suatu data kuantitatif dinyatakan dengan x_1, x_2, ..., x_n, ragam atau varians didefinisikan dengan rumus:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

Keterangan:

$\overline{x}$: rata-rata hitung

x_i : datum ke-*i*

n : ukuran data

Dari definisi rumus tersebut, dapat diperoleh rumus bentuk lain, yaitu

$$S^2 = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}\right)$$

Untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi dan terdiri atas *r* kelas, ragam atau varians dapat diperoleh dari definisi varians untuk data tunggal, yaitu

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} f_i \times (x_i - \overline{x})^2$$

Seperti halnya pada data tunggal, rumus tersebut juga dapat ditulis dalam bentuk lain, yaitu

$$S^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2 \times f_i}{n} - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i \times f_i}{n} \right)^2$$

Untuk nilai n yang kecil, perhitungan varians dengan rumus yang terakhir memberikan hasil yang berbeda dengan rumus sebelumnya. Namun, untuk nilai n yang cukup besar, perhitungan dengan kedua rumus itu hasilnya tidak mempunyai perbedaan yang berarti. Beberapa pakar statistik, seperti *Fisher* dan *Wilks* menyarankan untuk menggunakan faktor pembagi $(n - 1)$ apabila $n < 100$ sehingga nilai varians dihitung dengan rumus

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

Perhitungan varians menggunakan faktor pembagi $(n - 1)$ belum kita terapkan dalam pembahasan kali ini.

3. Simpangan Baku

Simpangan baku atau *deviasi standar (S)* adalah akar kuadrat dari varians. Untuk data tunggal berukuran n, deviasi standar dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Bentuk alternatif rumus di atas dapat diturunkan dari rumus alternatif varians dengan mengambil akar kuadratnya sehingga diperoleh

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n}}$$

Dengan cara yang sama, deviasi standar untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi, dengan titik tengah ke-i adalah x_i dan frekuensi kelas ke-i adalah f_i, dapat dinyatakan dalam rumus sebagai berikut.

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 \times f_i}$$

Cara di atas dapat digunakan untuk memperoleh rumus deviasi standar dari beberapa bentuk manipulasi rumus varians yang telah dikemukakan sebelumnya, yaitu dengan mengambil akar kuadratnya. Selain rumus di atas, rumus alternatif deviasi standar adalah

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i^2 \times f_i}{n} - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{x_i \times f_i}{n} \right)^2}$$

Contoh:

1. Tentukan varians (S^2) dan deviasi standar (S) dari data berikut.
   3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 9

   Penyelesaian:

   Data 3, 4, 4, 5, 7, 8, 8, 9 meannya adalah $\overline{x} = 6$.

   $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 &= (3-6)^2 + (4-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 + \\ &\quad (7-6)^2 + (8-6)^2 + (8-6)^2 + (9-6)^2 \\ &= 36\end{aligned}$$

   Jadi, varians data tersebut adalah $S^2 = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(x_i - \overline{x})^2 = \frac{1}{8}(36) = 4{,}5$

   Deviasi standarnya $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{4{,}5} = 2{,}12$.

2. Hitunglah simpangan rata-rata, varians, dan deviasi standar data yang tersaji dalam tabel berikut.

   Penyelesaian:

   Tabel 1.33

Nilai	f_i
1 – 10	3
11 – 20	5
21 – 30	8
31 – 40	7
41 – 50	4
51 – 60	12
61 – 70	6
71 – 80	5
Jumlah	50

   Nilai rata-rata dapat ditentukan dengan dua cara.

Cara 1:

Tabel 1.34

Nilai	f_i	x_i	$f_i x_i$	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i(x_i - \overline{x})^2$
1–10	3	5,5	16,5	–37,8	1.428,84	4.286,52
11–20	5	15,5	77,5	–27,8	772,84	3.864,2
21–30	8	25,5	204	–17,8	316,84	2.534,72
31–40	7	35,5	248,5	–7,8	60,84	425,88
41–50	4	45,5	182	2,2	4,84	19,36
51–60	12	55,5	666	12,2	148,84	1.786,08
61–70	6	65,5	393	22,2	492,84	2.957,04
71–80	5	75,5	377,5	32,2	1.036,84	5.184,2
Jumlah	50		2.165		4.262,72	21.058

Berdasarkan nilai-nilai pada **Tabel 1.34**, diperoleh

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{8} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{2.165}{50} = 43,3$$

Dengan demikian, standar deviasinya adalah

$$S = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{21.058}{50}} = \sqrt{421,16} = 20,52$$

Cara 2:

Dari data di atas, nilai mean juga dapat ditentukan dengan menggunakan mean sementara, misalnya $\overline{x}_s = 55,5$. Perhitungan selanjutnya disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 1.35

Nilai	f_i	x_i	d_i	$f_i \times d_i$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$	$(x_i - \overline{x})^2$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert f_i$	$(x_i - \overline{x})^2 f_i$
1 – 10	3	5,5	–50	–150	37,8	1.428,84	113,4	4.286,52
11 – 20	5	15,5	–40	–200	27,8	772,84	139	3.864,2
21 – 30	8	25,5	–30	–240	17,8	316,84	142,4	2.534,72
31 – 40	7	35,5	–20	–140	7,8	60,84	54,6	425,88
41 – 50	4	45,5	–10	– 40	2,2	4,84	8,8	19,36
51 – 60	12	55,5	0	0	12,2	148,84	146,4	1.786,08
61 – 70	6	65,5	10	60	22,2	492,84	133,2	2.957,04
71 – 80	5	75,5	20	100	32,2	1.036,84	161	5.184,2
Jumlah	50			– 610		4.262,72	898,8	21.058

Dari **Tabel 1.35** diperoleh nilai mean sebenarnya

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{8} f_i d_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = 55{,}5 + \frac{-610}{50} = 43{,}3.$$

a. Simpangan rata-rata

$$S_R = \frac{\sum_{i=1}^{8} \left| x_i - \bar{x} \right| \times f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{898{,}8}{50} = 17{,}98$$

b. Varians

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} \left(x_i - \bar{x} \right)^2 f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{21.058}{50} = 421{,}16$$

c. Deviasi standar

Karena $S^2 = 421{,}16$ (jawaban b) maka $S = \sqrt{S^2} = \sqrt{421{,}16} = 20{,}52$.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

Tentukan simpangan rata-rata, varians, dan deviasi standar data berikut.

1. 6, 7, 8, 9, 8, 8, 9, 7, 8, 10
2. 15, 16, 15, 17, 12, 13, 11, 18, 19, 20, 18, 19, 14, 18
3. 25, 27, 21, 18, 22, 24, 26, 25, 27, 28, 23, 24, 22
4. 60, 30, 50, 90, 60, 40, 70, 20, 30, 80, 60, 20, 80, 40, 60, 10

5. **Tabel 1.36**

Nilai	Frekuensi
5	3
6	4
7	6
8	9
9	5
10	3
Jumlah	30

6. **Tabel 1.37**

Nilai	Frekuensi
21 – 23	3
24 – 26	6
27 – 29	9
30 – 32	18
33 – 35	4
Jumlah	40

K. Pemeriksaan Data Pencilan

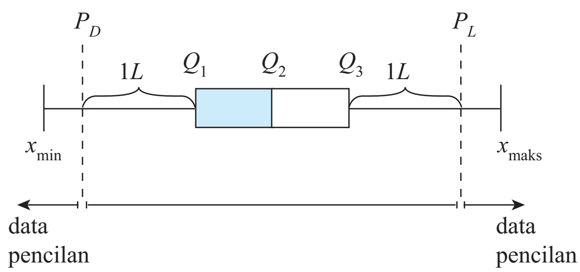
Pada suatu data, tentu kalian pernah mempunyai data yang sangat berbeda dari data lainnya. Data ini mempunyai selisih yang cukup besar. Data yang demikian dinamakan *pencilan* atau *data yang tidak konsisten*, sedangkan data yang tidak berbeda dari kelompoknya dinamakan *data normal*. Misalkan terdapat suatu data x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n. Bagaimana cara memeriksa pencilan?

Kalian telah mempelajari kuartil atas dan bawah, pagar dalam dan pagar luar. Jika suatu data berada 1 langkah di luar pagar dalam maupun 1 langkah di luar pagar luar, data itu merupakan data pencilan atau data tidak konsisten. Lebih khusus lagi, jika suatu data berada 2 langkah di luar Q_1 maupun Q_3, data itu disebut data ekstrem. Data yang berada di antara pagar luar dan pagar dalam termasuk data normal.

Jadi, dapat kita katakan sebagai berikut.

Misalkan terdapat x_1, x_2, x_3, x_4, ..., x_n, pagar luar, $P_L = Q_3 + L$ dan pagar dalam, $P_D = Q_1 - L$ (L adalah langkah) maka
a. untuk $P_D \leq x_i \leq P_L$ maka x_i adalah data normal;
b. untuk $x_i \leq P_D$ atau $x_i \geq P_L$ maka x_i adalah data pencilan.

Data pencilan kemungkinan berasal dari kesalahan pencatatan data, kesalahan dalam pengukuran, maupun data yang benar-benar menyimpang, seperti data bibit unggul di antara bibit-bibit lainnya atau data tentang kejadian yang mirip dengan peristiwa anomali air. Untuk mengamati data pencilan atau data normal, dapat dilihat dalam diagram kotak garis.



Gambar 1.27

Contoh:

Misalkan diketahui data: 2, 5, 5, 6, 6, 8, 10. Periksalah, apakah ada pencilannya?

Penyelesaian:

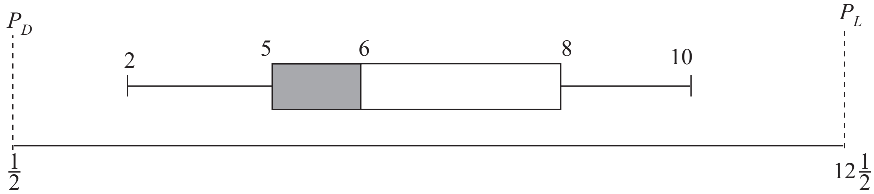
Dari data ini, diperoleh $x_{min} = 2$, $Q_1 = 5$, $Q_2 = 6$, $Q_3 = 8$, dan $x_{maks} = 10$.

Jadi, $L = \frac{3}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{3}{2}(8 - 5) = \frac{9}{2}$.

Oleh karena itu,

$$P_D = Q_1 - L$$
$$= 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$$
$$P_L = Q_3 + L$$
$$= 8 + \frac{9}{2}$$
$$= 12\tfrac{1}{2}$$

Karena tidak ada x_i sedemikian rupa sehingga $x_i \leq \frac{1}{2}$ atau $x_i \geq 12\frac{1}{2}$, maka data tersebut tidak terdapat pencilannya. Lebih jelas lagi, dapat dilihat pada diagram kotak garis berikut.



Gambar 1.28

Uji Kompetensi 9

Kerjakan di buku tugas

1. Manakah data-data berikut yang merupakan data pencilan atau data normal?
   a. 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 20, 21
   b. 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2
   c. 2, 6, 7, 6, 2, 8, 6, 5, 7, 7, 7
   d. 10, 100, 1.000, 10.000, 100.000
2. Diketahui data:
   12, 15, 20, 25, 25, 26, 30, 20, 21, 36.
   a. Periksalah, apakah terdapat data pencilannya?
   b. Jika ada data pencilannya, data manakah itu?
3. Misalnya, diketahui suatu data tentang nilai ulangan Matematika dari suatu kelas adalah sebagai berikut.

20	25	30	35	40	25	30	40	45	60	25	30	100
40	40	40	45	55	50	45	30	35	60	65	60	25

   a. Buatlah diagram kotak garis dengan terlebih dahulu menentukan statistik lima serangkainya.
   b. Dengan diagram kotak yang kalian buat, dapatkah kalian menentukan ada atau tidaknya data pencilan? Jika ada, data manakah itu? Mungkinkah dilacak penyebab munculnya data pencilan itu?

4. Berikut adalah data tentang telur yang dihasilkan ayam petelur selama 2 minggu berturut-turut.

500	505	495	295	300	500	505
510	510	515	495	490	495	400

Coba kalian selidiki, adakah data pencilannya? Jika ada, kemungkinan apakah yang menyebabkan munculnya data tersebut?

5. Selain dengan pemeriksaan data yang telah kalian pelajari, dapatkah kalian menentukan cara lain untuk menemukan suatu data pencilan? Coba kalian pikirkan.

Tugas Observasi **Kerjakan di buku tugas**

Adakan pengamatan terhadap proses produksi dari suatu pabrik yang memproduksi barang tertentu (kalian boleh memilihnya). Kumpulkan data produksi dalam periode-periode tertentu (misalnya, setiap jam, setiap hari, atau setiap minggu). Dari data yang kalian peroleh, carilah statistik-statistik data itu, baik yang berupa ukuran pemusatan, ukuran letak, maupun ukuran penyebarannya. Gunakan bantuan kalkulator atau *software* komputer untuk perhitungannya.

Refleksi

Kalian telah mengetahui statistika. Berdasarkan materi itu, apakah yang menarik bagi kalian? Dapatkah kalian melakukan kegiatan statistik dengan objek nilai-nilaimu? Coba jelaskan hasil kegiatan statistik yang kamu lakukan. Dari kegiatan statistik itu apakah hasil-hasil yang diperoleh itu dapat mencerminkan prestasimu? Jelaskan.

Rangkuman

1. *Statistik* adalah kumpulan informasi atau keterangan berupa angka-angka yang disusun, ditabulasi, dan dikelompok-kelompokkan sehingga dapat memberikan informasi yang berarti mengenai suatu masalah atau gejala. Adapun ilmu tentang cara-cara mengumpulkan, menabulasikan, mengelompokkan, menganalisis, dan mencari keterangan yang berarti tentang informasi yang berupa angka-angka itu disebut *statistika*.
2. *Kuartil* adalah tiga nilai yang membagi data yang sudah diurutkan menjadi empat bagian yang sama banyak.
   Untuk data yang berukuran cukup besar, letak nilai kuartil ditentukan dengan rumus berikut.
   Letak Q_i = datum ke-$\frac{i}{4}(n + 1)$.

Untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi, nilai kuartil ke-i, i = 1, 2, dan 3, ditentukan dengan rumus berikut.

$$Q_i = (t_b)_{Qi} + \left[\frac{\frac{1}{4}n - F_i}{f_{Q_i}} \right] p.$$

3. *Statistik lima serangkai* adalah lima buah nilai statistik yang dianggap dapat menggambarkan kecenderungan pemusatan data, yaitu minimum (x_{min}), kuartil bawah (Q_1), median (Q_2), kuartil atas (Q_3), dan statistik maksimum (x_{maks}).
4. *Desil* adalah sembilan nilai yang membagi data menjadi sepuluh bagian sama banyak. Untuk data yang berukuran cukup besar, nilai desil ke-i, i = 1, 2, ..., 9, ditentukan dengan rumus

   $$\text{letak } D_i = \text{datum ke-} x_{\frac{i}{10}(n+1)}$$

   Untuk data yang tersusun dalam distribusi frekuensi, nilai desilnya dirumuskan dengan

   $$D_i = (t_b)_{D_i} + \left[\frac{\frac{i}{10}n - F_i}{f_{D_i}} \right] p$$

5. Jangkauan = statistik maksimum – statistik minimum.
   Jangkauan antarkuartil = $Q_3 - Q_1$
6. *Diagram garis* adalah cara menyajikan data kontinyu dalam bentuk grafik garis.
   Diagram lingkaran adalah cara menyajikan data statistik menggunakan daerah lingkaran.
   Diagram batang adalah cara menyajikan data statistik dengan batang-batang tegak atau mendatar, batang satu dengan yang lain tidak berimpit.
7. *Diagram batang daun* merupakan bentuk penyajian data yang memperlihatkan data asli dan disusun secara vertikal dengan menyertakan satuan batang dan daun.
8. *Diagram kotak garis* adalah diagram yang berbentuk kotak dan garis.
9. *Histogram* adalah diagram batang yang batang-batangnya berimpit, untuk menyajikan data yang telah tersusun dalam distribusi frekuensi
   Poligon frekuensi adalah garis yang menghubungkan titik-titik tengah puncak-puncak histogram.
10. Ogif ada dua macam, yaitu ogif positif dan ogif negatif.
11. Mean atau rata-rata hitung dirumuskan dengan

    $$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \quad \text{atau} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

    Jika menggunakan rata-rata sementara, mean dapat ditentukan dengan

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum_{i=1}^{r} f_i \times d_i}{\sum_{i=1}^{r} f_i}$$

12. *Modus* adalah nilai yang paling sering muncul atau nilai yang frekuensinya paling besar.

    Modus dirumuskan dengan $M_0 = t_b + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)p.$

13. Simpangan rata-rata dirumuskan dengan $S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|.$

    Untuk data yang tersusun dalam daftar distribusi frekuensi: $S_R = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \times \left|x_i - \bar{x}\right|.$

14. Ragam atau varians: $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$. Untuk data yang tersusun dalam distribusi frekuensi:

    a. $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 \times f_i$

    b. $S^2 = \sum_{i=1}^{r}\frac{x_i^2 \times f_i}{n} - \left(\sum_{i=1}^{r}\frac{x_i \times f_i}{n}\right)$

15. Standar deviasi dirumuskan dengan $S = \sqrt{S^2}$.

Tugas Kelompok Kreativitas **Kerjakan di buku tugas**

Carilah data tentang hasil ujian suatu mata pelajaran pada periode tertentu. Hal ini dapat kalian lakukan dengan *browsing* di internet.

Dari data yang kamu peroleh, dengan menggunakan *scientific calculator,* tentukan nilai

a. rata-rata;
b. varians;
c. standar deviasi.

Coba bandingkan hasil yang kamu peroleh dengan menggunakan program komputer, misalnya *Microsoft Excel*.

Latihan Ulangan Harian I

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Rataan dari data:
   45 41 52 79 82 43 53 58
   66 78 85 81 63 67 52 68
   adalah ....
   a. 60,3
   b. 60,6
   c. 61,3
   d. 62,6
   e. 63,3
2. Modus dari data 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 7 adalah ....
   a. 6
   b. 7
   c. 6 dan 7
   d. 6,5
   e. tidak ada
3. Dari daftar distribusi frekuensi berikut, statistik lima serangkainya berturut-turut adalah ....

Nilai	Frekuensi
4	2
5	3
6	6
7	5
8	4
9	2
10	1

   a. 4, 5, 7, 8, 10
   b. 4, 5, 7, 9, 10
   c. 4, 6, 7, 8, 10
   d. 4, 6, 7, 9, 10
   e. 4, 5, 6, 8, 10
4. Mean nilai Matematika dari 20 anak adalah 6,5. Jika nilai Matematika Rina digabungkan dengan kelompok itu, maka mean nilai Matematika kelompok itu menjadi 6,6. Nilai Matematika Rina adalah ....
   a. 8,6
   b. 10
   c. 9,6
   d. 7,5
   e. 8
5. Kelas A terdiri atas 35 siswa dan B terdiri atas 40 siswa. Mean kelas B adalah 5 lebih baik daripada mean kelas A. Jika kelas A dan B digabungkan, maka meannya adalah $57\frac{2}{3}$. Mean kelas A adalah ....
   a. 50
   b. 55
   c. 60
   d. 65
   e. 75
6. Perhatikan tabel berikut.

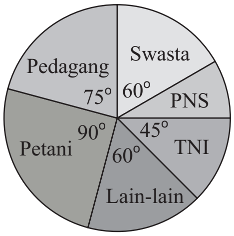
Nilai	3	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	3	5	12	17	14	6	3

   Seorang siswa dikatakan lulus jika nilai ujiannya lebih tinggi daripada nilai mean dari seluruh siswa dikurangi 1. Dari tabel di atas, jumlah siswa yang lulus adalah ....
   a. 52 siswa
   b. 40 siswa
   c. 38 siswa
   d. 23 siswa
   e. 20 siswa
7. Nilai mean dari data yang disajikan pada tabel berikut adalah ....

x_i	f_i
1	5
2	12
3	18
4	10
5	8
6	3

   a. 3,23
   b. 3,41
   c. 4,41
   d. 4,50
   e. 3,45
8. Diketahui x_0 adalah mean dari data x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Jika pola data tersebut diubah menjadi $x_1 + 2$, $x_2 + 4$, $x_3 + 6$ ..., $x_{10} + 20$, maka mean data baru tersebut adalah ....

a. $x_0 + 10$
b. $x_0 + 11$
c. $x_0 + 12$
d. $x_0 + 20$
e. x_0

9. 

Dari 1.200 orang yang telah didata tentang pekerjaannya, hasilnya dapat ditampilkan pada diagram lingkaran berikut.

Jumlah orang yang bekerja sebagai PNS adalah ....
a. 100 orang
b. 300 orang
c. 450 orang
d. 500 orang
e. 550 orang

10. Nilai Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data:
51 55 43 44 55 51 75 53 45
50 62 60 68 50 62 71 62 55
adalah ....
a. 51, 55, dan 62
b. 50, 55, dan 62
c. 50, 55, dan 63
d. 51, 55, dan 63
e. 50, 60, dan 63

11. Jangkauan antarkuartil dari data: 48, 53, 53, 62, 68, 70, 47, 58, 64, 67, 75, 78, 37, 50, 60, 69, 73, 92 adalah ....
a. 18
b. 18,5
c. 27,75
d. 70,75
e. 52,25

12. Pagar luar dari data;
64 73 47 60 68 37 53 75 48
92 58 69 70 50 62 78 53 67
adalah ....
a. 97,50
b. 98,00
c. 98,50
d. 99,00
e. 99,50

13. Jangkauan dari data:
48 75 53 37 68 60 47 73 64 71
67 53 78 62 50 70 69 58 92 58
adalah ....
a. 59
b. 58
c. 57
d. 56
e. 55

14. Jangkauan antarkuartil dari data:
51 62 43 68 55 63 75 62 45
45 55 60 44 50 51 72 53 55
adalah ....
a. 12
b. 13
c. 14
d. 15
e. 16

15. Besarnya langkah (L) dari data:
48 75 53 37 68 60 47 73 64
67 53 78 62 50 70 69 58 92
adalah ....
a. 27,00
b. 27,25
c. 27,50
d. 27,75
e. 28,00

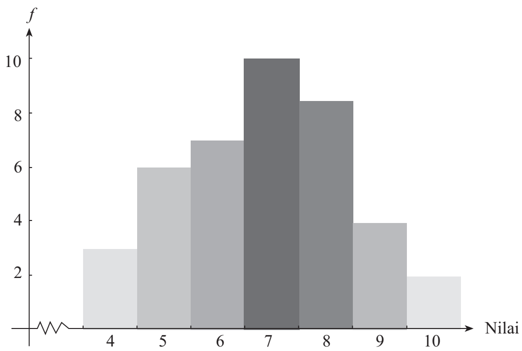
16. Tabel berikut menunjukkan tabel sebaran frekuensi data tinggi badan dari 20 orang siswa yang akan dipilih sebagai calon pemain basket.

Tinggi badan (dalam cm)	160	165	170	175	180
Banyak siswa	1	2	8	6	3

Ditentukan bahwa siswa yang dapat dipilih sebagai pemain basket haruslah memiliki tinggi badan lebih dari rataan tinggi badan kedua puluh orang siswa tadi. Banyak siswa yang dapat dipilih sebagai pemain basket adalah ....
a. 3 orang
b. 6 orang
c. 8 orang
d. 9 orang
e. 14 orang

17. Varians dari data
50 85 75 60 70 70 80 55 65 65
adalah ....
a. 115,06
b. 116,06
c. 117,06
d. 118,06
e. 119,06

18. Berikut ini histogram dari data nilai ulangan Matematika siswa kelas XI.



Dari histogram di atas, banyak siswa yang mendapat nilai kurang dari 8 adalah ....

a. 16 d. 35
b. 25 e. 44
c. 26

19. Nilai desil ke-6 dari data pada tabel di samping adalah ....

a. 78,5 d. 79,8
b. 78,8 e. 79,2
c. 79,5

20. Jika tinggi badan sekelompok siswa yang tertinggi 175 cm, sedangkan rentang adalah 6 cm, tinggi badan siswa yang terendah adalah ....

a. 165 d. 168
b. 166 e. 169
c. 167

21. Median dari data distribusi frekuensi berikut adalah ....

Nilai	*f*
11–15	3
16–20	11
21–25	15
26–30	16
31–35	3
36–40	2

a. 24,07 d. 25,67
b. 24,17 e. 25,17
c. 24,57

22. Modus data yang disajikan dalam distribusi frekuensi pada soal nomor 21 adalah ....

a. 25,5 d. 28
b. 25,75 e. 30,5
c. 25,86

23. Perhatikan tabel berikut.

Nilai Ujian	Frekuensi
31 – 40	4
41 – 50	3
51 – 60	11
61 – 70	21
71 – 80	33
81 – 90	15
91 – 100	3

Mean data tersebut adalah ....

a. 60,82 d. 62,82
b. 75,5 e. 75,9
c. 70,28

24. Dari data berikut, besarnya simpangan baku adalah ....

Nilai	Frekuensi
21–30	2
31–40	3
41–50	6
51–60	10
61–70	12
71–80	10
81–90	4
91–100	3

a. 16,45 d. 13,45
b. 15,45 e. 12,45
c. 14,45

25. Koefisien keragaman didefinisikan sebagai hasil bagi standar deviasi oleh rata-rata data. Koefisien keragaman soal nomor 24 adalah ....

a. 19,73% d. 24,48%
b. 21,32% e. 26,07%
c. 22,90%

26. Nilai rata-rata dari 20 bilangan adalah 14,2. Jika rata-rata dari 12 bilangan pertama adalah 12,6 dan rata-rata dari 6 bilangan berikutnya adalah 18,2 maka rata-rata dari 2 bilangan terakhir adalah ....
    a. 10,4
    b. 11,8
    c. 12,2
    d. 12,8
    e. 13,4

27. Nilai rata-rata ulangan matematika dari 35 siswa adalah 58. Jika nilai Ani dan Budi digabungkan dengan kelompok tersebut, maka nilai rata-ratanya menjadi 59. Nilai rata-rata Ani dan Budi adalah ....
    a. 70,5
    b. 72,5
    c. 75,5
    d. 76,5
    e. 77,5

28. Lima orang karyawan *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E* mempunyai pendapatan sebagai berikut:

    Pendapatan *A* sebesar $\frac{1}{2}$ pendapatan *E*.

    Pendapatan *B* lebih Rp100.000,00 dari *A*.

    Pendapatan *C* lebih Rp150.000,00 dari *A*.

    Pendapatan *D* kurang Rp180.000,00 dari *E*.

    Jika rata-rata pendapatan kelima karyawan tersebut Rp525.000,00 maka pendapatan karyawan *D* adalah ....
    a. Rp515.000,00
    b. Rp520.000,00
    c. Rp535.000,00
    d. Rp550.000,00
    e. Rp565.000,00

29. Tabel berikut ini menunjukkan usia 20 orang anak di kota *A*, 2 tahun lalu. Jika pada tahun ini tiga orang yang berusia 7 tahun dan seorang yang berusia 8 tahun pindah ke luar kota *A*, maka usia rata-rata 16 orang yang masih tinggal pada saat ini adalah ....
    a. 7 tahun
    b. $8\frac{1}{2}$ tahun
    c. $8\frac{3}{4}$ tahun
    d. 9 tahun
    e. $9\frac{1}{4}$ tahun

Usia	Frekuensi
5	3
6	5
7	8
8	4

30. Nilai ujian dari peserta seleksi pegawai di suatu instansi diperlihatkan tabel di bawah. Seorang calon dinyatakan lulus jika nilainya sama dengan atau di atas rata-rata. Banyaknya calon yang lulus adalah ....

Nilai Ujian	Frekuensi
3	2
4	4
5	6
6	20
7	10
8	5
9	2
10	1

    a. 8 tahun
    b. 18 tahun
    c. 38 tahun
    d. 44 tahun
    e. 48 tahun

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Sekumpulan data mempunyai mean 12 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikurangi dengan *a* kemudian hasilnya dibagi *b* ternyata menghasilkan data baru dengan mean 2 dan jangkauan 3. Tentukan nilai *a* dan *b*.
2. Suatu keluarga mempunyai 5 anak. Anak termuda berumur $\frac{1}{2}$ dari umur anak tertua, sedangkan 3 anak lainnya berturut-turut berumur 2 tahun lebih tua dari termuda, 4 tahun lebih tua dari termuda, dan 3 tahun lebih muda dari tertua. Apabila mean umur kelima anak tersebut adalah 16 tahun, tentukan umur anak tertua.

3. Pada suatu kelas, diketahui mean Matematika seluruh siswa adalah 58. Jika mean Matematika siswa putra adalah 65 dan mean Matematika untuk siswa putri adalah 54, tentukan perbandingan jumlah siswa putra dan putri dalam kelas itu.
4. Perhatikan tabel berikut.

Tinggi Badan (cm)	Frekuensi
119 – 127	3
128 – 136	6
137 – 145	10
146 – 154	11
155 – 163	5
164 – 172	3
173 – 181	2

Buatlah histogram, ogif positif, ogif negatif dari data di atas.

5. Perhatikan data pada tabel berikut.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
50 – 54	21
55 – 59	25
60 – 64	20
65 – 69	15
70 – 74	9
75 – 70	7
80 – 84	3

Tentukan ukuran pemusatan berikut.

a. Mean
b. Median
c. Modus

Bab II

Peluang

Sumber: *www.fotosearch.com*

Motivasi

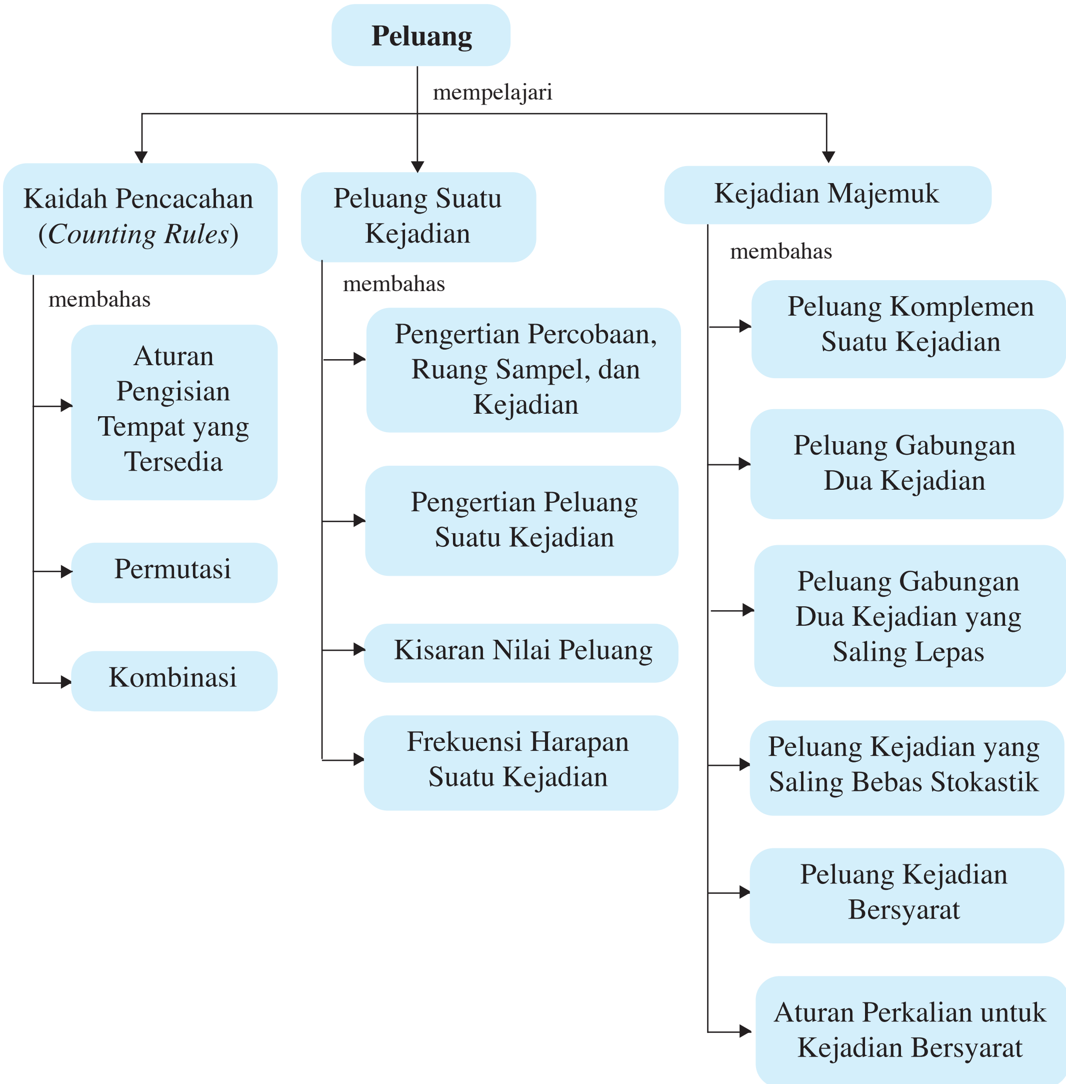
Kalian tentu pernah menyaksikan pertandingan sepak bola, baik *event* lokal, nasional, atau bahkan internasional. Sebelum pertandingan dimulai, jika kalian perhatikan, biasanya wasit (*referee*) melemparkan koin disaksikan oleh kapten masing-masing kesebelasan. Jika sisi tertentu yang muncul maka kesebelasan yang ditentukan yang akan menguasai bola pertama kali. Menurutmu, dalam hal ini, apakah setiap tim akan berpeluang sama? Kasus ini merupakan salah satu contoh aplikasi peluang yang sering kalian jumpai.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menggunakan aturan perkalian;
2. menggunakan aturan permutasi;
3. menggunakan aturan kombinasi;
4. menentukan banyak kemungkinan kejadian dari berbagai situasi;
5. menentukan ruang sampel suatu percobaan acak;
6. menentukan peluang kejadian dari berbagai situasi;
7. memberi tafsiran peluang kejadian dari berbagai situasi;
8. menentukan peluang komplemen suatu kejadian;
9. menggunakan aturan penjumlahan dalam peluang kejadian majemuk;
10. menggunakan aturan perkalian dalam peluang kejadian majemuk.

Peta Konsep



Kata Kunci

- frekuensi harapan
- gabungan kejadian A dan B
- irisan kejadian A dan B
- kejadian
- kejadian saling lepas
- kejadian saling bebas stokastik
- kejadian bersyarat
- kombinasi
- peluang
- percobaan
- permutasi
- ruang sampel

(a) Blaise Pascal
(1623–1662)

(b) Pierre de Fermat
(1601– 1665)

Sumber:
www.cygo.com
Gambar 2.1

Sebelum mengetahui lebih lanjut tentang peluang, ada lebih baiknya jika kalian mengetahui sejarahnya terlebih dahulu.Ilmu hitung peluang sesungguhnya telah digunakan oleh manusia sejak zaman kuno. Namun, penelitiannya baru dilakukan secara sungguh-sungguh oleh para ahli matematika pada pertengahan abad ke-17. Pada awalnya, pemakaian ilmu hitung peluang banyak diwarnai oleh segi buruknya. Ketika itu para penjudi melakukan penyelidikan guna memperoleh informasi tersembunyi agar memenangkan permainan kartu. Akan tetapi, ”analisis cerdik” mereka mengenai persoalan tersebut sebagian besar telah dilupakan orang. Ilmu hitung peluang yang dewasa ini dikemukakan oleh tiga orang Prancis, yaitu bangsawan kaya Chevalier de Mere dan dua ahli matematika *Blaise Pascal* serta *Pierre de Fermat*.

Pada tahun 1652, de Mere bertemu dengan Pascal dalam suatu perjalanan. Untuk memperoleh bahan pembicaraan yang menarik, de Mere yang bersemangat dalam hal duniawi, menyodorkan sejumlah persoalan matematis. Soal yang diajukan de Mere itu di antaranya adalah cara membagi hasil taruhan permainan dadu yang harus berhenti di tengah-tengah permainan. Pascal membawa pulang persoalan tersebut dan bekerja sama dengan Fermat memikirkannya selama lebih kurang dua tahun. Dari hasil penelitian inilah, muncul ilmu hitung peluang yang dikenal sampai sekarang.

Dalam perkembangannya, ilmu hitung peluang telah memperoleh kedudukan yang jauh lebih tinggi daripada kedudukannya semula. Peranannya pun semakin dirasakan oleh masyarakat luas. Konsep-konsep hitung peluang pernah kalian pelajari di SMP, seperti pengertian peluang, kisaran nilai peluang, dan frekuensi harapan. Pengertian-pengertian tersebut akan diperluas dalam pokok bahasan ini.

Uji Prasyarat **Kerjakan di buku tugas**

1. Apa yang dimaksud dengan peluang dan frekuensi harapan?
2. Misalnya kamu melemparkan dua buah dadu bersamaan. Bagaimanakah ruang sampelnya?
3. Misalkan sebuah dadu ditos sebanyak 10 kali, tentukan peluang muncul bilangan prima dan frekuensi harapannya.

Setelah kalian benar-benar mampu menjawab soal prasyarat, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Kaidah Pencacahan (*Counting Rules*)

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering menjumpai permasalahan menentukan atau menghitung banyaknya hasil yang mungkin dari suatu percobaan. Misalnya, dalam pemilihan pengurus kelas seperti pada ilustrasi berikut.

Dalam suatu kelas akan diadakan pemilihan ketua dan sekretaris kelas. Setelah melalui rapat kelas disepakati calon ketua kelasnya adalah Andi dan Agung, sedangkan calon sekretarisnya adalah Anita, Ratna, dan Yunita. Ada berapa banyak susunan pengurus kelas yang dapat dibentuk dari kelima calon tersebut?

Untuk memperoleh semua susunan atau cara yang mungkin terjadi dari suatu peristiwa seperti pada contoh di atas, dapat digunakan diagram pohon, tabel, dan pasangan berurutan sebagai berikut.

Sumber: *Dokumen Penerbit*

Gambar 2.2

Dengan Diagram Pohon

Perhatikan kembali kasus pemilihan pengurus kelas yang terdiri atas ketua kelas dan sekretaris kelas. Pada pemilihan itu, terdapat calon ketua kelas, yaitu Andi dan Agung, sedangkan calon sekretaris yaitu Anita, Ratna, dan Yunita. Pemilihan ini dapat diselesaikan melalui diagram pohon.

	Calon Ketua	Calon Sekretaris	Calon Pengurus
O	Andi	Anita	(Andi, Anita)
		Ratna	(Andi, Ratna)
		Yunita	(Andi, Yunita)
	Agung	Anita	(Agung, Anita)
		Ratna	(Agung, Ratna)
		Yunita	(Agung, Yunita)

Misalkan O adalah objek percobaan, yaitu lima calon pengurus. Dari kelima calon tersebut dapat dibentuk diagram pohon sebagai berikut.

Dari diagram pohon tersebut, tampak bahwa terdapat enam pasangan calon ketua dan sekretaris, yaitu pasangan (Andi, Anita), pasangan (Andi, Ratna), pasangan (Andi, Yunita), pasangan (Agung, Anita), pasangan (Agung, Ratna), dan pasangan (Agung, Yunita). Keenam pasangan calon ketua dan sekretaris tersebut merupakan hasil-hasil percobaan.

Dengan Tabel

Dalam sebuah tabel, kelompok pertama (calon ketua) dimasukkan pada kolom paling kiri, sedangkan kelompok kedua (calon sekretaris) dimasukkan pada baris paling atas. Pasangan calon yang mungkin terjadi dapat diperoleh dengan memasangkan anggota-anggota kolom paling kiri dengan baris paling atas sebagai berikut.

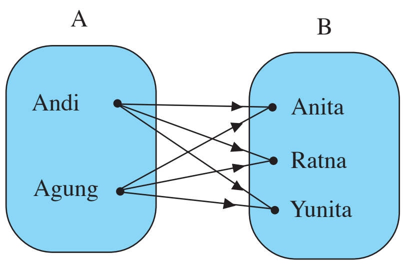
Tabel 2.1

Calon Ketua	Calon Sekretaris		
	Anita	Ratna	Yunita
Andi	(Andi, Anita)	(Andi, Ratna)	(Andi, Yunita)
Agung	(Agung, Anita)	(Agung, Ratna)	(Agung, Yunita)

Dari tabel di atas, diperoleh pasangan calon ketua dan sekretaris seperti apabila dilakukan dengan diagram pohon.

Dengan Pasangan Berurutan

Pasangan berurutan merupakan suatu cara menuliskan anggota-anggota dua himpunan yang dipasangkan, anggota pertama pasangan itu berasal dari himpunan yang pertama dan anggota kedua berasal dari himpunan yang kedua. Misalkan A adalah himpunan calon ketua maka A = {Andi, Agung}, sedangkan B adalah himpunan calon sekretaris maka B = {Anita, Ratna, Yunita}. Pemasangan setiap anggota himpunan A dengan setiap anggota himpunan B tampak dalam diagram berikut.



Gambar 2.3

Dengan pasangan berurutan, pemasangan pada diagram di samping adalah sebagai berikut.

(Andi, Anita) (Andi, Ratna) (Andi, Yunita)
(Agung, Anita) (Agung, Ratna) (Agung, Yunita).

Jadi, ada 6 pasang calon pengurus kelas yang mungkin terjadi.

Banyaknya cara yang terjadi dari suatu peristiwa dapat ditentukan dengan menghitung seluruh susunan yang mungkin terjadi seperti pada contoh di atas. Kita dapat menggunakan aturan yang lebih praktis, yaitu *kaidah pencacahan*. Dalam kaidah ini, ada beberapa cara yang dapat digunakan, antara lain

1. *aturan pengisian tempat yang tersedia* (*filling slots*);
2. *permutasi*;
3. *kombinasi*.

1. Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia (*Filling Slots*)

Cobalah kalian perhatikan kembali pemilihan pengurus kelas pada ilustrasi di atas. Dalam ilustrasi tersebut, terdapat 2 jabatan yang harus diisi, yaitu ketua dan sekretaris. Adapun calon ketua ada 2 orang, yaitu Andi dan Agung, sedangkan calon sekretaris ada 3 orang, yaitu Anita, Ratna, dan Yunita. Dengan diagram pohon, dengan tabel maupun dengan pasangan berurutan dapat ditentukan bahwa terdapat 6 pasangan calon ketua dan sekretaris yang mungkin dibentuk.

Untuk menentukan banyaknya pasangan calon ketua dan sekretaris dengan aturan pengisian tempat yang tersedia, 2 jabatan, yaitu ketua dan sekretaris dianggap sebagai dua tempat yang tersedia. Dalam hal ini terdapat 2 calon yang akan mengisi calon ketua dan 3 calon yang akan mengisi calon sekretaris. Banyaknya pasangan calon ketua dan sekretaris yang mungkin dibentuk adalah $2 \times 3 = 6$ pasangan. Perhatikan penjelasan berikut.

Tempat I Ketua		Tempat II Sekretaris		Pasangan calon
2 Calon	$\times$	3 Calon	$\rightarrow$	$2 \times 3 = 6$

Selanjutnya, misalkan dalam pemilihan calon pengurus kelas ada 3 jabatan yang harus diisi, yaitu ketua, sekretaris, dan bendahara. Jika jabatan ketua ada 3 calon, sekretaris ada 4 calon, dan bendahara ada 2 calon maka banyak susunan calon pengurus yang mungkin dibentuk adalah $3 \times 4 \times 2 = 24$ susunan calon pengurus. Hasil ini dapat kalian cek kebenarannya dengan menggunakan diagram pohon.

Kaidah dasar yang digunakan dalam membilang atau mencacah adalah sebagai berikut.

> Misalnya, kegiatan pertama dapat dilakukan dengan n_1 cara yang berlainan, kegiatan kedua dengan n_2 cara yang berlainan, kegiatan ketiga dengan n_3 cara yang berlainan, ..., dan kegiatan ke-r dengan n_r cara yang berlainan. Banyaknya cara untuk melakukan r kegiatan itu adalah
>
> $(n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r)$ cara.

Prinsip atau kaidah membilang di atas dapat dinyatakan dalam bentuk lain sebagai berikut. Jika tersedia r tempat dengan
n_1 cara untuk mengisi tempat pertama,
n_2 cara untuk mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi,
n_3 cara untuk mengisi tempat ketiga setelah tempat pertama dan kedua terisi,
...
n_r cara untuk mengisi tempat yang ke-r setelah tempat pertama, kedua, ketiga, ..., dan ke-$(r - 1)$ terisi, banyaknya cara untuk mengisi r tempat yang tersedia itu adalah
$(n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r)$ cara.

Prinsip dasar membilang inilah yang disebut *aturan pengisian tempat yang tersedia (filling slots)*. Agar lebih memahami pengertian ini, perhatikan contoh-contoh berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dari angka 3, 5, 6, 7, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri atas tiga angka yang berbeda. Di antara bilangan-bilangan tersebut yang nilainya kurang dari 400 ada ... bilangan.

a. 16
b. 12
c. 10
d. 8
e. 6

Soal UMPTN, Matematika Dasar, 1997

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

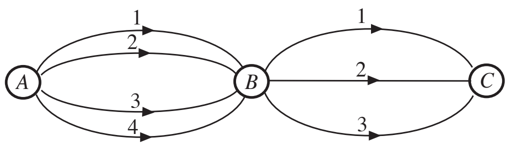
Misalnya terdapat 4 jalur bus dari Kota *A* ke *B* dan 3 jalur bus dari kota *B* ke *C*. Banyak cara seseorang yang melakukan perjalanan dari Kota *A* ke *C* melalui Kota *B* menggunakan bus adalah ....

a. 4
b. 7
c. 12
d. 64
e. 81

Contoh:

Jalan yang dapat ditempuh dari Kota A ke Kota B sebanyak 4 jalan, sedangkan jalan yang dapat ditempuh dari Kota B ke Kota C sebanyak 3 jalan. Berapa banyak jalan berbeda yang dapat ditempuh dari Kota A ke Kota C?

Penyelesaian:



Gambar 2.4

Masalah di atas dapat digambarkan dengan diagram di samping. Tampak bahwa jalan dari Kota A ke Kota B ada 4, sedangkan jalan dari Kota B ke Kota C ada 3. Oleh karena itu, menurut aturan pengisian tempat yang tersedia banyaknya jalan dari Kota A ke Kota C adalah $4 \times 3 = 12$.

Problem Solving

Disediakan angka-angka 3, 4, 5, 6, 7, dan 8. Berapa banyak bilangan bulat yang dapat dibentuk jika bilangan itu terdiri dari 4 angka dan

a. setiap bilangan tidak memuat angka yang sama;
b. setiap bilangan boleh memuat angka yang sama.

Penyelesaian:

a. Karena setiap bilangan tidak boleh memuat angka yang sama, angka pertama (sebagai ribuan) dapat dipilih dengan 6 cara, yaitu angka-angka 3, 4, 5, 6, 7, dan 8. Angka kedua (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 5 cara karena satu angka telah dipilih sebagai angka pertama. Kemudian, angka ketiga (sebagai puluhan) dapat dipilih dengan 4 cara dan angka keempat (sebagai satuan) dengan 3 cara. Hal ini dapat dijelaskan dengan tabel berikut.

Tabel 2.2

Bilangan	Ribuan	Ratusan	Puluhan	Satuan
Banyak Bilangan	6	5	4	3

Jadi, banyak bilangan yang terdiri atas 4 angka berbeda yang dapat dibentuk dari angka-angka 3, 4, 5, 6, 7, dan 8 ada $6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$ bilangan.

b. Karena setiap bilangan boleh memuat angka yang sama maka masing-masing ada enam cara untuk menempati tempat pertama, kedua, ketiga, dan keempat. Jadi, banyaknya bilangan yang dapat dibentuk ada $6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1.296$ bilangan.

Soal Terbuka

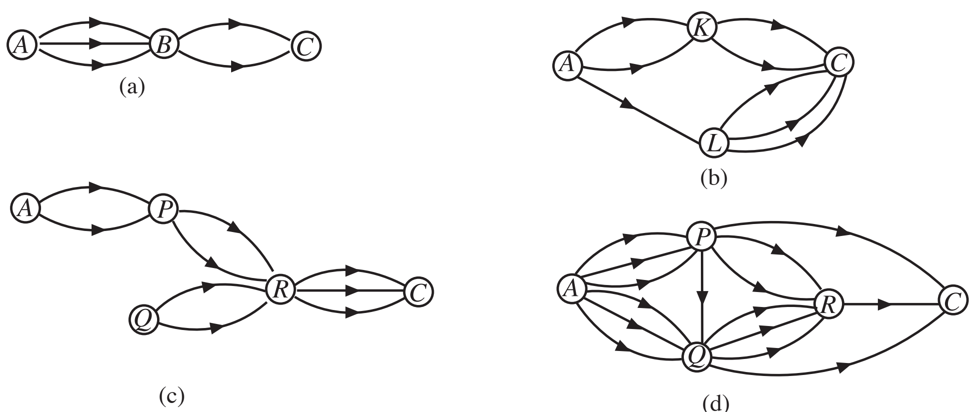
Kerjakan di buku tugas

1. Disediakan angka-angka 3, 4, 5, 6, dan 7. Berapa banyak bilangan 4 angka yang dapat dibentuk jika setiap bilangan tidak memuat angka yang sama dan bilangan itu
   a. bilangan ganjil;
   b. habis dibagi 5;
   c. lebih besar dari 500?
2. Dalam sebuah permainan, setiap peserta diberi tugas menyusun 3 huruf berbeda dari huruf *K*, *E*, *N*, *A*, *R*, dan *I*. Peserta dianggap menang apabila dapat membuat susunan huruf sebanyak-banyaknya dalam rentang waktu yang telah ditentukan. Berapa banyak susunan huruf yang dapat dibentuk apabila susunan itu
   a. diakhiri dengan huruf vokal;
   b. diakhiri dengan huruf konsonan?

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Bu Ani memiliki 5 setel baju pesta dan 6 sepatu. Berapa banyak pasangan baju pesta dan sepatu yang dapat dipakai Bu Ani?
2. Di dalam lemari Arman terdapat 6 baju, 4 celana panjang, dan 2 pasang kaus kaki. Ada berapa pasang baju, celana panjang, dan kaus kaki yang dapat dipakai Arman?
3. Dari Kota *P* ke Kota *Q* terdapat 5 jalan berbeda yang dapat ditempuh dan dari Kota *Q* ke Kota *R* terdapat 3 jalan. Berapa banyak jalan berbeda yang dapat ditempuh dari Kota *P* ke Kota *R*?
4. Tentukan banyaknya jalan berbeda yang dapat ditempuh dari Kota *A* ke Kota *C* jika jalur perjalanan itu tergambar pada diagram berikut. (Perjalanan sesuai arah anak panah).



Gambar 2.5

5. Disediakan angka-angka 6, 7, 8, dan 9. Berapa banyak bilangan ratusan yang dapat dibentuk jika setiap bilangan tidak memuat angka yang sama dan bilangan itu
   a. bilangan genap;
   b. lebih kecil dari 800;
   c. lebih besar dari 800?
6. Kerjakan soal nomor 5, tetapi setiap bilangan boleh memuat angka yang sama.
7. Berapa banyak bilangan bulat positif lebih kecil dari 600 yang dapat disusun dari angka-angka 4, 5, 6, 7, dan 8 jika bilangan itu tidak memuat angka yang sama?
8. Pada suatu pilihan pengurus RT disyaratkan seorang ketua harus berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun, sekretaris harus berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun, dan bendahara boleh berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun atau berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun. Berapa banyak susunan calon pengurus RT yang dapat dibentuk jika pada pemilihan itu terdapat
   a. 3 berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun dan 4 berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun;
   b. 4 berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun dan 3 berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun;
   c. 5 berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun dan 2 berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun;
   d. 1 berumur antara 35 sampai dengan 45 tahun dan 6 berumur antara 25 sampai dengan 34 tahun?

2. Permutasi

Kaidah pencacahan yang kedua adalah permutasi yang dalam menuliskan rumusnya menggunakan notasi faktorial. Oleh karena itu, sebelum mempelajari permutasi, ada baiknya jika kita membahas definisi dan notasi faktorial.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dalam babak penyisihan suatu turnamen, 25 pecatur satu sama lain bertanding satu kali. Banyaknya pertandingan yang terjadi adalah ....

a. 150 d. 270
b. 180 e. 300
c. 200

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

a. Definisi dan Notasi Faktorial

Perhatikan penulisan "*5!*" dan "*4!*", yang masing-masing dibaca "*5 faktorial*" dan "*4 faktorial*". Penulisan tersebut merupakan penulisan dengan notasi faktorial. Adapun nilainya adalah sebagai berikut.

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \text{ dan } 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Berarti, $5! = 5 \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)$

$\Leftrightarrow \quad 5! = 5 \times 4!$

$\Leftrightarrow (4 + 1)! = (4 + 1) \times 4!$

Secara umum dapat dikatakan bahwa

$(n + 1)! = (n + 1)\, n!$, untuk $n \geq 1$
dan $n! = n(n - 1)(n - 2)(n - 3) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$

Perhatikan bahwa sebenarnya $n = 0$ tidak memenuhi konsep faktorial, namun karena dalam perhitungan sering ditemui, dan selalu benar jika $0! = 1$, agar tidak menjadi polemik, kemudian didefinisikan bahwa

$$0! = 1$$

Contoh:

1. Tentukan nilai-nilai berikut.
   a. $2! \times 3!$
   b. $\dfrac{10!}{6!}$

   Penyelesaian:
   a. $2! \times 3! = (2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1) = 2 \times 6 = 12$
   b. $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!}$
   $= 10 \times 9 \times 8 \times 7$
   $= 5.040$
2. Nyatakan bentuk perkalian berikut dengan notasi faktorial.
   a. 13×12
   b. $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10$
   c. 6×5
   d. 3×5

   Penyelesaian:
   a. $13 \times 12 = \dfrac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times ... \times 3 \times 2 \times 1}{11 \times 10 \times 9 \times ... \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{13!}{11!}$
   b. $15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10$
   $= \dfrac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times ... \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times ... \times 2 \times 1} = \dfrac{15!}{9!}$
   c. $6 \times 5 = \dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{6!}{4!}$
   d. $3 \times 5 = \dfrac{(3 \times 2 \times 1) \times (5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)}{(2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1)} = \dfrac{3! \times 5!}{2! \times 4!}$

Tugas Berpikir Kritis **Kerjakan di buku tugas**

Misalkan $a \geq 1$. Bagaimana cara menentukan nilai a yang memenuhi persamaan $a! = a$? Coba kalian selesaikan.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai dari:

   a. $\dfrac{9!}{7! \times 3!}$ c. $\dfrac{10! \times 0!}{8!}$ e. $\dfrac{30!}{26! \times 4!}$

   b. $\dfrac{6! \times 2!}{3! \times 4!}$ d. $\dfrac{11!}{5! \times 3!}$ f. $6! \times \dfrac{20!}{17! \times 3!}$

2. Nyatakan bentuk-bentuk perkalian dan pembagian berikut dalam notasi faktorial.

   a. $10 \times 11 \times 12$ d. $40 \times 39 \times 38$

   b. $\dfrac{15 \times 14}{3 \times 2 \times 1}$ e. $28 \times 27 \times 26 \times 25$

   c. $\dfrac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{2 \times 3 \times 4}$ f. $\dfrac{50 \times 51}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

3. Nyatakan bentuk-bentuk perkalian dan pembagian berikut dalam notasi faktorial.

   a. $\dfrac{n}{(n-1)(n-2)}$ c. $\dfrac{(n+4)(n+3)}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$

   b. $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2 \times 3 \times 4}$ d. $(n-2)(n-1)n$

4. Sederhanakan.

   a. $\dfrac{n!}{(n-3)!}, n \geq 3$ c. $\dfrac{(n-4)!}{(n-6)!}, n \geq 6$

   b. $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ d. $\dfrac{(n+2)!}{(n-1)!}, n \geq 1$

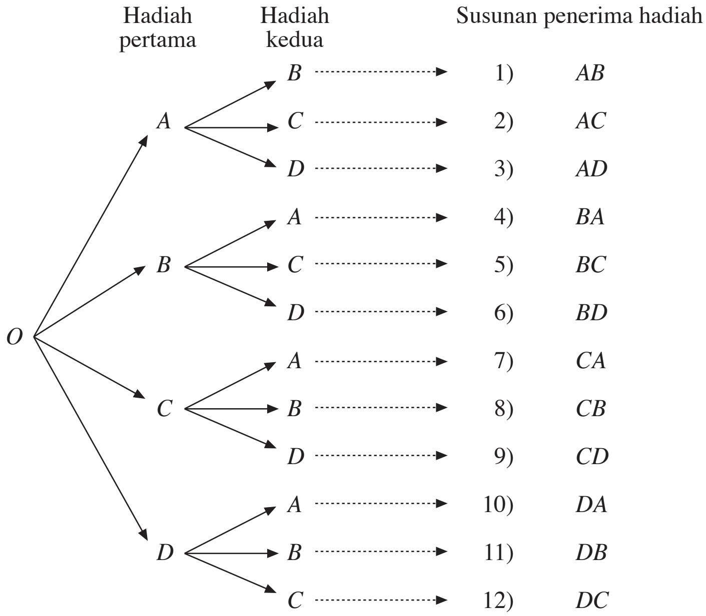
5. Tentukan nilai n yang memenuhi persamaan-persamaan berikut.

   a. $\dfrac{(n+2)!}{n!} = 72$ b. $\dfrac{(n-3)!}{(n-1)!} = 132$

b. Definisi dan Notasi Permutasi dari Unsur-Unsur yang Berbeda

Misalkan terdapat 4 orang peserta lomba yang akan memperebutkan hadiah pertama sebuah televisi berwarna dan hadiah kedua sebuah kipas angin. Ada berapa cara hadiah dapat diberikan jika peserta terundi pertama berhak atas hadiah pertama dan yang terundi kedua berhak atas hadiah kedua?

Dari ilustrasi tersebut objek percobaannya adalah 4 peserta lomba misalkan $O = \{A, B, C, D\}$ dan pengundian untuk menentukan pemenang disebut cara percobaan. Adapun hasil-hasil percobaan dapat digambarkan dalam diagram pohon berikut.



Dari diagram tersebut tampak bahwa terdapat 12 susunan penerima hadiah atau dalam hal ini dikatakan sebagai banyaknya cara hadiah dapat diberikan, yaitu {*AB*, *AC*, *AD*, *BA*, *BC*, *BD*, *CA*, *CB*, *CD*, *DA*, *DB*, *DC*}. Dengan diagram pohon selain dapat mengetahui banyaknya cara hadiah dapat diberikan, juga dapat mengetahui susunan penerima hadiah. Apabila kalian perhatikan dengan saksama dalam masalah tersebut, susunan *AB* dibedakan dengan susunan *BA*. Susunan *AB* berarti *A* penerima hadiah pertama dan *B* penerima hadiah kedua, sedangkan susunan *BA* berarti *B* penerima hadiah pertama dan *A* penerima hadiah kedua. Jadi, dalam hal ini perhitungan susunan dengan memerhatikan urutan.

Selanjutnya, dengan menggunakan aturan pengisian tempat yang tersedia, kalian juga dapat menentukan banyak cara hadiah dapat diberikan, tetapi tidak dapat mengetahui susunan penerima hadiah dan diperoleh hasil sebagai berikut.

Hadiah pertama (Tempat I)	Hadiah kedua (Tempat II)		Banyaknya susunan penerima hadiah (banyaknya cara hadiah dapat diberikan)
4 peserta sayembara	3 peserta sayembara	→	$4 \times 3 = 12$

Keterangan:
Tempat I, ada 4 peserta sebab untuk mendapatkan penerima hadiah pertama semua peserta masih diikutkan dalam undian. Tempat II, ada 3 peserta sebab sudah diperoleh penerima hadiah pertama, berarti tinggal 3 peserta yang diikutkan dalam undian untuk menerima hadiah kedua.

Banyaknya cara hadiah dapat diberikan adalah 12 cara, yang diperoleh dari nilai 4 × 3, sedangkan

$$4 \times 3 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= \frac{4!}{2!}$$

$$= \frac{4!}{(4-2)!}$$

yang merupakan banyaknya permutasi 2 unsur dari 4 unsur yang berbeda.

Secara umum, *permutasi r unsur dari n unsur yang berbeda* adalah semua urutan berbeda yang mungkin dari r unsur, diambil dari n unsur yang berbeda itu dengan memerhatikan urutannya. Pada buku ini, banyaknya permutasi r unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda ini dinotasikan dengan $P(n, r)$. Jadi, dari uraian di atas diperoleh bahwa

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Khusus untuk $r = n$, diperoleh $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai n yang memenuhi persamaan $2P(n, 2) = P(2n, 2) - 50$ adalah ....
a. –5
b. 5
c. –5 atau 5
d. 10
e. 25

Contoh:

1. Dengan rumus permutasi, tentukan nilai dari
   a. $P(8, 6)$ b. $P(4, 2) \times P(5, 3)$

Penyelesaian:

a. $P(8, 6) = \frac{8!}{(8-6)!} = \frac{8!}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$

$$= \frac{40.320}{2} = 20.160$$

b. $P(4, 2) \times P(5, 3) = \frac{4!}{(4-2)!} \times \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{4!}{2!} \times \frac{5!}{2!}$

$$= 12 \times 60 = 720$$

2. Berapakah banyaknya permutasi 2 unsur dari huruf *A*, *B*, dan *C*.

Penyelesaian:

Dengan rumus permutasi

Permutasi 2 unsur dari 3 unsur yang berlainan adalah

$$P(3, 2) = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1} = 6$$

Problem Solving

Dalam suatu pemilihan pengurus kelas akan dipilih seorang ketua kelas, seorang wakil ketua kelas, seorang sekretaris, dan seorang bendahara. Calon yang tersedia sebanyak 6 orang dan masing-masing mempunyai kemungkinan yang sama untuk menduduki salah satu jabatan tersebut. Berapa banyak susunan pengurus kelas yang dapat dibentuk?

Penyelesaian:

Susunan pengurus kelas yang dapat dibentuk pada soal di atas merupakan permutasi 4 unsur (jabatan pengurus kelas) dari 6 unsur yang tersedia (banyaknya calon). Oleh karena itu, banyaknya susunan yang mungkin adalah

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1}$$

$$= 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$$

Jadi, banyaknya susunan pengurus kelas yang dapat dibentuk adalah 360 susunan.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai permutasi berikut ini.

   a. $P(7, 3)$

   b. $P(5, 2)$

   c. $P(16, 6) \times P(14, 5)$

   d. $\dfrac{P(6, 2) \times P(7, 3)}{P(8, 2)}$

   e. $P(16, 6) \times P(14, 5)$

   f. $\dfrac{P(5, 2) \times P(5, 3)}{P(6, 4)}$

2. Tentukan banyak bilangan ratusan yang dapat disusun dari angka-angka berikut dengan ketentuan setiap bilangan tidak memuat angka yang sama.

   a. 3, 7, 8, 9

   b. 1, 2, 5, 8, 9

   c. 1, 2, 3, 4, 5, 6

   d. 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

   e. 2, 6, 8, 9

   f. 1, 3, 7, 8, 9

3. Tentukan banyak bilangan antara 1.000 dan 10.000 yang dapat disusun dari angka-angka pada soal nomor 2 dengan ketentuan setiap bilangan boleh memuat angka yang sama.

4. Tentukan nilai n jika diketahui:
   a. $P(n + 2, n) = 60$;
   b. $\dfrac{P(n + 4, n+2)}{P(n + 2, n)} = 42$.
5. Pada suatu rapat organisasi kepemudaan akan disusun pengurus yang terdiri atas ketua, sekretaris, dan bendahara. Jika terdapat 7 orang calon yang layak untuk dipilih, berapa banyak susunan pengurus yang mungkin dapat dibentuk?
6. Berapa banyak cara 12 orang untuk duduk pada suatu tempat yang hanya dapat diduduki oleh 3 orang?

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Jika terdapat 10 lampu berlainan warna yang akan dipasang pada 4 buah *fitting*, tentukan banyaknya susunan lampu yang mungkin.
2. Dalam suatu kejuaraan bulu tangkis dunia, terdapat 16 finalis yang akan memperebutkan juara I, II, dan III. Tentukan banyaknya susunan juara I, II, dan III yang dapat terjadi.

c. Permutasi dengan Beberapa Unsur yang Sama

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mempelajari permutasi dari unsur-unsur yang berbeda. Kemudian, pada bagian ini kita akan mempelajari permutasi dengan beberapa unsur yang sama. Sebelumnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Dengan berapa cara kita dapat menyusun huruf-huruf pada kata-kata berikut?

a. *SUKA* b. *SAMA* c. *ASAA*

Penyelesaian:

a. Huruf-huruf pada kata *SUKA* dapat disusun menjadi *SUKA, SUAK*, *SKUA*, *SKAU*, *SAUK*, *SAKU*, *USKA*, *USAK*, *UKSA*, *UKAS*, *UASK*, *UAKS*, *KUSA*, *KUAS*, *KSUA*, *KSAU*, *KAUS*, *KASU*, *AUKS*, *AUSK*, *AKUS*, *AKSU*, *ASUK*, dan *ASKU*.
   Jadi, terdapat 24 susunan huruf berbeda dari kata *SUKA*.
b. Huruf-huruf pada kata *SAMA* dapat disusun menjadi: *SAMA*, *SAAM*, *SMAA*, *ASMA*, *AMSA*, *ASAM*, *AMAS*, *AASM*, *AAMS*, *MAAS*, *MASA*, dan *MSAA*
   Jadi, terdapat 12 susunan huruf berbeda dari kata *SAMA*.
c. Huruf-huruf pada kata *ASAA* dapat disusun menjadi *ASAA*, *AAAS*, *SAAA*, dan *AASA*.
   Jadi, terdapat 4 susunan huruf berbeda dari kata *ASAA*.

Dari contoh di atas, meskipun sama-sama dibentuk dari kata yang terdiri atas 4 huruf, banyaknya susunan yang dapat dibentuk berbeda. Hal ini disebabkan kata *SAMA* dan *ASAA* terdapat huruf yang sama, yaitu huruf *A*.

Misalkan kedua huruf A pada kata *SAMA* diberi indeks 1 dan 2 sehingga diperoleh 4 unsur yang berbeda, yaitu S, A_1, M, dan A_2. Banyaknya permutasi dari 4 unsur yang berbeda ada $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Akan tetapi, permutasi-permutasi itu dapat dibuat menjadi beberapa kelompok dengan menghilangkan indeksnya, seperti:

1) kelompok SA_1MA_2 dan SA_2MA_1, jika indeks dihilangkan, diperoleh permutasi *SAMA*;
2) kelompok SA_1A_2M dan $SA_2A_1M_1$, jika indeks dihilangkan, diperoleh permutasi *SAAM*;
3) kelompok SMA_1A_2 dan SMA_2A_1, jika indeks dihilangkan, diperoleh permutasi *SMAA*;
4) Kelompok A_1SA_2M dan A_2SA_1M, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *ASAM*;
5) Kelompok A_1A_2SM dan A_2A_1SM, jika indeks dihilangkan diperoleh pemutasi *AASM*;
6) Kelompok MA_1SA_2 dan MA_2SA_1, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *MASA*;
7) Kelompok MA_1A_2S dan MA_2A_1S, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *MAAS*;
8) Kelompok A_1A_2MS dan A_2A_1MS, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *AAMS*;
9) Kelompok MSA_1A_2 dan MSA_2A_1, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *MSAA*;
10) Kelompok A_1SMA_2 dan A_2SMA_1, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *ASMA*;
11) Kelompok A_1MSA_2 dan A_2MSA_1, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *AMSA*;
12) Kelompok A_1MA_2S dan A_2MA_1S, jika indeks dihilangkan diperoleh permutasi *AMAS*.

Jadi, diperoleh 12 kelompok. Pada setiap kelompok terdapat $2! = 2$ permutasi yang menyatakan banyaknya permutasi dari unsur A_1 dan A_2. Jadi, kita dapat memperoleh hubungan permutasi 4 unsur yang tersedia dengan 2 unsur yang sama sebagai berikut.

Banyaknya unsur yang tersedia

$$P = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 12$$

Banyaknya unsur yang sama

Secara umum, banyaknya permutasi dengan unsur-unsur yang sama dapat dirumuskan sebagai berikut.

Banyaknya permutasi n unsur yang memuat k unsur ($k \leq n$) yang sama dirumuskan dengan

$$P = \frac{n\,!}{k\,!}$$

Rumus di atas dapat diperluas untuk beberapa jenis unsur yang sama sebagai berikut.

Banyaknya permutasi dari n unsur yang memuat n_1 unsur yang sama dari jenis ke-1, n_2 unsur yang sama dari jenis ke-2, ..., dan n_r unsur yang sama dari jenis ke-r ($n_1 + n_2 + ... + n_r \leq n$) dirumuskan dengan

$$P = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times ... \times n_r!}$$

Agar lebih memahami penggunaan rumus di atas, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Berapa banyak susunan huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf pada kata berikut?

a. *MATEMATIKA* b. *SURABAYA*

Penyelesaian:

a. Pada kata *MATEMATIKA* terdapat 10 huruf dengan 2 huruf *M*, 3 huruf *A*, dan 2 huruf *T*. Banyaknya susunan huruf yang dapat dibentuk adalah

$$P = \frac{10!}{2! \times 3! \times 2!} = 151.200.$$

b. Pada kata *SURABAYA* terdapat 8 huruf dengan 3 huruf *A*. Banyaknya susunan huruf yang dapat dibentuk adalah $P = \frac{8!}{3!} = 6.720$.

Uji Kompetensi 4

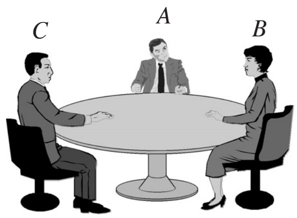
Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan banyak susunan huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf pada kata-kata berikut.
   a. *PANDAI*
   b. *KELELAWAR*
   c. *PERAYAAN*
2. Berapa banyak bilangan puluhan juta yang dapat dibentuk dari angka-angka berikut?
   a. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
   b. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
3. Berapa banyak bilangan antara satu juta dan sepuluh juta yang dapat dibentuk dari angka-angka berikut?
   a. 2, 2, 4, 7, 5, 5, 4
   b. 1, 1, 2, 1, 1, 2, 1
   c. 4, 3, 3, 4, 4, 2, 1
   d. 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2

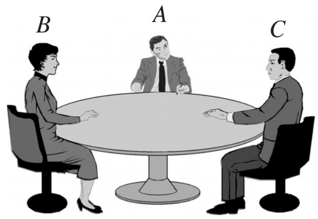
4. Disediakan huruf-huruf A, B, C, dan D. Selain itu, juga disediakan angka-angka 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.
   a. Berapa banyak susunan 4 karakter yang terdiri atas 2 angka dan 2 huruf? (karakter penyusun boleh berulang)
   b. Berapa banyak susunan 4 karakter yang terdiri atas 3 angka dan 1 huruf? (karakter penyusun tidak boleh berulang)
   c. Berapa banyak susunan 4 karakter yang terdiri atas 4 angka? (karakter penyusun boleh berulang)
   d. Berapa banyak susunan 4 karatker yang terdiri atas 4 angka? (karakter penyusun tidak boleh berulang)
   e. Berapa banyak susunan 6 karakter yang terdiri atas 2 angka dan 4 huruf? (huruf boleh berulang, tetapi angka tidak boleh berulang)
5. Dari sekumpulan huruf yang berjumlah 8 huruf, terdapat beberapa huruf S dan huruf-huruf lain yang semuanya berbeda. Jika kumpulan huruf itu dapat disusun ulang sebanyak 336 susunan huruf yang berbeda, berapa banyak huruf S pada kumpulan huruf tersebut?
6. Pada sebuah bilangan terdapat tiga angka 2 dan dua angka 5. Jika angka-angka pada bilangan tersebut dapat disusun ulang sebanyak 60 bilangan yang berbeda, terdiri atas berapa angka bilangan tersebut?

d. Permutasi Siklis

Misalkan terdapat tiga orang yang duduk pada kursi-kursi yang disusun melingkar mengelilingi sebuah meja bundar. Susunan cara duduk itu di antaranya dapat digambarkan seperti **Gambar 2.6**.



(a)



(b)

Gambar 2.6

Perhatikan **Gambar 2.6** (a). Susunan orang yang duduk pada gambar tersebut dapat dikatakan sebagai susunan dari ABC, BCA, atau CAB. Dengan demikian, susunan ABC, BCA, dan CAB pada dasarnya merupakan satu susunan yang sama. Kemudian, jika kita perhatikan **Gambar 2.6** (b), kita menjumpai susunan cara duduk yang dapat dibaca sebagai susunan ACB, atau CBA, atau BAC. Jadi, susunan duduk ACB, CBA, dan BAC adalah satu susunan yang sama. Secara keseluruhan, susunan duduk ketiga orang itu ada dua macam, yaitu

Susunan 1: ABC, BCA, dan CAB

Susunan 2: ACB, CBA, dan BAC

Penempatan unsur-unsur dalam permutasi seperti inilah yang disebut permutasi siklis. Jadi, *permutasi siklis* adalah permutasi yang disusun secara melingkar. Pada contoh di atas, banyaknya permutasi siklis dari 3 unsur, yaitu A, B, dan C ada $(3 - 1)! = 2! = 2$. Secara umum, banyaknya permutasi siklis dapat dihitung dengan rumus berikut.

Misalkan tersedia n unsur yang berbeda. Permutasi siklis dari n unsur itu ditulis dengan notasi $P_{\text{siklis}}(n)$ dan dirumuskan dengan

$$P_{\text{siklis}}(n) = \frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Contoh:

1. Suatu pertemuan dihadiri oleh 6 orang dan tempat duduk mereka disusun melingkar. Berapakah banyaknya susunan cara duduk yang mungkin?

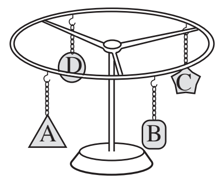
   Penyelesaian:

   Karena tempat duduk disusun melingkar, hal ini merupakan permutasi siklis sehingga banyaknya permutasi siklis dari 6 unsur tersebut adalah

   $P_{\text{siklis}}(6) = (6-1)! = 5! = 120$.

   Jadi, susunan cara duduk yang mungkin ada 120 cara.

2. Seorang pedagang gantungan kunci meletakkan dagangannya seperti pada **Gambar 2.7**. Berapa banyak cara pedagang itu meletakkan dagangannya?

   Gambar 2.7

   Penyelesaian:

   Cara pedagang itu meletakkan 4 macam dagangannya yang berupa gantungan kunci adalah permutasi siklis dari 4 unsur sehingga

   $$\begin{aligned} P_{\text{siklis}}(4) &= (4-1)! \\ &= 3! \\ &= 3 \times 2 \times 1 \\ &= 6 \end{aligned}$$

   Jadi, banyak cara pedagang itu meletakkan dagangannya ada 6 cara.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Banyak cara 4 siswa laki-laki dan 4 siswa perempuan dapat duduk mengelilingi sebuah meja bundar apabila setiap orang perempuan duduk di antara dua orang laki-laki.
2. Berapa banyak cara 10 orang dapat duduk pada sekeliling meja apabila ada 2 orang yang harus duduk selalu berdampingan?
3. Empat anak bernama Arma, Bunga, Cinta, dan Duta belajar bersama dengan duduk melingkar.
   a. Sebutkan semua susunan yang mungkin dari 4 anak tersebut.
   b. Tentukan banyaknya susunan tersebut.

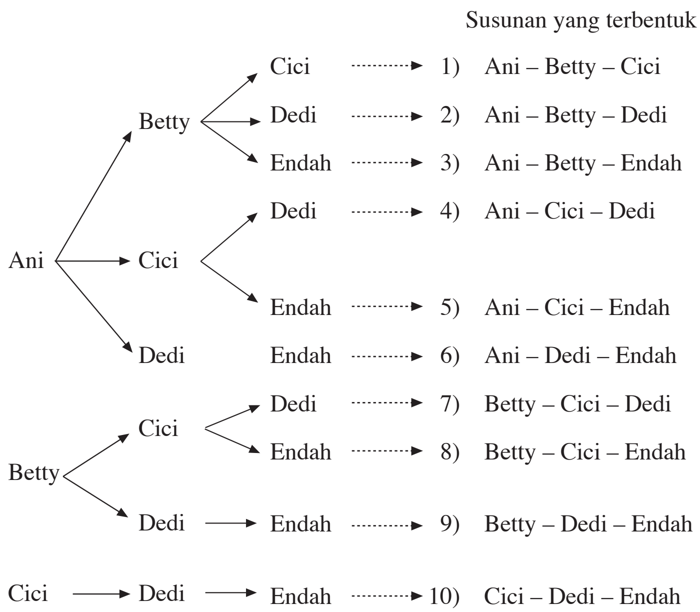
Uji Kompetensi 5 — *Kerjakan di buku tugas*

1. Dalam suatu rapat, 8 orang yang hadir duduk dengan posisi melingkar. Berapa banyak posisi duduk yang dapat terjadi?
2. Jika 6 biji permata yang berlainan warna disusun menjadi sebuah gelang, berapa banyak cara penyusunan keenam biji permata tersebut?
3. Pada sebuah permainan untuk anak-anak, masing-masing anak duduk sehingga membentuk lingkaran. Jika 11 anak ikut dalam permainan tersebut, berapa banyak susunan cara duduk anak-anak yang dapat terjadi?
4. Jika 5 orang bergandengan tangan membentuk lingkaran, berapa banyak susunan orang yang bergandengan tangan tersebut dapat terjadi?
5. Jika sembilan kunci ruangan diletakkan pada sebuah gantungan yang bentuknya lingkaran, berapa banyak cara meletakkan kunci pada gantungan itu?

3. Kombinasi

Misalkan terdapat 5 orang siswa, yaitu Ani, Betty, Cici, Dedi, dan Endah. Untuk mengikuti lomba cerdas cermat dipilih 3 orang dengan diseleksi. Berapa macam susunan yang mungkin dapat dibentuk dari 5 orang tersebut?

Dari ilustrasi tersebut objek percobaannya adalah 5 orang siswa, yaitu O = {Ani, Betty, Cici, Dedi, Endah} dan seleksi untuk menentukan 3 orang disebut cara percobaan. Adapun hasil-hasil percobaannya dapat digambarkan sebagai berikut.



Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Seorang murid diminta mengerjakan 5 dari 6 soal ulangan, tetapi soal 1 harus dipilih. Banyak pilihan yang dapat diambil murid tersebut adalah ....

a. 4
b. 5
c. 6
d. 10
e. 20

Soal UMPTN, Matematika Dasar, 1998

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sebuah panitia yang beranggota 4 orang akan dipilih dari kumpulan 4 pria dan 7 wanita. Bila dalam panitia tersebut diharuskan ada paling sedikit 2 wanita, maka banyaknya cara memilih ada ....

a. 1.008
b. 672
c. 330
d. 301
e. 27

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2001

Dari diagram tersebut tampak bahwa terdapat 10 susunan yang mungkin dibentuk untuk mengikuti lomba cerdas cermat. Apabila kalian perhatikan dengan saksama dalam masalah di atas, susunan Ani – Betty – Cici tidak dibedakan dengan susunan Ani – Cici – Betty atau Betty – Ani – Cici atau Betty – Cici – Ani atau Cici – Ani – Betty atau Cici – Betty – Ani. Karena dari keenam susunan tersebut yang terpilih tetap 3 orang, yaitu Ani, Betty, dan Cici. Jadi, dalam hal ini perhitungan susunan tidak memerhatikan urutan.

Banyaknya susunan yang terdiri atas 3 orang dipilih dari 5 orang tersebut selanjutnya dikenal sebagai banyaknya kombinasi 3 unsur yang diambil dari 5 unsur yang berbeda, ditulis $C(5, 3)$. Adapun nilainya dapat ditentukan sebagai berikut. Misalkan A : Ani, B : Betty, C : Cici, D : Dedi, dan E : Endah.

Macam Kombinasi	Elemen Kombinasi Dipermutasikan	Banyak Permutasi
ABC	$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA$	3!
ABD	$ABD, ADB, BAD, BDA, DAB, DBA$	3!
ABE	$ABE, AEB, BAE, BEA, EAB, EBA$	3!
ACD	$ACD, ADC, CAD, CDA, DAC, DCA$	3!
ACE	$ACE, AEC, CAE, CEA, EAC, ECA$	3!
ADE	$ADE, AED, DAE, DEA, EAD, EDA$	3!
BCD	$BCD, BDC, CBD, CDB, DBC, DCB$	3!
BCE	$BCE, BEC, CBE, CEB, EBC, ECB$	3!
BDE	$BDE, BED, DBE, DEB, EBD, EDB$	3!
CDE	$CDE, CED, DCE, DEC, ECD, EDC$	3!
$C(5, 3) = 10$	$P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$	$10 \times 3!$

Perhatikan bahwa
$$\begin{aligned} P(5, 3) &= 5 \times 4 \times 3 \\ &= 10 \times 3! \\ &= C(5, 3) \times 3! \end{aligned}$$

sehingga $C(5, 3) = \dfrac{P(5,3)}{3!}$ atau $\dfrac{\frac{5!}{(5-3)!}}{3!} = \dfrac{5!}{3! \times (5-3)!}$.

Secara umum, suatu *kombinasi r unsur dari n unsur yang berbeda* adalah semua susunan yang mungkin dari r unsur, diambil dari n unsur yang berbeda tanpa memperhatikan urutan. Pada buku ini banyaknya kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda ini dinotasikan dengan atau $C(n, r)$. Jadi, dari uraian di atas diperoleh bahwa $C(n, r) = \dfrac{n!}{r! \times (n-r)!}$. Dengan demikian, dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $C(n, r)$ menyatakan banyaknya kombinasi r elemen dari n elemen dan $C(n, 3) = 2n$, maka $C(2n, 7) = ...$

a. 160
b. 120
c. 116
d. 90
e. 80

Soal UMPTN, Kemampua Dasar, 1999

Banyaknya kombinasi r unsur dari n unsur ($r \leq n$) yang tersedia adalah

$$C(n, r) = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}.$$

Contoh:

Untuk keperluan lomba cerdas cermat, dipilih 3 siswa dari 5 calon yang ada, yaitu Ani, Betty, Dedi, Irfan, dan Wulan. Berapa macam susunan yang dapat dipilih dari 5 calon tersebut?

Penyelesaian:

Cara 1:

Persoalan memilih 3 siswa peserta lomba cerdas cermat ini adalah persoalan kombinasi, karena susunan Ani–Betty–Dedi sama dengan susunan Ani–Dedi–Betty (urutan tidak diperhatikan). Dengan cara membuat semua susunan yang dapat terjadi, kita memperoleh susunan sebagai berikut.

1. Ani–Betty–Dedi
2. Ani–Betty–Irfan
3. Ani–Betty–Wulan
4. Ani–Dedi–Irfan
5. Ani–Dedi–Wulan
6. Ani–Irfan–Wulan
7. Betty–Dedi–Irfan
8. Betty– Dedi–Wulan
9. Betty– Irfan–Wulan
10. Dedi–Irfan–Wulan

Jadi, terdapat 10 susunan.

Cara 2:

Dengan menggunakan rumus kombinasi, banyaknya susunan 3 unsur dari 5 unsur yang berlainan adalah

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3! \times (5-3)!} = \frac{5!}{3! \times 2!}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = 10 \text{ susunan.}$$

Problem Solving

Sebuah kantong berisi 6 kelereng berwarna merah dan 4 kelereng berwarna putih. Tiga kelereng diambil sekaligus secara acak. Berapa banyak cara pengambilan kelereng itu jika kelereng yang terambil adalah

a. ketiganya berwarna merah;
b. ketiganya berwarna putih;
c. dua berwarna merah dan satu berwarna putih;
d. satu kelereng berwarna merah;
e. warnanya bebas.

Penyelesaian:

a. Banyaknya cara pengambilan kelereng agar ketiganya berwarna merah adalah

$$C(6, 3) = \frac{6!}{3! \times (6-3)!} = \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 \text{ cara}$$

b. Banyaknya cara pengambilan kelereng agar ketiganya berwarna putih adalah

$$C(4, 3) = \frac{4!}{3! \times (4-3)!} = \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \text{ cara}$$

c. Banyaknya cara pengambilan kelereng agar terambil dua berwarna merah dan satu berwarna putih adalah

$$C(6, 2) \times C(4, 1) = \frac{6!}{2! \times (6-2)!} \times \frac{4!}{1! \times (4-1)!}$$

$$= \frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 60 \text{ cara}$$

d. Banyaknya cara pengambilan kelereng agar satu kelereng berwarna merah adalah

$$C(6, 1) \times C(4, 2) = \frac{6!}{1! \times (6-1)!} \times \frac{4!}{2! \times (4-2)!}$$

$$= \frac{6!}{1! \times 5!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= 6 \times 6 = 36 \text{ cara}$$

e. Banyaknya cara pengambilan kelereng tanpa memerhatikan warnanya (ketiganya berwarna bebas) adalah

$$C(10, 3) = \frac{10!}{3! \times (10-3)!}$$

$$= \frac{10!}{3! \times 7!} = 120 \text{ cara}$$

Soal Terbuka *Kerjakan di buku tugas*

1. Dari 12 siswa putra dan 10 siswa putri, akan dipilih 5 siswa putra dan 4 siswa putri untuk mengikuti suatu seminar. Tentukan banyaknya susunan peserta seminar yang mungkin.
2. Dua puluh siswa akan dikirim untuk mengikuti lomba gerak jalan. Mereka dipilih dari kelas X, kelas XI, dan kelas XII yang masing-masing terdiri atas 8, 7, dan 5 siswa. Jika dalam setiap kelas terdapat 30 siswa, tentukan banyak susunan peserta lomba gerak jalan yang mungkin.

3. Pada saat ulangan Matematika, siswa diminta mengerjakan 10 soal dari 15 soal yang disediakan dengan syarat 5 soal terakhir harus dikerjakan. Tentukan banyaknya kemungkinan pilihan yang dapat diambil oleh seorang siswa.

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai kombinasi-kombinasi berikut.
   a. $C(30, 3)$
   b. $C(46, 2)$
   c. $C(15, 3)$
   d. $C(20, 3)$
   e. $C(8, 4) \times C(12, 3)$
   f. $C(10, 2) : C(7, 4)$
2. Dari 9 soal yang disediakan pada suatu ulangan, seorang siswa harus mengerjakan beberapa soal tersebut. Tentukan banyaknya cara memilih soal tersebut jika setiap siswa wajib mengerjakan soal sebanyak
   a. 3 soal;
   b. 4 soal;
   c. 5 soal;
   d. 6 soal.
3. Setelah suatu pesta selesai, semua peserta yang hadir saling berjabat tangan. Berapa banyak jabat tangan yang terjadi jika peserta yang hadir sebanyak
   a. 15 orang;
   b. 30 orang;
   c. 40 orang;
   d. 60 orang?
4. Seorang tukang bordir ingin membuat bordiran yang terdiri atas beberapa macam warna. Tukang bordir itu membeli 10 macam warna benang bordir. Berapa banyak komposisi warna yang dapat terjadi jika setiap bordiran terdiri atas
   a. 3 warna;
   b. 4 warna;
   c. 5 warna;
   d. 6 warna?
5. Sejumlah siswa dipilih dari sebuah kelas yang terdiri atas 40 siswa untuk mengikuti sebuah seminar. Berapa banyak cara pemilihan tersebut jika peserta yang dikirim
   a. 1 orang;
   b. 2 orang;
   c. 4 orang;
   d. 5 orang?
6. Dua bola diambil dari sebuah kotak yang berisi 10 bola berwarna kuning, 8 bola berwarna biru, dan 6 bola berwarna merah. Tentukan banyaknya cara agar terambil
   a. dua bola berwarna merah;
   b. satu bola berwarna kuning dan satu bola berwarna biru;
   c. satu bola berwarna biru dan satu bola berwarna merah;
   d. dua bola berwarna biru;
   e. satu bola berwarna kuning dan satu bola berwarna merah;
   f. dua bola berwarna kuning.
7. Tiga kelereng diambil dari sebuah kotak yang berisi 5 kelereng berwarna biru dan 6 kelereng berwarna merah. Berapa banyak cara pengambilan tersebut jika yang terambil adalah
   a. semuanya berwarna biru;
   b. dua berwarna merah dan satu berwarna biru;
   c. satu berwarna merah dan dua berwarna biru.

8. Suatu himpunan bilangan bulat mempunyai 10 anggota. Berapa banyak himpunan bagian dari himpunan tersebut yang terdiri atas
   a. 2 anggota;
   b. 3 anggota;
   c. 5 anggota;
   d. 8 anggota?

Teorema Binomial Newton (Pengayaan)

Penggunaan kombinasi dapat kita jumpai, antara lain pada *teorema binomial Newton* atau pada ilmu hitung peluang. Pada bagian ini, kita akan mempelajari penggunaan kombinasi pada teorema binomial Newton.

Misalkan x dan y adalah peubah-peubah bilangan real yang bukan nol. Bentuk $(x + y)$ disebut *suku dua* atau *bentuk binomial* dalam x dan y. Jika n bilangan asli, bentuk $(x + y)$ dipangkatkan n dapat ditulis $(x + y)^n$. Untuk beberapa nilai n yang kecil, kita sudah mengenal penjabaran dari bentuk $(x + y)^n$. Misalnya,
untuk $n = 1$ maka $(x + y)^1 = x + y$;
untuk $n = 2$ maka $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
untuk $n = 3$ maka $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$.

Secara umum, Newton dalam salah satu teoremanya telah merumuskan penjabaran binomial tersebut dalam notasi kombinasi, yaitu
$(x + y)^n = C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1} y + C(n, 2)x^{n-2} y^2 + ... + C(n, n)y^n$
Penjumlahan berulang seperti itu juga dapat dituliskan dalam notasi sigma berikut.

$$(x + y)^n = \sum_{r=0}^{n} C(n, r)\, x^{n-r} y^r$$

Nilai $C(n, r)$ untuk $r = 0$ sampai dengan $r = n$ pada rumus di atas disebut *koefisien binomial Newton*. Penjabaran bentuk binomial $(x + y)^n$ untuk $n = 1$ sampai dengan $n = 5$ dengan rumus tersebut, dapat ditulis sebagai berikut.

$$n = 1 \rightarrow (x + y)^1 = \sum_{r=0}^{1} C(1, r)\, x^{1-r} y^r = C(1, 0)x^1y^0 + C(1, 1)x^0y^1$$

$$n = 2 \rightarrow (x + y)^2 = \sum_{r=0}^{2} C(2, r)\, x^{2-r} y^r = C(2, 0)x^2y^0 + C(2, 1)x^1y^1 + C(2, 2)x^0y^2$$

$$n = 3 \rightarrow (x + y)^3 = \sum_{r=0}^{3} C(3, r)\, x^{3-r} y^r = C(3, 0)x^3y^0 + C(3, 1)x^2y^1 + C(3, 2)x^1y^2 + C(3, 3)x^0y^3$$

$$n = 4 \rightarrow (x + y)^4 = \sum_{r=0}^{4} C(4, r)\, x^{4-r} y^r = C(4, 0)x^4y^0 + C(4, 1)x^3y^1$$
$$+ C(4, 2)x^2y^2 + C(4, 3)x^1y^3$$
$$+ C(4, 4)x^0y^4$$

$$n = 5 \rightarrow (x + y)^5 = \sum_{r=0}^{5} C(5, r)\, x^{5-r} y^r = C(5, 0)\, x^5y^0 + C(5, 1)\, x^4y^1$$
$$+ C(5, 2)\, x^3y^2 + C(5, 3)\, x^2y^3$$
$$+ C(5, 4)\, x^1y^4 + C(5, 5)\, x^0y^5$$

Apabila koefisien-koefisien penjabaran binomial di atas ditulis tersendiri, diperoleh bentuk berikut.

$n = 1$ → C(1, 0) C(1, 1)
$n = 2$ → C(2, 0) C(2, 1) C(2, 2)
$n = 3$ → C(3, 0) C(3, 1) C(3, 2) C(3, 3)
$n = 4$ → C(4, 0) C(4, 1) C(4, 2) C(4, 3) C(4, 4)
$n = 5$ → C(5, 0) C(5, 1) C(5, 2) C(5, 3) C(5, 4) C(5, 5)

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Jika koefisien-koefisien penjabaran binomial yang ditulis dalam notasi kombinasi di atas ditentukan nilainya, seperti apa susunannya? Coba kalian selidiki.

Susunan bilangan-bilangan seperti yang kalian temukan pada tugas di atas dinamakan *segitiga Pascal*. Kata *segitiga* dipakai karena bentuk susunan itu adalah segitiga, sedangkan kata Pascal berasal dari nama seorang ahli Matematika bangsa Prancis, *Blaise Pascal* (1623–1662). Setiap bilangan pada segitiga tersebut, selain bilangan yang berada di tepi, merupakan jumlah dari dua bilangan yang terletak di atasnya.

Contoh:

1. Jabarkan bentuk $(2j - 3k)^5$ menggunakan teorema binomial Newton.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(2j - 3k)^5 &= C(5,0)(2j)^5 + C(5,1)(2j)^4(-3k) + C(5,2)(2j)^3(-3k)^2 + C(5,3)(2j)^2(-3k)^3 \\ &\quad + C(5,4)(2j)(-3k)^4 + C(5,5)(-3k)^5 \\ &= (2j)^5 + 5(2j)^4(-3k) + 10(2j)^3(-3k)^2 + 10(2j)^2(-3k)^3 + 5(2j)(-3k)^4 + (-3k)^5 \\ &= 32j^5 - 240j^4k + 720j^3k^2 - 1.080j^2k^3 + 810jk^4 - 243k^5\end{aligned}$$

2. Tentukan koefisien dari x^5 pada penjabaran binomial bentuk $(2x - 1)^{10}$.

Penyelesaian:

Bentuk yang memuat x^5 adalah $C(10, 5)(2x)^5(-1)^5 = C(10, 5) \times 32x^5(-1)^5$.

Jadi, koefisien dari x^5 adalah $(-1)^5 \times 32 \times C(10, 5) = -1 \times 32 \times \dfrac{10!}{5! \times 5!}$

$= -32 \times 252 = -8.064$.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba kalian jabarkan bentuk binomial berikut, kemudian tentukan koefisien dari suku yang diminta.

1. $\left(5 + \dfrac{1}{x}\right)^7$; suku $\dfrac{1}{x^6}$
2. $(a - 5b)^5$; suku a^3b^2
3. $\left(2a - \dfrac{1}{b}\right)^3$; suku $\dfrac{a^2}{b}$
4. $(2 - 3x^{-1})^3$; suku x^{-2}
5. $(6 - 4x)^6$; suku x^5
6. $(x^2 - 3)^5$; suku x^4

B. Peluang Suatu Kejadian

Coba kalian perhatikan contoh peristiwa-peristiwa berikut.

1. Pengelompokan gen dalam pembuahan yang menentukan bentuk fisik manusia.
2. Kecelakaan lalu lintas akibat kesalahan dalam mengendarai kendaraan.
3. Bertumbukannya partikel terkecil di alam yang menimbulkan gejala-gejala fisika atau kimia tertentu.

Peristiwa-peristiwa tersebut merupakan contoh kejadian yang tidak dapat dikendalikan oleh manusia. Oleh karena itu, kita hanya dapat mengerjakan segala sesuatu sebaik mungkin dengan mencoba menilai kemungkinan-kemungkinan yang dapat terjadi. Setiap kali kita memikirkan kejadian yang hasilnya di luar pengaruh kita, secara otomatis kita menaksir peluangnya.

Seperti yang telah disinggung pada awal pembahasan bab ini, ilmu hitung peluang bermula dari permainan judi. Oleh karena itu, dalam pembahasan ini digunakan alat-alat permainan judi, seperti kartu, dadu (kubus berangka), dan mata uang logam. Hal ini dimaksudkan untuk memudahkan kalian dalam memahami konsep-konsep yang sedang dijelaskan. Marilah kita awali pembicaraan ini dengan membahas beberapa pengertian dasar, antara lain pengertian percobaan, ruang sampel, dan kejadian.

1. Pengertian Percobaan, Ruang Sampel, dan Kejadian

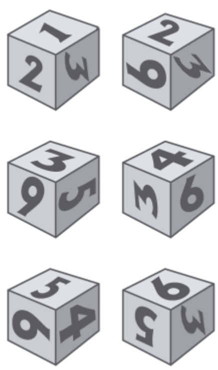
Percobaan adalah suatu tindakan atau kegiatan yang dapat diulang dengan keadaan yang sama untuk memperoleh hasil tertentu. Hasil yang diperoleh dari suatu percobaan ini tidak dapat diketahui sebelumnya. Himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan disebut *ruang sampel*, dinotasikan dengan S. Anggota-anggota dari ruang sampel dinamakan *titik sampel*. *Kejadian pada ruang sampel* atau disingkat *kejadian* adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Kejadian yang beranggotakan satu titik sampel disebut *kejadian sederhana*, sedangkan kejadian yang beranggotakan lebih dari satu titik sampel disebut *kejadian majemuk*.

Contoh:

1. Pada percobaan pelemparan sebuah kubus bernomor, jika A adalah kejadian munculnya bilangan genap dan B munculnya bilangan prima, nyatakan berikut ini dalam sebuah himpunan.
   a. Ruang sampel
   b. Kejadian A
   c. Kejadian B

   Penyelesaian:

   Sebuah kubus bernomor memiliki 6 sisi, masing-masing bernomor 1 sampai dengan 6. Permukaan yang dapat muncul adalah sisi yang bernomor 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 seperti tampak pada gambar di samping.
   Pada percobaan tersebut, diperoleh bahwa
   a. ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;
   b. kejadian A disingkat $A = \{2, 4, 6\}$;
   c. kejadian B disingkat $B = \{2, 3, 5\}$.



Kubus nomor yang ditandai dengan angka

Gambar 2.8

2. Dua mata uang (koin) logam dilempar bersama-sama. Dalam satu kali lemparan, tentukan
   a. ruang sampelnya,
   b. B = kejadian munculnya satu angka;
   c. C = kejadian muncul keduanya gambar.

(a) Sisi angka (b) Sisi gambar

Sumber: *Dokumen Penerbit*

Gambar 2.9

Penyelesaian:
Sebuah koin memiliki dua sisi, yaitu sisi angka (disingkat A) dan sisi gambar (disingkat G). Pada percobaan melempar dua koin, ruang sampelnya dapat ditentukan dengan beberapa cara, di antaranya dengan tabel seperti tampak berikut ini.

Tabel 2.3

Koin I	Koin II	
	A	G
A	AA	AG
G	GA	GG

Dari tabel di atas tampak bahwa
a. ruang sampel $S = \{AA, AG, GA, GG\}$;
b. $B = \{AG, GA\}$;
c. $C = \{GG\}$.

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Kegiatan:
Menentukan ruang sampel pada percobaan pelemparan 3 buah mata uang logam bersama-sama.

Permasalahan:
Bagaimana ruang sampel pada percobaan pelemparan 3 buah mata uang logam bersama-sama?

Langkah-Langkah:
1. Ambillah 3 mata uang logam.
2. Lemparkan 3 mata uang logam bersama-sama.
3. Catatlah semua hasil yang mungkin dari pelemparan tersebut.
4. Bentuklah sebuah himpunan yang anggotanya semua hasil yang mungkin dari pelemparan tersebut.

Kesimpulan:
Ruang sampel dari hasil percobaan 3 buah mata uang logam bersama-sama adalah
$S = \{AAA, AAG, AGA, AGG, GAA, GAG, GGA, GGG\}$.

2. Pengertian Peluang Suatu Kejadian

Pada pembahasan pengertian peluang suatu kejadian, akan kita pelajari dua definisi, yaitu definisi empiris dan definisi klasik.

a. Definisi Empiris

Sebagai gambaran untuk menentukan nilai peluang berdasarkan definisi empiris, perhatikan tabel yang menunjukkan percobaan pelemparan sebuah mata uang logam berikut.

Tabel 2.4

Pelaku Percobaan	Banyaknya Lemparan (n)	Banyaknya Muncul Angka (k)	Frekuensi Relatif Muncul Angka, $\frac{k}{n}$
Buffon	4.040	2.048	0,5069
K. Pearson	12.000	6.019	0,5016
K. Pearson	24.000	12.012	0,5005

Sumber: *Advanced Engineering Mathematics*, 1988

Berdasarkan tabel, tampak bahwa makin besar banyaknya lemparan, nilai frekuensi relatifnya mendekati nilai 0,5000 atau 0,5. Hal ini dapat dikatakan bahwa peluang munculnya muka adalah 0,5.

Oleh karena itu, berdasarkan definisi empiris, peluang adalah nilai frekuensi relatif munculnya peristiwa jika banyaknya percobaan relatif besar (tak berhingga).

b. Definisi Klasik

Misalkan sebuah kubus bernomor dilempar sebanyak n kali. Kita tidak dapat mengetahui sebelumnya bahwa nomor 3 akan muncul lebih sering daripada sisi yang lain atau nomor 1 akan muncul lebih jarang daripada sisi yang lain. Hal ini disebabkan masing-masing sisi mempunyai peluang yang sama untuk muncul.

Pengertian peluang suatu kejadian berdasarkan definisi klasik adalah sebagai berikut.

Misalkan pada suatu percobaan terdapat kejadian A dapat terjadi dalam k cara dari keseluruhan n cara yang mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Peluang kejadian A, ditulis $P(A)$ adalah

$$P(A) = \frac{k}{n}.$$

Jika digunakan istilah ruang sampel, peluang kejadian A dapat dirumuskan sebagai berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sebuah kotak berisi 5 bola hitam dan 3 bola putih. Diambil 2 bola sekaligus dari kotak itu. Peluang terambil dua bola hitam adalah ....

a. $\frac{4}{5}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{2}{5}$

d. $\frac{1}{4}$

e. $\frac{5}{14}$

Soal Ebtanas SMA, 1991

Misalkan S adalah ruang sampel dari suatu percobaaan dengan setiap anggota S memiliki peluang yang sama untuk muncul. Jika A adalah suatu kejadian dalam ruang sampel S, peluang kejadian A dapat dirumuskan dengan

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Keterangan:
$P(A)$ adalah peluang kejadian A
$n(A)$ adalah banyaknya anggota dalam kejadian A
$n(S)$ adalah banyaknya anggota ruang sampel S

Contoh:

1. Pada pelemparan sebuah kubus bernomor, tentukan
   a. peluang kejadian munculnya angka 1;
   b. peluang kejadian munculnya angka genap.

   Penyelesaian:
   Pada percobaan tersebut ruang sampelnya $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sehingga $n(S) = 6$.
   a. Misalkan A kejadian munculnya angka 1 maka $A = \{1\}$. Berarti, $n(A) = 1$. Jadi, peluang kejadian munculnya angka 1 adalah $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$.
   b. Misalkan B kejadian munculnya angka genap maka $B = \{2, 4, 6\}$. Berarti, $n(B) = 3$. Jadi, peluang kejadian munculnya angka genap adalah

   $$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Suatu kantong berisi 4 kelereng berwarna merah dan 5 kelereng berwarna biru. Dari kantong itu diambil sebutir kelereng secara acak. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah
   a. kelereng berwarna merah;
   b. kelereng berwarna biru.

   Penyelesaian:
   Misalkan ruang sampel S, kelereng berwarna merah M, dan kelereng berwarna biru B sehingga $n(S) = 9$, $n(M) = 4$, dan $n(B) = 5$.
   a. Peluang terambil sebutir kelereng berwarna merah adalah $P(M) = \frac{n(M)}{n(S)} = \frac{4}{9}$.
   b. Peluang terambil sebutir kelereng berwarna biru adalah $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{9}$.

Problem Solving

Sebuah kotak berisi 5 bola berwarna merah, 2 bola berwarna putih, dan 3 bola berwarna biru. Tiga bola diambil sekaligus secara acak dari kotak tersebut. Berapa peluang:

a. terambil semua bola berwarna merah,
b. terambil 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna biru, dan
c. terambil tiga bola dengan warna berlainan?

Penyelesaian:

Pengambilan 3 bola dari 10 bola dalam kotak tersebut merupakan kombinasi sehingga banyaknya anggota dalam ruang sampel adalah kombinasi 3 bola dari 10 bola, yaitu

$$n(S) = C(10, 3) = \frac{10!}{3! \times 7!} = 120.$$

a. Misalkan A adalah kejadian terambil semua bola berwarna merah (3 bola berwarna merah). Berarti, $n(A) = C(5, 3) = \dfrac{5!}{3! \times 2!} = 10.$

Jadi, peluang terambil 3 bola berwarna merah adalah

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}.$$

b. Misalkan B adalah kejadian terambil 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna biru. Berarti,

$$\begin{aligned} n(B) &= C(5, 2) \times C(3, 1) \\ &= \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} \\ &= 10 \times 3 = 30. \end{aligned}$$

Jadi, peluang terambilnya 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna biru adalah

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

c. Misalkan C adalah kejadian terambil 3 bola berlainan warna. Berarti,

$$\begin{aligned} n(C) &= C(5, 1) \times C(2, 1) \times C(3, 1) \\ &= \frac{5!}{1! \times 4!} \times \frac{2!}{1! \times 1!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} \\ &= 5 \times 2 \times 3 = 30. \end{aligned}$$

Jadi, peluang terambilnya 3 bola berlainan warna adalah

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}.$$

3. Kisaran Nilai Peluang

Diskusi

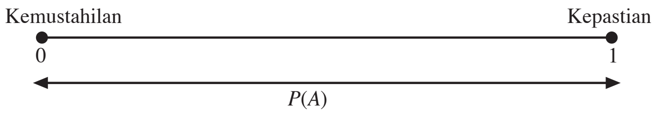
Mengomunikasikan Gagasan

Misalkan peluang kejadian *A* adalah *P*(*A*). Jika *P*(*A*) = 0, maka kejadian itu mustahil terjadi. Jelaskan, mengapa demikian? Demikian juga, jika *P*(*A*) = 1, maka kejadian itu pasti terjadi. Mengapa? (Ingat definisi peluang).

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mengetahui bahwa kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Oleh karena itu, apabila $n(S) = n$ dan A adalah kejadian pada ruang sampel S, dengan $n(A) = k$ maka $0 \leq k \leq n$ sehingga $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$. Karena $\frac{k}{n} = P(A)$ maka $0 \leq P(A) \leq 1$. Hal ini menunjukkan bahwa nilai peluang berkisar dari 0 sampai dengan 1 atau terletak pada interval tertutup [0, 1].

Suatu kejadian yang peluangnya 0 disebut kejadian yang mustahil terjadi atau suatu *kemustahilan*, sedangkan kejadian yang peluangnya 1 disebut kejadian yang pasti terjadi atau suatu *kepastian*.

Kisaran nilai peluang dapat digambarkan sebagai berikut.



Gambar 2.10

Contoh:

Suatu kubus bernomor dilempar sebanyak satu kali. Misalkan, S ruang sampel; A kejadian muncul angka genap; B kejadian muncul angka 7; C kejadian muncul salah satu dari enam bilangan asli pertama. Tentukan $P(A)$, $P(B)$, dan $P(C)$.

Penyelesaian:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka $n(S) = 6$

$A = \{2, 4, 6\}$ maka $n(A) = 3$

$B = \{\ \}$ maka $n(B) = 0$

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ maka $n(C) = 6$

Oleh karena itu, peluang munculnya kejadian A, B, dan C adalah sebagai berikut.

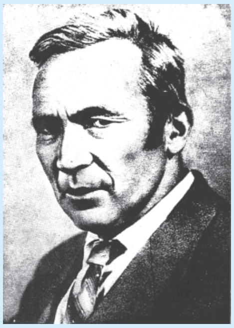
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$$ .... (Kejadian muncul angka 7 mustahil terjadi)

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$$ .... (Kejadian muncul salah satu dari enam bilangan asli pertama pasti terjadi)

Info Math: **Informasi Lebih Lanjut**

Kolmogorov



Sumber: *www.york.ac.uk*

Kolmogorov

Salah seorang matematikawan yang telah memperkenalkan teorema peluang adalah **A.N. Kolmogorov** (1903–1987). Dia lahir di Rusia. Pada usianya yang ke-17 tahun, Kolmogorov kuliah di salah satu perguruan tinggi terkenal di negara itu, yaitu Moskow State University dan lulus pada tahun 1925. Teorema peluang yang dia perkenalkan sangat bermanfaat bagi pengembangan ilmu hitung peluang. Di samping itu, Kolmogorov juga telah berhasil membuktikan teorema-teorema dasar peluang melalui pendekatan aksioma-aksioma peluang. Terobosan yang dia lakukan tidak hanya berhenti sampai di situ. Salah satu hasil penelitian yang disumbangkan oleh Kolmogorov dalam dunia sains adalah aplikasi sistem yang terdiri atas dua persamaan diferensial parsial yang merupakan pengembangan dari pendekatan teorema peluang. Oleh karena itu, pada saat ini teorema peluang dapat digunakan untuk memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan Fisika dan Teknik Sipil. Carilah informasi tentang tokoh ini selengkapnya.

Sumber: *Ensiklopedi Pengetahuan*, 2007

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

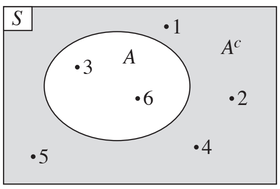
1. Sebuah kubus bernomor dilempar satu kali. Tentukan peluang munculnya angka
   a. kurang dari 4;
   b. bilangan prima ganjil;
   c. bilangan kelipatan 2;
   d. lebih dari 3;
   e. bilangan genap.
2. Sebuah kubus berangka dan sebuah mata uang logam dilempar secara bersama-sama. Tentukan peluang munculnya
   a. angka 3 dan gambar;
   b. angka kurang dari 3 dan gambar;
   c. angka genap dan angka;
   d. angka lebih dari 1 dan angka.
3. Dua kubus berangka dilempar secara bersama-sama. Tentukan peluang munculnya
   a. angka berjumlah 7;
   b. angka 4 pada kubus pertama dan angka 5 pada kubus kedua;
   c. angka berjumlah 13;
   d. angka genap pada kubus pertama;
   e. angka sama;
   f. angka berjumlah 8.
4. Sebuah kotak berisi 5 bola berwarna merah, 4 bola berwarna kuning, dan 3 bola berwarna biru. Jika tiga bola diambil sekaligus dari kotak tersebut, tentukan peluang yang terambil adalah sebagai berikut:

a. 3 bola berwarna merah;
b. 2 bola berwarna merah dan 1 bola berwarna kuning;
c. 2 bola berwarna biru dan 1 bola berwarna merah;
d. 1 bola berwarna merah, 1 bola berwarna kuning, dan 1 bola berwarna biru;
e. 2 bola berwarna kuning dan 1 bola berwarna biru;
f. 3 bola berwarna kuning.

5. Pada sebuah pundi terdapat 9 manik-manik berwarna hitam, 7 manik-manik berwarna merah, dan 5 manik-manik berwarna kuning. Jika 4 manik-manik diambil sekaligus dari pundi tersebut, tentukan peluang yang terambil adalah manik-manik yang berwarna
   a. 2 hitam, 1 kuning, dan 1 merah;
   b. 3 merah dan 1 kuning;
   c. 1 hitam, 2 kuning, 1 merah;
   d. semuanya berwarna hitam;
   e. 1 hitam, 1 kuning, dan 2 merah;
   f. 3 hitam, 1 merah.

4. Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Misalkan S adalah himpunan bilangan asli yang kurang dari 7 dan A adalah kejadian munculnya angka kelipatan 3 pada suatu percobaan pelemparan sebuah kubus berangka. Anggota-anggota kejadian A adalah $A = \{3, 6\}$. *Komplemen kejadian A* didefinisikan sebagai kejadian tidak terjadinya A atau kejadian bukan A, ditulis A^c. Jadi, $A^c = \{1, 2, 4, 5\}$. Dalam diagram Venn, komplemen kejadian A tampak pada daerah yang ditandai dengan raster **Gambar 2.11**.



Gambar 2.11

Jika S adalah ruang sampel dengan $n(S) = n$, A adalah kejadian dalam ruang sampel S dengan $n(A) = k$, dan A^c adalah komplemen kejadian A maka $n(A^c) = n - k$. Oleh karena itu, peluang kejadian A^c adalah

$$P(A^c) = \frac{n(A^c)}{n(S)} = \frac{n-k}{n} = \frac{n}{n} - \frac{k}{n} = 1 - \frac{k}{n}.$$

Karena $P(A) = \dfrac{k}{n}$ maka $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Jadi, berdasarkan uraian di atas, dapat disimpulkan sebagai berikut.

a. Komplemen kejadian A adalah kejadian bukan A, ditulis A^c.
b. Peluang komplemen kejadian A dirumuskan dengan
$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dua buah dadu dilempar bersamaan. Peluang muncul mata dadu yang berjumlah bilangan genap lebih dari 8 adalah ....

a. $\frac{28}{36}$ d. $\frac{7}{36}$

b. $\frac{11}{36}$ e. $\frac{4}{36}$

c. $\frac{10}{36}$

Soal Ebtanas SMA, 1990

Contoh:

Pada percobaan pelemparan sebuah kubus bernomor, A adalah kejadian munculnya bilangan ganjil. Tentukan peluang kejadian A^c.

Penyelesaian:

Pada percobaan tersebut, ruang sampelnya adalah $S = \{1,2, 3, 4, 5, 6\}$ sehingga $n(S) = 6$.
A adalah kejadian muncul bilangan ganjil sehingga $A = \{1, 3, 5\}$ sehingga $n(A) = 3$.
Soal tersebut dapat dikerjakan dengan dua cara berikut.

Cara 1:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ maka $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Cara 2:

$A^c = \{2, 4, 6\}$ sehingga $n(A^c) = 3$.

Jadi, $P(A^c) = \dfrac{n(A^c)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

5. Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Misalkan kalian melempar sebuah koin dengan sisi gambar (G) dan sisi angka (A). Frekuensi kemunculan atau berapa kali muncul satu sisi tertentu dalam beberapa kali pelemparan dinamakan frekuensi harapan. Lebih jelasnya, frekuensi harapan dari suatu percobaan yang dilakukan sebanyak n kali didefinisikan sebagai berikut.

Misalkan A adalah suatu kejadian pada ruang sampel S dengan peluang $P(A)$. Frekuensi harapan munculnya kejadian A (ditulis $F_{har}(A)$) dalam n kali percobaan adalah

$$F_{har}(A) = P(A) \times n.$$

Contoh:

Pada percobaan pelemparan kubus berangka sebanyak 300 kali, berapakah frekuensi harapan kejadian berikut?

a. Munculnya angka 4
b. Munculnya bilangan prima

Penyelesaian:

Ruang sampel percobaan tersebut adalah $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sehingga $n(S) = 6$.

a. Misalkan A kejadian munculnya angka 4.

Jadi, $A = \{4\}$ dan $n(A) = 1$. Berarti, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$.

Frekuensi harapan munculnya angka 4 adalah $F_{har}(A) = \frac{1}{6} \times 300 = 50$ kali.

b. Misalkan B kejadian munculnya bilangan prima maka $B = \{2, 3, 5\}$ dan $n(B) = 3$.

Berarti, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Frekuensi harapan munculnya bilangan prima adalah $F_{har}(B) = \frac{1}{2} \times 300 = 150$ kali.

Problem Solving

Seorang pedagang memborong buah mangga dari seorang petani mangga sebanyak 4 karung, dengan masing-masing karung berisi 250 buah mangga. Ada 15% buah mangga yang diborong pedagang itu mempunyai rasa masam, sedangkan sisanya manis. Pedagang itu mengambil sebuah mangga dari sembarang karung secara acak.

a. Berapa peluang terambilnya mangga yang mempunyai rasa manis?
b. Ada berapa buah mangga berasa manis dari sejumlah mangga yang diborong pedagang itu?

Penyelesaian:

$n(\text{mangga}) = 250 \times 4 = 1.000$ buah

$P(\text{masam}) = 15\% = 0{,}15$

a. $P(\text{manis}) = 1 - P(\text{masam})$
$= 1 - 0{,}15$
$= 0{,}85$

b. Jumlah mangga manis diharapkan sejumlah

$f_{har}(\text{manis}) = P(\text{manis}) \times n(\text{mangga})$
$= 0{,}85 \times 1.000$
$= 850$ buah

Diskusi — Mengomunikasikan Gagasan

Kalian telah mengenal suatu kejadian yang pasti terjadi dan suatu kejadian yang mustahil terjadi. Bagaimanakah frekuensi harapan dari kejadian-kejadian tersebut? Jelaskan.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Dua mata uang logam dilemparkan secara bersama-sama sebanyak 100 kali. Berapa frekuensi harapan muncul kedua-duanya gambar? Tentukan pula frekuensi harapan muncul kedua-duanya bukan gambar.

2. Sebuah kotak berisi 5 kelereng berwarna biru, 7 kelereng berwarna merah, dan 8 kelereng berwarna putih. Suatu percobaan pengambilan 3 kelereng dari dalam kotak itu dilakukan sebanyak 100 kali. Tentukan frekuensi harapan terambilnya kelereng berwarna:
   a. 1 biru dan 2 merah;
   b. 2 merah dan 1 putih;
   c. 1 biru, 1 merah , dan 1 putih.
3. Sebuah kartu diambil dari seperangkat kartu *bridge*.
   a. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah kartu *As*.
   b. Jika percobaan diulang sebanyak 50 kali, tentukan frekuensi harapan terambilnya kartu *Queen*.
4. Peluang seorang anak balita terkena penyakit polio di suatu daerah adalah 0,0002. Jika jumlah anak-anak balita di daerah tersebut 20.000 jiwa, berapa anak yang diperkirakan terkena penyakit polio?
5. Seorang siswa mempunyai peluang lulus ujian sebesar 0,96%. Jika jumlah siswa sekolah tersebut 500 siswa, berapa siswa yang diperkirakan tidak lulus ujian?

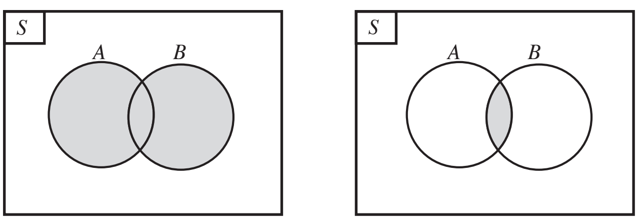
C. Peluang Kejadian Majemuk

Pada pembahasan sebelumnya, kita telah mengetahui bahwa kejadian majemuk merupakan kejadian yang memiliki lebih dari satu titik sampel. Kejadian majemuk dapat dibentuk dari kejadian-kejadian sederhana atau kejadian-kejadian majemuk lainnya dengan memanfaatkan beberapa macam operasi himpunan, antara lain komplemen, gabungan union, dan irisan atau interseksi.

1. Pengertian Gabungan dan Irisan Dua Kejadian

Misalkan A dan B masing-masing kejadian dalam ruang sampel S. *Gabungan* kejadian A dan B adalah himpunan semua titik sampel yang terdapat pada kejadian A atau B. Gabungan kejadian A dan B dapat dibaca kejadian A atau B dan ditulis dengan notasi $A \cup B$. Dalam diagram Venn, kejadian A atau B adalah daerah yang diarsir seperti pada **Gambar 2.12** (a).

Adapun pengertian irisan kejadian A dan B adalah himpunan semua titik sampel yang terdapat pada kejadian A dan B. Irisan kejadian A dan B dibaca kejadian A dan B serta ditulis dengan notasi $A \cap B$. Dalam diagram Venn, kejadian A dan B adalah daerah yang diarsir, seperti pada **Gambar 2.12** (b).



(a) Daerah arsiran adalah $A \cup B$

(b) Daerah arsiran adalah $A \cap B$

Gambar 2.12

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Sebuah dadu yang homogen dilempar satu kali. Peluang untuk mendapatkan mata dadu 3 atau lebih adalah ....

a. $\frac{1}{6}$
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{2}$
d. $\frac{2}{3}$
e. $\frac{5}{6}$

Soal Ebtanas SMA, 1987

2. Peluang Gabungan Dua Kejadian

Kalian tentunya masih ingat bahwa di dalam teori himpunan jika terdapat himpunan A dan B dalam semesta pembicaraan S, anggota himpunan $A \cup B$ dapat dihitung dengan rumus $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. Oleh karena itu, jika terdapat kejadian A dan kejadian B dalam ruang sampel S, peluang kejadian A atau B dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Oleh karena itu, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> Jika A dan B adalah dua kejadian pada ruang sampel S, peluang kejadian A atau B (ditulis $P(A \cup B)$) adalah
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aturan ini dikenal sebagai *aturan penjumlahan* untuk sembarang kejadian.

Contoh:

1. Sebuah kartu diambil secara acak dari kotak yang berisi seperangkat kartu yang sama bentuknya bernomor 1 sampai dengan 8. Misalnya, A adalah kejadian terambil kartu bernomor genap dan B adalah kejadian terambil kartu bernomor bilangan prima. Tentukan peluang kejadian A atau B.

   Penyelesaian:

   Dari ketentuan tersebut, diperoleh

   $S = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$, $n(S) = 8$

   $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $n(A) = 4$ maka $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

   $B = \{2, 3, 5, 7\}$, $n(B) = 4$ maka $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

   $A \cap B = \{2\}$, $n(A \cap B) = 1$ maka

   $P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{8}$

Cara 1:

Peluang kejadian A atau B adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}$$
$$= \frac{4}{8} + \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Cara 2:

Karena $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ maka $n(A \cup B) = 7$. Oleh karena itu, peluang kejadian A atau B adalah $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$.

2. Suatu RT terdiri atas 20 kepala keluarga. Di antara mereka, 10 orang memiliki mobil, 14 orang memiliki sepeda motor, dan 2 orang tidak memiliki kendaraan.
   a. Tentukan jumlah kepala keluarga yang memiliki mobil dan motor sekaligus.
   b. Tentukan jumlah kepala keluarga yang memiliki mobil atau motor.
   c. Jika diambil satu orang kepala keluarga dari RT tersebut secara acak, berapa peluang bahwa yang terambil adalah orang yang memiliki mobil *atau* sepeda motor.

Penyelesaian:

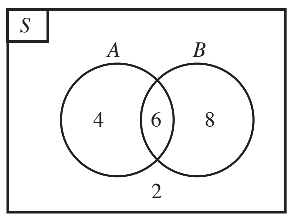
Misalkan A adalah kepala keluarga yang memiliki mobil dan B yang memiliki sepeda motor. Berdasarkan data di atas, $n(A) = 10$, $n(B) = 14$, dan $n(S) = 20$. Perhatikan diagram Venn di samping.

Berdasarkan diagram Venn tersebut, diperoleh

a. $n(A \cup B) = 6$

b. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$= 10 + 14 - 6$
$= 18$

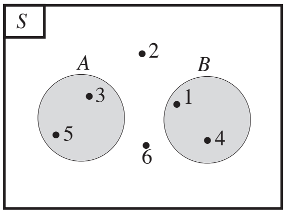
c. $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$



Gambar 2.13

3. Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Dua kejadian atau lebih disebut *kejadian saling lepas (mutually exclusive)* jika tidak terdapat irisan antara kejadian-kejadian tersebut. Misalnya, pada pelemparan sebuah kubus berangka, kejadian A adalah munculnya angka 3 dan 5, sedangkan kejadian B adalah munculnya angka 1 dan 4. Anggota kejadian-kejadian itu adalah $A = \{3, 5\}$ dan $B = \{1, 4\}$. Dari sini tampak bahwa A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas karena $A \cap B = \{\}$. Di dalam diagram Venn, kejadian A dan B tampak seperti pada gambar berikut.



Gambar 2.14

Karena $A \cap B = \{\}$ maka $n(A \cap B) = 0$. Oleh karena itu, jika A dan B saling lepas, peluang kejadian A atau B adalah

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - 0 \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

Jadi, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

> Misalkan A dan B adalah dua kejadian dalam ruang sampel S. Jika A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas, peluang gabungan dua kejadian itu adalah
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Aturan ini dikenal sebagai *aturan penjumlahan* untuk dua kejadian yang saling lepas.

Contoh:

Dalam sebuah kantong terdapat 8 bola biliar, masing-masing memiliki nomor yang berurutan. Sebuah bola diambil dari dalam kantong secara acak. Misalkan A adalah kejadian bahwa yang terambil bola bernomor genap dan B adalah kejadian terambil bola bernomor tujuh.

a. Apakah kejadian A dan kejadian B saling lepas?

b. Tentukan peluang kejadian A atau B.

Penyelesaian:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} \rightarrow n(S) = 8$

$A = \{2, 4, 6, 8\} \rightarrow n(A) = 4$ dan $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

$B = \{7\} \rightarrow n(B) = 1$ dan $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{1}{8}$

$A \cap B = \{\} \rightarrow n(A \cap B) = 0$

a. Karena $A \cap B = \{\}$ maka A dan B adalah dua kejadian saling lepas.

b. $$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

4. Peluang Kejadian yang Saling Bebas Stokastik

Dua kejadian atau lebih disebut *kejadian yang saling bebas stokastik* apabila terjadi atau tidaknya kejadian yang satu tidak bergantung pada terjadi atau tidaknya kejadian yang lain.

Pada kasus ini berlaku
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ dan
$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B) \times P(C)$
Sebagai contoh, perhatikan percobaan berikut.

Misalkan terdapat suatu percobaan pelemparan dua kubus bernomor secara bersama-sama. Misalkan A adalah kejadian munculnya kubus pertama angka 2, sedangkan B adalah kejadian munculnya nomor-nomor pada kedua kubus itu yang berjumlah 7. Kejadian A dan B dapat digambarkan oleh daerah yang diarsir pada tabel ruang sampel berikut.

Tabel 2.5

Kubus I	Kubus II					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$A \cap B$

A

B

Dari tabel tersebut tampak bahwa terjadi atau tidaknya kejadian A tidak bergantung pada terjadi atau tidaknya kejadian B. Dengan demikian, kejadian A dan kejadian B merupakan dua kejadian yang saling bebas stokastik.

Adapun anggota-anggota kejadian itu adalah sebagai berikut.
$A = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)\}$ sehingga $n(A) = 6$
$B = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$ sehingga $n(B) = 6$
$A \cap B = \{(2, 5)\}$ sehingga $n(A \cap B) = 1$
$n(S) = 36$

Dengan demikian, peluang kejadian-kejadian tersebut adalah sebagai berikut.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika 3 mata uang dilempar bersama-sama, maka peluang memperoleh 2 sisi muka dan 1 sisi belakang adalah ....

a. $\frac{1}{6}$
b. $\frac{2}{6}$
c. $\frac{1}{8}$
d. $\frac{2}{8}$
e. $\frac{3}{8}$

Soal Sipenmaru, 1985

Di samping itu, jika peluang kejadian A dikalikan dengan peluang kejadian B, diperoleh

$$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa peluang kejadian A dan B sama dengan peluang kejadian A dikalikan peluang kejadian B. Dengan demikian, dapat kita peroleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika kejadian A dan B merupakan dua kejadian yang saling bebas stokastik, berlaku hubungan

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Contoh:

Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Misalkan A kejadian kubus pertama muncul angka 3 dan B kejadian kubus kedua muncul angka 5,

a. Tentukan peluang kejadian A, peluang kejadian B, dan peluang kejadian A dan B.

b. Apakah kejadian A dan B saling bebas stokastik?

Penyelesaian:

Ruang sampel percobaan ini dapat digambarkan sebagai berikut.

Tabel 2.6

Kubus I	Kubus II					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

$(A \cap B)$

A

B

Dari tabel di atas, $n(S) = 36$, $n(A) = 6$, dan $n(B) = 6$.

Tampak juga $A \cap B = \{(3, 5)\}$ sehingga $n(A \cap B) = 1$.

a. $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, dan

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}.$$

b. Karena $P(A \cap B) = \frac{1}{36}$ dan $P(A) \times P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

maka $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Dengan kata lain, kejadian A dan B saling bebas stokastik.

Uji Kompetensi 9

Kerjakan di buku tugas

1. Sebuah kartu diambil dari seperangkat kartu *bridge*. Tentukan peluangnya jika yang terambil adalah kartu
   a. *As*;
   b. *Heart* (hati);
   c. bukan *As*;
   d. bukan kartu *Heart*;
   e. *King*;
   f. bukan kartu *King*.
2. Empat kartu diambil dari satu set kartu *bridge*. Tentukan peluangnya jika yang terambil adalah
   a. 2 kartu *As dan* 2 kartu *Queen*;
   b. 1 kartu *King dan* 3 kartu *Jack*;
   c. 1 kartu *King atau* 3 kartu *Heart*.
3. Dua kubus bernomor dilempar secara bersama-sama. Tentukan peluang munculnya
   a. angka 4 pada kubus pertama *dan* angka 6 pada kubus kedua;
   b. angka 5 pada kubus pertama *atau* angka 3 pada kubus kedua;
   c. angka ganjil pada kubus pertama *atau* angka genap pada kubus kedua.
4. Suatu percobaan dilakukan dengan melemparkan dua uang logam yang masing-masing mempunyai dua sisi yaitu sisi angka (A) dan sisi gambar (G). Pada percobaaan tersebut B adalah kejadian muncul keduanya angka dan C adalah kejadian muncul satu gambar.
   a. Tentukan peluang kejadian B dan C.
   b. Tentukan peluang kejadian B atau C.
   c. Apakah kejadian B dan kejadian C saling lepas?
5. Pada pelemparan sebuah kubus berangka, A adalah kejadian munculnya angka bilangan ganjil, B adalah kejadian munculnya angka bilangan prima, dan C adalah kejadian munculnya angka bilangan genap.
   a. Tentukan peluang kejadian A dan B.
   b. Apakah kejadian A dan B saling lepas?
   c. Tentukan peluang kejadian A dan C.
   d. Apakah kejadian A dan kejadian B saling lepas?
6. Sebuah kartu diambil dari seperangkat kartu *bridge*. Misalkan
   A adalah kejadian terambil kartu *As;*
   B adalah kejadian terambil kartu berwarna hitam;
   C adalah kejadian terambil kartu *Heart;*
   D adalah kejadian terambil kartu *King*.
   a. Tentukan peluang kejadian A atau B.
   b. Apakah kejadian A dan kejadian B saling lepas?
   c. Tentukan peluang B atau C.
   d. Apakah kejadian B dan kejadian C saling lepas?

e. Tentukan peluang kejadian C dan D.
f. Apakah kejadian C dan kejadian D saling bebas stokastik?
g. Tentukan peluang kejadian A dan D.
h. Apakah kejadian A dan kejadian D saling bebas stokastik?

5. Peluang Kejadian Bersyarat

Misalkan A dan B adalah dua kejadian dalam ruang sampel S. *Kejadian A dengan syarat B* adalah kejadian munculnya A yang ditentukan oleh persyaratan kejadian B telah muncul. Kejadian munculnya A dengan syarat B, ditulis A/B. Demikian juga sebaliknya, *kejadian B dengan syarat A*, ditulis B/A adalah kejadian munculnya B dengan syarat kejadian A telah muncul.

Adapun peluang kejadian bersyarat dapat dirumuskan sebagai berikut.

a. Peluang munculnya kejadian A dengan syarat kejadian B telah muncul adalah

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ dengan } P(B) > 0.$$

b. Peluang munculnya kejadian B dengan syarat kejadian A telah muncul adalah

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ dengan } P(A) > 0.$$

Agar kalian lebih memahami peluang kejadian bersyarat, simaklah contoh-contoh berikut ini.

Contoh:

1. Dua kubus bernomor dilempar secara bersama-sama. Jika jumlah angka yang muncul dalam kedua kubus adalah 6, tentukan peluangnya bahwa salah satu kubus muncul angka 2.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian jumlah angka yang muncul dalam kedua kubus adalah 6 dan B adalah kejadian salah satu kubus muncul angka 2.

Oleh karena itu, anggota-anggota A, B, dan $A \cap B$ adalah sebagai berikut.

$A = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

$B = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (1, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2), (6, 2)\}$

$A \cap B = \{(2, 4), (4, 2)\}$

Berarti, $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{2}{5}$.

2. Dua kubus bernomor dilemparkan secara bersama-sama. Jika salah satu kubus muncul angka 1, tentukan peluang bahwa jumlah angka yang muncul pada kedua kubus adalah 4.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian jumlah nomor yang muncul dalam kedua kubus adalah 4 dan B adalah kejadian salah satu kubus muncul nomor 1.

Oleh karena itu, anggota-anggota A, B, dan $A \cap B$ adalah sebagai berikut.

$A = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$

$B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}$

$A \cap B = \{(1, 3), (3, 1)\}$

Berarti, $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{2}{11}$.

6. Aturan Perkalian untuk Kejadian Bersyarat

Misalkan terdapat sembarang bilangan a, b, dan c, dengan $c \neq 0$. Kita masih ingat jika $a = \dfrac{b}{c}$, berlaku $b = a \times c$. Di samping itu, di dalam operasi irisan dua himpunan A dan B berlaku $A \cap B = B \cap A$. Dengan demikian, rumus peluang kejadian bersyarat di atas dapat ditulis sebagai berikut.

a. Karena $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, dengan $P(B) > 0$ maka

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$

b. Karena $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$, dengan $P(A) > 0$ dan

$B \cap A = A \cap B$ maka $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$

Aturan tersebut dikenal dengan *aturan perkalian untuk kejadian bersyarat*. Secara lebih lengkap aturan itu berbunyi sebagai berikut.

Jika kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian bersyarat, peluang terjadinya A dan B adalah

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B)$$
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Misalkan kejadian A dan B dua kejadian yang saling bebas stokastik, artinya terjadi atau tidaknya kejadian A tidak bergantung pada terjadi atau tidaknya kejadian B dan sebaliknya, berlaku $P(A/B) = P(A)$ dan $P(B/A) = P(B)$. Jadi, untuk dua

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Suatu kantong berisi 6 bola hitam dan 3 bola putih. Diambil secara acak 2 kali berturut-turut masing-masing satu tanpa pengembalian. Peluang mendapatkan keduanya bola hitam adalah ....

a. $\frac{6}{9}$ d. $\frac{5}{12}$

b. $\frac{5}{8}$ e. $\frac{8}{12}$

c. $\frac{10}{12}$

kejadian saling bebas stokastik, aturan perkalian di atas berubah menjadi berikut ini.

Jika A dan B dua kejadian yang saling bebas stokastik, berlaku

$$P(B \cap A) = P(B) \times P(A/B) = P(B) \times P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = P(A) \times P(B)$$

Aturan ini ternyata sesuai dengan kesimpulan yang telah kita peroleh pada saat membahas kejadian saling bebas stokastik di depan.

Contoh:

Sebuah kotak berisi 5 kelereng berwarna merah dan 3 kelereng berwarna putih. Dua kelereng diambil secara acak berturut-turut dari kotak tersebut. Tentukan peluang kedua kelereng yang terambil berwarna merah jika:

a. pengambilan kelereng dilakukan dengan pengembalian;
b. pengambilan kelereng dilakukan tanpa pengembalian.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian pengambilan pertama diperoleh kelereng berwarna merah dan B adalah kejadian pengambilan kedua juga diperoleh kelereng berwarna merah. Oleh karena itu, peluang diperoleh dua kelereng berwarna merah adalah $P(A \cap B)$.

a. Pengambilan kelereng dilakukan dengan pengembalian artinya sebelum mengambil kelereng yang kedua, kelereng yang diambil pada pengambilan pertama dikembalikan ke dalam kotak.

   Dengan demikian, $P(A) = \frac{5}{8}$ dan $P(B/A) = P(B) = \frac{5}{8}$.

   Berarti, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{25}{64}$.

b. Pengambilan kelereng dilakukan tanpa pengembalian artinya kelereng yang sudah terambil pada pengambilan pertama tidak dikembalikan ke dalam kotak. Oleh karena itu, setelah terambil 1 kelereng berwarna merah, di dalam kotak tinggal 7 kelereng dan yang berwarna merah tinggal 4 buah sehingga diperoleh $P(A) = \frac{5}{8}$ dan $P(B/A) = \frac{4}{7}$.

   Berarti, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56}$.

Tugas Berpikir Kritis **Kerjakan di buku tugas**

Coba kalian kerjakan permasalahan berikut.
Suatu kotak memuat 20 buah jeruk, 5 di antaranya rasanya manis, sisanya masam. Tentukan peluang bahwa suatu sampel dengan 2 kali pengambilan yang dilakukan secara acak, terambil tepat satu buah jeruk yang rasanya manis jika

a. pengambilan dengan pengembalian;
b. pengambilan dengan tanpa pengembalian.

Uji Kompetensi 10

Kerjakan di buku tugas

1. Dua kubus bernomor dilempar satu kali. Tentukan peluang kejadian muncul jumlah nomor-nomor kedua kubus adalah 10 jika
   a. nomor 5 muncul pada kubus pertama;
   b. paling tidak nomor 5 muncul pada sebuah kubus.
2. Dua kubus bernomor dilempar satu kali. Jika nomor yang muncul pada kedua kubus berbeda, tentukan peluang kejadian bahwa
   a. jumlah nomor-nomor kedua kubus adalah 6;
   b. jumlah nomor-nomor kedua kubus lebih kecil atau sama dengan 4.
3. Dua bilangan dipilih secara acak dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9. Jika jumlah bilangan-bilangan itu genap, tentukan peluang kejadian bahwa kedua bilangan yang terpilih itu ganjil.
4. Dalam sebuah kotak yang berisi 4 kelereng berwarna merah dan 8 kelereng berwarna putih. Dua kelereng diambil secara acak berturut-turut dari kotak tersebut dengan pengembalian. Tentukan peluang bahwa
   a. kedua kelereng yang terambil berwarna putih;
   b. kedua kelereng yang terambil berwarna merah.

   Coba kalian kerjakan kembali soal ini, tetapi pengambilan dilakukan dengan tanpa pengembalian.
5. Di dalam sebuah kotak terdapat 5 bola berwarna merah, 3 bola berwarna biru, dan 2 bola berwarna kuning. Sebuah bola diambil dari dalam kotak itu.
   a. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah bola berwarna biru.
   b. Jika bola yang terambil tidak dikembalikan, kemudian diambil sebuah bola lagi, tentukan peluang bahwa yang terambil adalah bola berwarna biru pada pengambilan pertama dan bola berwarna merah pada pengambilan kedua.
   c. Pada soal b, tentukan peluang bola yang terambil adalah bola berwarna kuning pada pengambilan pertama dan bola berwarna biru pada pengambilan kedua.
6. Dua kartu diambil dari satu set kartu bernomor 1 sampai dengan 20 satu per satu tanpa pengembalian. Tentukan peluang bahwa kedua kartu yang terambil adalah
   a. kartu pertama bilangan prima dan kedua bilangan genap;
   b. kartu pertama bilangan paling besar 4 dan kedua bilangan paling kecil 15.

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Coba kalian cari informasi yang berkaitan dengan peluang di internet atau perpustakaan, baik berupa tokoh-tokoh peluang maupun hal-hal yang berhubungan dengan materi peluang agar wawasan kalian bertambah.

Refleksi

Perhatikan kembali alat-alat yang sering digunakan dalam perhitungan peluang. Menurutmu, apakah dengan alat-alat itu dapat menimbulkan persepsi bahwa belajar peluang memiliki arti belajar berjudi? Jelaskan.

Rangkuman

1. Aturan pengisian tempat yang tersedia.
   Misalkan suatu kegiatan dapat dilakukan dengan n_1 cara yang berlainan, kegiatan yang kedua dengan n_2 cara yang berlainan, kegiatan ketiga dengan n_3 cara yang berlainan, …, dan kegiatan ke-r dengan n_r cara yang berlainan. Banyaknya cara untuk melakukan r kegiatan itu adalah $(n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_r)$ cara.
2. Faktorial dari bilangan asli n ditulis $n!$ dan dirumuskan dengan
   $n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$.
3. Permutasi r unsur dari n unsur ($r \leq n$) dirumuskan dengan $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.
4. Permutasi n unsur dengan n_1 unsur yang sama dari jenis pertama, n_2 unsur yang sama dari jenis kedua, ..., dan n_r yang sama dari jenis ke-r dirumuskan dengan
   $$P = \frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_r!}.$$
5. Permutasi siklis dari n unsur dirumuskan dengan $P_{\text{siklis}}(n) = (n - 1)!$
6. Kombinasi r unsur dari n unsur ($r \leq n$) dirumuskan dengan $C(n, r) = \dfrac{n!}{r! \times (n-r)!}$.
7. Peluang kejadian A dalam ruang sampel S adalah
   $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}.$$
8. Nilai $P(A)$ berkisar dari 0 sampai 1 atau $0 \leq P(A) \leq 1$.
9. Frekuensi harapan kejadian A dari n kali percobaan dirumuskan $F_{\text{har}}(A) = n \times P(A)$.
10. Jika komplemen kejadian A ditulis A^c, peluangnya adalah $P(A^c) = 1 - P(A)$.

11. Aturan penjumlahan
    a. Peluang gabungan dua kejadian $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
    b. Jika kedua kejadian itu saling lepas maka $P(A \cap B) = 0$ sehingga $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
12. Dua kejadian atau lebih dikatakan saling bebas stokastik apabila kejadian yang satu tidak bergantung pada kejadian yang lain.
13. a. Peluang kejadian bersyarat A dengan syarat B, ditulis $P(A/B)$ dirumuskan dengan $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
    b. Peluang kejadian bersyarat B dengan syarat A, ditulis $P(B/A)$, dirumuskan dengan $P(B/A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.

Latihan Ulangan Harian II

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Diketahui angka-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, banyaknya penyusunan bilangan yang terdiri atas empat angka dan tidak boleh terdapat angka yang diulang adalah ....
   a. 720
   b. 840
   c. 2.401
   d. 1.296
   e. 2.058
2. Diketahui persamaan $(n + 1)! = 10n!$. Nilai $\left(\frac{1}{2}(n+1) - 5\right)!$ adalah ....
   a. 0
   b. 1
   c. 9
   d. 10
   e. 19
3. Jika n adalah bilangan asli yang memenuhi persamaan $P(n, 5) = 2P(n, 3)$, nilai $2n^2 + n + 1$ adalah ....
   a. 55
   b. 56
   c. 60
   d. 65
   e. 70
4. Jika 4 anak laki-laki dan 3 anak perempuan duduk berderet pada 7 buah kursi yang disusun secara mendatar (berjajar), banyaknya cara duduk dengan urutan yang berbeda *tanpa* memerhatikan jenis kelamin adalah ....
   a. 144
   b. 720
   c. 5.040
   d. 40.320
   e. 40.500
5. Banyaknya susunan huruf-huruf yang berbeda yang dapat dibentuk dari kata "*BOROBUDUR*" adalah ....
   a. 24
   b. 1.296
   c. 5.040
   d. 22.680
   e. 362.880
6. Dalam rapat OSIS di sebuah SMA yang diadakan di suatu ruangan, dengan sebuah meja bundar dan 10 buah kursi mengelilingi meja tersebut, dihadiri oleh 10 pengurus. Banyaknya cara duduk kesepuluh pengurus pada kursi-kursi tersebut adalah ....
   a. 1.296
   b. 3.628
   c. 240.102
   d. 362.880
   e. 3.628.800

7. Suatu pertemuan dihadiri oleh 18 peserta. Apabila peserta saling berjabat tangan, banyaknya jabat tangan yang terjadi dalam pertemuan itu adalah ....
   a. 81
   b. 120
   c. 144
   d. 153
   e. 306
8. Suatu kompetisi sepak bola diikuti 7 tim, yaitu *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, dan *G*. Bendera tiap tim itu akan dikibarkan pada 7 tiang yang diatur dalam satu baris. Banyaknya cara untuk mengatur agar bendera-bendera tim *A* dan tim *B* berada di ujung adalah ....
   a. $\frac{5!}{2}$ cara
   b. 5! cara
   c. $\frac{7!}{2}$ cara
   d. 2(5!) cara
   e. 2(6!) cara
9. Seorang saudagar akan membeli 3 ekor kambing dan 4 ekor kerbau dari seorang peternak yang memiliki 5 ekor kambing dan 5 ekor kerbau. Saudagar itu dapat memilihnya dengan ....
   a. 15 cara
   b. 25 cara
   c. 35 cara
   d. 50 cara
   e. 120 cara
10. Seorang murid diminta mengerjakan 7 dari 10 soal ulangan dengan syarat soal nomor 1 sampai dengan 3 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil murid tersebut adalah ....
    a. 37
    b. 35
    c. 33
    d. 31
    e. 29
11. Suatu kelas terdiri atas 40 siswa. Dari jumlah tersebut, 25 siswa gemar Matematika, 21 siswa gemar Akuntansi, dan 9 siswa gemar kedua-duanya. Peluang seorang tidak gemar kedua-duanya adalah ....
    a. $\frac{31}{40}$
    b. $\frac{9}{40}$
    c. $\frac{3}{40}$
    d. $\frac{37}{40}$
    e. $\frac{12}{40}$
12. Sebuah kotak berisi 8 kelereng berwarna merah dan 6 kelereng berwarna biru. Jika diambil dua kelereng satu per satu *tanpa pengembalian*, peluang terambil kedua-duanya kelereng berwarna biru adalah ....
    a. $\frac{4}{13}$
    b. $\frac{15}{91}$
    c. $\frac{24}{91}$
    d. $\frac{14}{91}$
    e. $\frac{16}{14}$
13. Di dalam sebuah kantong terdapat 6 bola berwarna merah, 4 bola berwarna putih, dan 5 bola berwarna biru. Jika diambil 3 bola sekaligus secara acak, peluang terambil ketiga-tiganya memiliki warna yang berbeda adalah ....
    a. $\frac{4}{91}$
    b. $\frac{2}{91}$
    c. $\frac{1}{13}$
    d. $\frac{24}{91}$
    e. $\frac{70}{91}$

14. Sebuah dadu bersisi 6 dilemparkan sebanyak 600 kali. Frekuensi harapan munculnya angka 2 atau 5 adalah ....
    a. 100 kali
    b. 200 kali
    c. 300 kali
    d. 400 kali
    e. 500 kali
15. Sebuah dadu bersisi 6 dilempar 18 kali. Frekuensi harapan munculnya angka kurang dari 3 atau angka lebih dari 4 adalah ....
    a. 4 kali
    b. 6 kali
    c. 8 kali
    d. 12 kali
    e. 15 kali
16. Dari hasil penelitian yang dilakukan pada suatu desa terhadap kepemilikan pesawat TV dan radio, diperoleh data 20% penduduk memiliki TV, 40% penduduk memiliki radio, dan 15% penduduk memiliki TV maupun radio. Jika salah seorang warga dari desa itu diambil secara acak, peluang bahwa orang yang terambil itu memiliki TV *atau* radio adalah ....
    a. $\frac{15}{100}$
    b. $\frac{20}{100}$
    c. $\frac{9}{100}$
    d. $\frac{9}{20}$
    e. $\frac{15}{20}$
17. Diketahui kejadian A dan kejadian B adalah kejadian saling bebas stokastik, namun kejadian tersebut tidak saling lepas. Jika $P(A) = \frac{1}{3}$ dan $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$ maka $P(B)$ adalah ....
    a. $\frac{2}{5}$
    b. $\frac{4}{15}$
    c. $\frac{3}{15}$
    d. $\frac{1}{3}$
    e. $\frac{14}{15}$
18. Dua buah kelereng diambil satu per satu dari sebuah kantong yang berisi 8 kelereng berwarna putih dan 6 kelereng berwarna kuning. Peluang terambil kelereng berwarna putih dengan syarat sebelumnya telah terambil kelereng berwarna kuning adalah ....
    a. $\frac{4}{13}$
    b. $\frac{15}{91}$
    c. $\frac{24}{91}$
    d. $\frac{45}{91}$
    e. $\frac{35}{91}$
19. Sebuah mata uang dan sebuah dadu dilempar undi sekali. Peluang munculnya angka pada mata uang dan bilangan ganjil pada dadu adalah ....
    a. $\frac{5}{6}$
    b. $\frac{2}{3}$
    c. $\frac{1}{3}$
    d. $\frac{1}{4}$
    e. $\frac{1}{6}$

20. Dalam kotak berisi 7 kelereng berwarna merah dan 5 kelereng berwarna putih. Dari kotak itu diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Peluang terambil sekurang-kurangnya kelereng 1 putih adalah ....
    a. $\frac{7}{44}$
    b. $\frac{10}{44}$
    c. $\frac{34}{44}$
    d. $\frac{35}{44}$
    e. $\frac{37}{44}$
21. Kotak I berisi 3 bola merah dan 2 bola putih. Kotak II berisi 3 bola hijau dan 5 bola biru. Dari masing-masing kotak diambil 2 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil 2 bola merah dari kotak I dan 2 bola biru dari kotak II adalah ....
    a. $\frac{1}{10}$
    b. $\frac{3}{28}$
    c. $\frac{4}{15}$
    d. $\frac{3}{8}$
    e. $\frac{57}{140}$
22. Sekeping uang logam dilemparkan 4 kali. Peluang muncul gambar 3 kali adalah ....
    a. 0,2 d. 0,30
    b. 0,24 e. 0,50
    c. 0,25
23. Seorang penembak mempunyai kemampuan membidik dengan tepat sebesar 90%. Jika hasil bidikan yang diulang adalah bebas dan kemampuan tetap, maka peluang menembak 3 kali dengan hasil untuk pertama kali meleset dan dua kali berikutnya tepat adalah ....
    a. 0,81 d. 0,081
    b. 0,18 e. 0,027
    c. 0,09
24. A dan B mengikuti suatu tes. Peluang A dan B untuk lulus berturut-turut adalah 0,85 dan 0,6. Peluang A lulus, tetapi B tidak lulus adalah ....
    a. 0,09 d. 0,30
    b. 0,24 e. 0,25
    c. 0,35
25. Jika A dan B kejadian dengan $P(A \cup B)$ $= \frac{3}{4}$, $P(A^c) = \frac{2}{3}$, dan $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, maka $P(B) = ...$
    a. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{2}{3}$
    b. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{4}{5}$
    c. $\frac{1}{2}$

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diketahui persamaan $2P(n, 2) + 50 = P(2n, n)$. Tentukan nilai n^2.
2. Diketahui angka-angka enam bilangan cacah pertama. Dari angka-angka tersebut, tentukan banyaknya cara menyusun bilangan yang terdiri atas 5 angka (bilangan tidak boleh diawali dengan angka nol) jika
    a. angka-angka dalam suatu bilangan tidak boleh berulang;
    b. angka-angka dalam suatu bilangan boleh berulang.

3. Misalkan *A* adalah kejadian munculnya mata dadu bernomor genap dan *B* adalah kejadian munculnya mata dadu prima dari pelemparan sebuah dadu. Apakah kejadian *A* dan *B* saling bebas stokastik? Jelaskan.
4. Di dalam sebuah kelas terdiri atas 10 laki-laki dan 20 perempuan. Setengah dari laki-laki dan setengah dari perempuan mempunyai indeks prestasi di atas rata-rata. Seorang dipilih secara acak untuk mewakili kelas dalam suatu pertemuan. Tentukan peluang bahwa yang terpilih adalah laki-laki atau yang mempunyai indeks prestasi di atas rata-rata.
5. Tiga buah bola diambil secara acak dari sebuah kotak yang berisi 6 bola berwarna merah, 8 bola berwarna hitam, dan 4 bola berwarna putih. Tentukan peluang bahwa yang terambil adalah:
   a. ketiga-tiganya berwarna merah;
   b. dua bola berwarna putih dan sebuah bola berwarna merah;
   c. ketiga-tiganya mempunyai warna yang berbeda.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Rata-rata dari data: 7, 2, 4, 5, 7, 8, 9, x, 8 adalah 6,44. Nilai x = ...
   a. 6
   b. 7
   c. 7,5
   d. 8
   e. 8,9

2. Kuartil bawah dari data: 3, 5, 8, 9, 7, 2, 5, 7, 7, 8, 9, 9 adalah ....
   a. 3
   b. 5
   c. 7
   d. 8
   e. 9

3. Desil ke-5 dari data: 3, 5, 7, 9, 2, 4, 5, 9, 8, 8 adalah ....
   a. 2
   b. 2,5
   c. 3
   d. 5
   e. 6

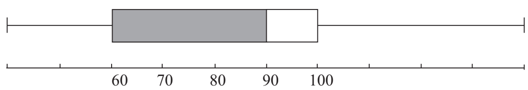
4. Suatu sekolah akan menyelidiki nilai rata-rata mata pelajaran Matematika pada 3 kelompok siswa. Kelompok I memiliki jumlah 25 siswa dengan nilai rata-rata 7,5, kelompok II memiliki jumlah 30 siswa dengan nilai rata-rata 7,0, dan kelompok III memiliki nilai rata-rata 6. Jika nilai rata-rata dari ketiga kelompok siswa tersebut adalah 7,0, jumlah siswa kelompok III adalah ....
   a. 10
   b. 12
   c. 14
   d. 15
   e. 16

5. Dari daftar distribusi frekuensi berikut, kuartil bawah, kuartil tengah, dan kuartil atas berturut-turut adalah ....

Nilai	Frekuensi
4	2
5	3
6	6
7	5
8	4
9	3
10	3

   a. 5, 7, dan 8
   b. 5, 7, dan 9
   c. 6, 7, dan 8
   d. 6, 7, dan 9
   e. 5, 6, dan 8

6. Diberikan data yang tersusun dalam diagram kotak garis berikut.



Statistik lima serangkai dari data itu adalah ....

a.

90	
60	100
50	140

b.

90	
60	100
50	110

c.

90	
50	100
40	140

d.

80	
60	90
40	100

e.

90	
60	100
40	140

7. Mean nilai Matematika dari 25 anak adalah 7. Jika nilai Matematika Ita digabungkan dengan kelompok itu, mean nilai Matematika kelompok itu menjadi 7,1. Nilai Matematika Ita adalah ....
   a. 8
   b. 9
   c. 10
   d. 9,5
   e. 9,6

8. Diketahui x_0 adalah mean dari data x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}. Jika pola data tersebut diubah menjadi $x_1 + 3$, $x_2 + 6$, $x_3 + 9$ ..., $x_{10} + 30$, mean data baru tersebut adalah ....

a. x_0
b. $x_0 + 10$
c. $x_0 + 16{,}5$
d. $x_0 + 20$
e. $x_0 + 26{,}5$

9. Nilai mean dari data yang disajikan pada tabel berikut adalah ....

x_i	f_i
1	6
2	12
3	18
4	10
5	8
6	6

a. 3,33
b. 3,41
c. 3,45
d. 4,41
e. 4,50

10. Perhatikan diagram batang daun berikut.

1	1 1
2	3 2
3	4 4 4
5	1 0 2
6	0 0

Dari diagram di atas, mean datanya adalah ....
a. 1,7
b. 2
c. 34
d. 37
e. 52,4

11. Kelas X terdiri atas 30 siswa dan kelas XI terdiri atas 40 siswa. Rata-rata ulangan Matematika kelas XI adalah 7,0. Jika kelas X dan XI digabungkan, rata-ratanya adalah 7,43. Rata-rata ulangan kelas X adalah ....
a. 6
b. 7
c. 7,5
d. 8
e. 8,5

12. Perhatikan tabel berikut.

Nilai Ujian	Frekuensi
31 – 40	4
41 – 50	3
51 – 60	11
61 – 70	21
71 – 80	33
81 – 90	15
91 – 100	13

Mean data tersebut adalah ....
a. 65,8
b. 70,8
c. 72,8
d. 75,5
e. 75,9

13. Median dari data yang terdapat pada tabel berikut adalah ....

Nilai	Frekuensi
1 – 10	4
11 – 20	6
21 – 30	12
31 – 40	15
41 – 50	3

a. 27,8
b. 28,8
c. 29,3
d. 29,8
e. 30

14. Kuartil ketiga dari data yang terdapat pada tabel berikut adalah ....

Berat Badan	Frekuensi
26 – 30	5
31 – 35	7
36 – 40	17
41 – 45	9
46 – 50	2

a. 37,85
b. 34,07
c. 41,06
d. 41,99
e. 48,01

15. Tabel di bawah ini menunjukkan distribusi frekuensi berat badan seseorang.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
40 – 47	4
48 – 55	21
56 – 63	36
64 – 71	17
72 – 79	12
80 – 87	10
88 – 95	6
Jumlah	106

Modus data tersebut adalah ....
a. 45,8
b. 52,8
c. 55,5
d. 58,8
e. 59,0

16. Desil kelima dari data: 2, 2, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 10 adalah ....
a. 5
b. 5,5
c. 6
d. 6,5
e. 7

17. Simpangan rata-rata dari data: 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6 adalah ....
a. $\frac{4}{5}$
b. $\frac{2}{5}$
c. $\frac{3}{5}$
d. $\frac{3}{4}$
e. $\frac{1}{2}$

18. Varians dari data: 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 8 adalah ....
a. $2\frac{1}{5}$
b. $2\frac{2}{5}$
c. $3\frac{1}{5}$
d. $2\frac{3}{5}$
e. $3\frac{2}{5}$

19. Disediakan angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Banyaknya bilangan 4 angka yang dapat dibentuk jika keempat bilangan itu tidak memuat angka yang sama adalah ....
a. 630
b. 550
c. 540
d. 360
e. 336

20. Nilai dari $P(6, 2) \times P(7, 4)$ adalah ....
a. 16.202
b. 18.182
c. 18.200
d. 20.240
e. 25.200

21. Banyaknya cara berdiri melingkar dari 10 orang adalah ....
a. 268.830
b. 326.880
c. 362.880
d. 2.688.300
e. 3.628.800

22. Nilai dari $C(8, 5) \times C(12, 10)$ adalah ....
a. 1.232
b. 1.322
c. 1.223
d. 2.123
e. 3.122

23. Banyaknya susunan huruf berbeda yang dapat disusun dari huruf-huruf pada kata "*MARIDJAN*" adalah ....
a. 20.160
b. 22.180
c. 32.048
d. 40.320
e. 120.960

24. Dalam suatu rapat kepanitiaan hari besar nasional akan disusun panitia yang terdiri atas ketua, sekretaris, dan bendahara. Jika terdapat 10 calon panitia, banyaknya susunan yang mungkin adalah ....
a. 208
b. 270
c. 702
d. 720
e. 5.040

25. Sebuah kotak berisi 7 bola merah, 5 bola putih, dan 4 bola kuning. Jika 4 bola diambil sekaligus secara acak, banyaknya cara pengambilan agar terambil 2 bola merah, 1 bola putih, dan 1 bola kuning adalah ....
a. 24
b. 204
c. 240
d. 402
e. 420

26. Sebuah kotak berisi kartu yang sama bentuknya bernomor 1 sampai dengan 9. Sebuah kartu diambil secara acak. Jika A adalah kejadian terambil kartu bernomor ganjil, peluang dari kejadian A adalah ....
    a. $\frac{1}{9}$
    b. $\frac{3}{9}$
    c. $\frac{4}{9}$
    d. $\frac{5}{9}$
    e. $\frac{7}{9}$
27. Pada percobaan pelemparan dadu sebanyak 600 kali, frekuensi harapan munculnya mata dadu prima adalah ....
    a. 150 kali
    b. 200 kali
    c. 300 kali
    d. 350 kali
    e. 400 kali
28. Pada percobaan pelemparan kubus bernomor, peluang kejadian munculnya bilangan bukan 3 adalah ....
    a. $\frac{1}{6}$
    b. $\frac{1}{3}$
    c. $\frac{1}{2}$
    d. $\frac{2}{3}$
    e. $\frac{5}{6}$
29. Satu lembar kartu diambil dari seperangkat kartu *bridge* secara acak. Peluang terambilnya kartu yang bukan *AS* adalah ....
    a. $\frac{1}{13}$
    b. $\frac{3}{13}$
    c. $\frac{12}{13}$
    d. $\frac{1}{52}$
    e. $\frac{5}{52}$
30. Di dalam suatu kelas terdiri atas 60 siswa. Dari jumlah tersebut, 36 siswa gemar Matematika, 23 siswa gemar Bahasa Inggris, dan 9 siswa gemar kedua-duanya. Peluang seorang tidak gemar kedua-duanya adalah ....
    a. $\frac{1}{60}$
    b. $\frac{7}{60}$
    c. $\frac{3}{60}$
    d. $\frac{13}{60}$
    e. $\frac{17}{60}$
31. Pada pelemparan mata uang logam sebanyak 1.000 kali, frekuensi harapan munculnya sisi gambar adalah ....
    a. 300 kali
    b. 400 kali
    c. 500 kali
    d. 600 kali
    e. 1.000 kali
32. Sebuah kotak berisi 12 kelereng berwarna merah dan 10 kelereng berwarna biru. Jika diambil dua kelereng satu persatu *tanpa pengembalian*, peluang terambil kedua-duanya kelereng berwarna biru adalah ....
    a. $\frac{25}{121}$
    b. $\frac{21}{121}$
    c. $\frac{15}{77}$
    d. $\frac{2}{11}$
    e. $\frac{13}{77}$
33. Sebuah kotak berisi 10 bola berwarna merah, 8 bola berwarna kuning, dan 2 bola berwarna hijau. Jika diambil tiga bola satu persatu dengan pengembalian, peluang terambil berturut-turut bola berwarna merah, kuning, dan hijau adalah ....
    a. $\frac{1}{25}$
    b. $\frac{1}{100}$
    c. $\frac{1}{50}$
    d. $\frac{2}{25}$
    e. $\frac{3}{50}$

34. Di dalam sebuah kantong terdapat 8 bola berwarna merah, 7 bola berwarna putih, dan 5 bola berwarna biru. Jika diambil 3 bola sekaligus secara acak, peluang terambil ketiga-tiganya memiliki warna yang berbeda adalah ....
    a. $\frac{28}{57}$
    b. $\frac{14}{57}$
    c. $\frac{7}{57}$
    d. $\frac{14}{114}$
    e. $\frac{7}{114}$

35. Sebuah kantong berisi 15 kelereng berwarna merah dan 20 kelereng berwarna putih. Jika diambil 4 kelereng sekaligus secara acak, peluang terambil 3 kelereng berwarna merah adalah ....
    a. $\frac{544}{2.618}$
    b. $\frac{455}{2.618}$
    c. $\frac{454}{2.618}$
    d. $\frac{545}{2.618}$
    e. $\frac{554}{2.618}$

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Dalam suatu kelas terdapat 22 siswa. Nilai rata-rata matematikanya 5 dan jangkauan 4. Jika seorang siswa yang paling rendah nilainya dan seorang siswa yang paling tinggi nilainya tidak disertakan, maka nilai rata-ratanya berubah menjadi 4,9. Tentukan nilai siswa yang paling rendah.
2. Dari 64 orang siswa yang terdiri atas 40 orang siswa kelas *K* dan 24 orang siswa kelas *L* diketahui nilai rata-rata siswa kelas *K* adalah 7,2 dari nilai rata-rata seluruh siswa kedua kelas tersebut. Tentukan nilai rata-rata matematika siswa kelas *L*.
3. Tes matematika diberikan kepada tiga kelas dengan jumlah siswa 100 orang. Nilai rata-rata kelas pertama, kedua, dan ketiga adalah 7, 8, $7\frac{1}{2}$. Jika banyaknya siswa kelas pertama 25 orang dan kelas ketiga 5 orang lebih banyak dari kelas kedua. Tentukan nilai rata-rata seluruh siswa tersebut.
4. Tentukan modus, mean, dan desil kedua dari data berikut.

Nilai	Frekuensi
1 – 5	4
6 – 10	6
11 – 15	12
16 – 20	3
21 – 25	18
26 – 30	7
Jumlah	50

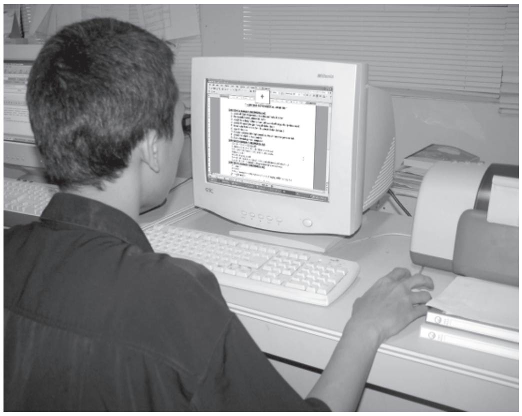
5. Tentukan simpangan rata-rata, varians, dan deviasi standar dari data yang tersaji dalam tabel berikut.

Berat Badan (kg)	Frekuensi
51 – 60	5
61 – 70	7
71 – 80	8
81 – 90	12
91 – 100	15
101 – 110	3
Jumlah	50

6. Sebuah kotak berisi 12 lampu yang 5 di antaranya dalam keadaan rusak. Tiga lampu diambil secara acak dari dalam kotak. Tentukan peluang bahwa lampu yang terambil adalah
   a. semua dalam keadaan baik,
   b. semua dalam keadaan rusak, dan
   c. 2 lampu baik dan 1 lampu rusak.
7. Dua dadu dilempar secara bersama-sama. Tentukan peluang munculnya:
   a. mata dadu berjumlah 7;
   b. mata dadu 4 pada kubus pertama dan angka 5 pada kubus kedua;
   c. mata dadu berjumlah 13;
   d. mata dadu sama;
   e. mata dadu berjumlah 8;
   f. mata dadu genap pada kubus pertama.
8. Pada sebuah pundi terdapat 10 manik-manik berwarna hitam, 8 manik-manik berwarna merah, dan 6 manik-manik berwarna kuning. Jika 4 manik-manik diambil sekaligus dari pundi tersebut, tentukan peluang yang terambil adalah manik-manik yang berwarna
   a. 2 hitam, 1 kuning, dan 1 merah;
   b. 3 merah dan 1 kuning;
   c. 1 hitam, 1 kuning, dan 2 merah;
   d. 1 hitam, 2 kuning, 1 merah;
   e. 3 hitam, 1 merah;
   f. semuanya berwarna hitam.

Bab III

Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers



Sumber: *Dokumen Penerbit*

Motivasi

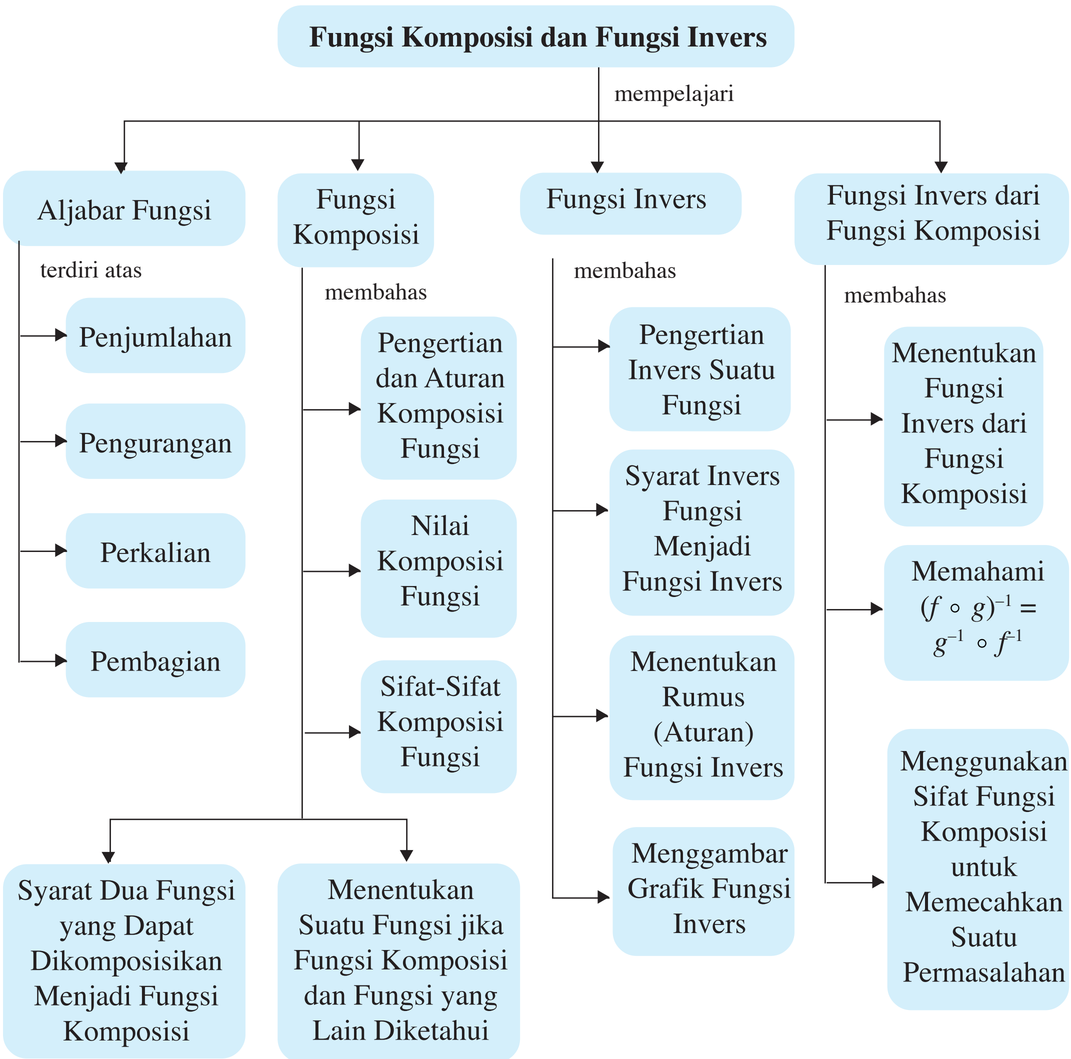
Pernahkah kalian membayangkan tombol-tombol (*tuts*) komputer dan tampilan pada layar saat kalian mengetik karakter per karakter? Coba perhatikan, ketika pada tombol tertulis huruf ”a”, setelah diketik pada layar juga muncul huruf ”a”. Demikian juga saat pada tombol diketik huruf ”k”, pada layar juga muncul huruf ”k”. Jika kalian pikirkan, tentunya ada hubungan (relasi) antara sistem pada tombol dan tampilan pada layar. Kasus ini termasuk aplikasi fungsi dalam kehidupan sehari-hari yang sering dijumpai.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menentukan aturan fungsi dari komposisi beberapa fungsi;
2. menjelaskan nilai fungsi komposisi terhadap komponen pembentuknya;
3. menyebutkan komponen fungsi komposisi jika aturan komposisinya diketahui;
4. menjelaskan kondisi agar suatu fungsi mempunyai invers;
5. menentukan aturan fungsi invers dari suatu fungsi;
6. menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya.

Peta Konsep



Kata Kunci

- domain
- fungsi bijektif
- fungsi identitas
- fungsi invers
- kodomain
- peta
- range

Di SMP, kalian telah memahami pengertian fungsi, daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil. Demikian juga di SMA kelas X. Pada bagian ini, kita lanjutkan pembahasan dengan mempelajari aljabar fungsi, fungsi komposisi, fungsi invers, dan fungsi invers dari fungsi komposisi.

Sebelum mempelajari bab ini, coba kerjakan soal-soal berikut.

Uji Prasyarat **Kerjakan di buku tugas**

1. Misalkan $f(x)$ dan $g(x)$ adalah fungsi-fungsi aljabar. Tentukan hasil operasi berikut.
   a. $f(x) = 2x + 5$; $g(x) = x^2 - 6x + 7$
      $f(x) + g(x) = ...$
   b. $f(x) = 2x^2 - 6x - 1$; $g(x) = x^3$
      $f(x) - g(x) = ...$
   c. $f(x) = \frac{1}{x}$; $g(x) = \frac{1}{x^2}$
2. Jika $f(x) + g(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 8}$ dan $f(x) = \frac{1}{x+2}$, tentukan rumus $g(x)$.

Setelah kalian mampu menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Aljabar Suatu Fungsi

Dalam bilangan real, kita sudah mengenal beberapa operasi aljabar, antara lain penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan perpangkatan. Operasi aljabar tersebut dapat juga diterapkan dalam fungsi. Misalkan diketahui dua fungsi $f(x)$ dan $g(x)$. Operasi aljabar pada kedua fungsi tersebut adalah sebagai berikut.

a. Penjumlahan fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dinyatakan dengan
   $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
b. Selisih fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dinyatakan dengan
   $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$.
c. Perkalian fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ dinyatakan dengan
   $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
d. Pembagian fungsi $f(x)$ dan $g(x)$, untuk $g(x) \neq 0$ dinyatakan dengan

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Tentu kalian telah mengenal daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil. Apa nama lain dari daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil? Jelaskan masing-masing daerah tersebut. Apa yang dimaksud dengan daerah asal alami? Berikan contohnya.

Contoh:

1. Diketahui $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x - 1$, untuk $x \in R$. Tentukan fungsi-fungsi berikut ini.

   a. $(f + g)(x)$ c. $(f \times g)(x)$

   b. $(f - g)(x)$ d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

   Penyelesaian:

   a. $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x + 2) + (2x - 1) = 3x + 1$

   b. $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 2) - (2x - 1) = -x + 3$

   c. $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x) = (x + 2) \times (2x - 1) = 2x^2 + 3x - 2$

   d. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x+2}{2x-1}$, untuk $2x - 1 \neq 0$

2. Didefinisikan fungsi f dan g sebagai himpunan pasangan berurutan sebagai berikut.

   $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 1)\}$

   $g = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2)\}$

   Tentukan $f + g$, $f - g$, dan $f \times g$.

   Penyelesaian:

   $f + g \equiv 1 \to 3 + 5; 2 \to 4 + 4; 3 \to 5 + 3; 4 \to 1 + 2$

   Jadi, $f + g = \{(1, 8), (2, 8), (3, 8), (4, 3)\}$.

   $f - g \equiv 1 \to 3 - 5; 2 \to 4 - 4; 3 \to 5 - 3; 4 \to 1 - 2$

   Jadi, $f - g = \{(1, -2), (2, 0), (3, 2), (4, -1)\}$.

   $f \times g \equiv 1 \to 3 \times 5; 2 \to 4 \times 4; 3 \to 5 \times 3; 4 \to 1 \times 2$

   Jadi, $f \times g = \{(1, 15), (2, 16), (3, 15), (4, 2)\}$.

Problem Solving

Diketahui $f(x) = 1 - x^2$ dan $(f - g)(x) = 4x + 2x^2$. Tentukan $g(x)$.

Penyelesaian:

$f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow 4x + 2x^2 = (1 - x^2) - g(x)$

$\Leftrightarrow g(x) = (1 - x^2) - (4x + 2x^2)$

$\Leftrightarrow g(x) = 1 - 4x - 3x^2$

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui $f(x) = 2x + 7$ dan $g(x) = x + 1$. Tentukan fungsi h yang dirumuskan dengan $h(x) = (f \times g)(x) - g(x)$.
2. Misalkan diketahui $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$ dan $(f + g)(x) = \dfrac{x - 2}{(x^2 - 9)(x - 3)}$. Tentukan $g(x)$.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan rumus dari $f + g$, $f - g$, $g - f$, dan $f \times g$ untuk f dan g pada R dengan ketentuan sebagai berikut.
   a. $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = 3 - 5x$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{x + 1}$, untuk $x \neq -1$; $g(x) = \dfrac{5x}{2x - 4}$, untuk $x \neq 2$
   c. $f(x) = 2$; $g(x) = \dfrac{3}{x - 1}$, untuk $x \neq 1$
   d. $f(x) = (x - 2)$; $g(x) = 2x - 4$
2. Tentukan $\dfrac{f}{g}$ dan domainnya agar $\dfrac{f}{g}$ merupakan suatu fungsi.
   a. $f(x) = 2 - 3x$; $g(x) = 3 + 5x$
   b. $f(x) = x$; $g(x) = x^2 - x$
   c. $f(x) = 2x$; $g(x) = 8x - 6x^2$
   d. $f(x) = x^2 - 1$; $g(x) = x + 1$
3. Jika $f(x) = 2x - 5$ dan $g(x) = x + 7$ dengan f dan g fungsi-fungsi pada bilangan real, tentukan
   a. rumus $f + g$, $f - g$, dan $f \times g$;
   b. $(f + g)(5)$, $(f - g)(2)$, dan $(f \times g)(-1)$.
4. Diketahui $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ (R = himpunan bilangan real) dengan aturan $f(x) = x^3 - 1$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukan
   a. rumus $\dfrac{f}{g}$, kemudian sederhanakan;
   b. domain $\dfrac{f}{g}$ agar $\dfrac{f}{g}$ merupakan suatu fungsi;
   c. nilai $\left(\dfrac{f}{g}\right)(3)$ dan $\left(\dfrac{f}{g}\right)(-4)$.
5. Fungsi f, g, dan h didefinisikan sebagai himpunan pasangan berurutan seperti berikut.
   $f = \{(3, 3), (4, 4), (1, 1), (2, 2)\}$
   $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
   $h = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (1, 4)\}$

Tentukan

a. $f + g, f + h$, dan $g + h$;

b. $f - g, f - h$, dan $g - h$;

c. $\dfrac{f}{g}, \dfrac{f}{h}$, dan $\dfrac{g}{h}$;

d. $f \times g, f \times h$, dan $g \times h$.

6. Diketahui fungsi f dan g didefinisikan sebagai himpunan pasangan berurutan seperti berikut.
$f = \{(1, 6), (2, 12), (3, 24), (4, 32)\}$
$g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$
Tentukan fungsi-fungsi berikut ini.
   a. $f + g$
   b. $f \times g$
   c. $\dfrac{f}{g}$
   d. $g - f$
   e. $f - g$
   f. $\dfrac{g}{f}$
7. Jika $f(x) = x^2 + 3$ dan $(f \times g)(x) = 2x^4 + 6x^2$, tentukan rumus fungsi g.
8. Misalkan $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ dan $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{2}{x^5}$, tentukan $g(x)$.

B. Fungsi Komposisi

Kalian tentu tahu bahwa kertas dibuat dari kayu. Misalkan mesin A adalah mesin pengolah kayu menjadi pulp, sedangkan B adalah mesin pengolah pulp menjadi kertas. Jika diilustrasikan dengan bagan, tampak sebagai berikut.

Kayu $\xrightarrow{\text{Proses I}}$ Pulp (pada mesin A)

Pulp $\xrightarrow{\text{Proses II}}$ Kertas (pada mesin B)

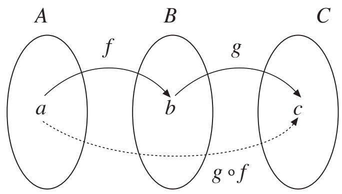
Misalkan mesin C adalah mesin yang mampu mengolah kayu langsung menjadi kertas, tentu dalam mesin C terjadi proses I dan II.

$$\begin{tikzcd} \text{Kayu} \arrow[r, "\text{Proses I}"] \arrow[rr, bend right, "\text{Mesin } C"'] & \text{Pulp} \arrow[r, "\text{Proses II}"] & \text{Kertas} \end{tikzcd}$$

Jadi, pada mesin C terjadi komposisi antara proses I dan proses II. Analog dengan ilustrasi di atas, tentu kalian akan dapat memahami komposisi fungsi.

1. Pengertian dan Aturan Fungsi Komposisi

Jika f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, sedangkan g adalah fungsi dari himpunan B ke himpunan C, fungsi dari himpunan A ke himpunan B, kemudian dilanjutkan



Gambar 3.1

fungsi dari himpunan B ke himpunan C dinamakan *fungsi komposisi* dari f dan g yang dilambangkan dengan $g \circ f$ (dibaca g bundaran f). Untuk lebih jelasnya, perhatikan gambar di samping.

Diketahui himpunan A, B, dan C seperti pada gambar di samping. Jika $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, $f(a) = b$, dan $f(b) = c$ maka $(g \circ f)(a) = g(f(a)) = c$. Secara umum, fungsi komposisi didefinisikan sebagai berikut.

> Misalkan fungsi $f : A \rightarrow B$ ditentukan oleh aturan $f(a) = b$, sedangkan fungsi $g : B \rightarrow C$ ditentukan oleh aturan $g(b) = c$. Fungsi komposisi g dan f, ditulis $g \circ f$ adalah sebuah fungsi yang ditentukan dengan aturan $(g \circ f)(a) = g(f(a))$.

Fungsi $g \circ f$ adalah komposisi fungsi g dan f yang pengerjaannya dilakukan pada fungsi f terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan fungsi g.

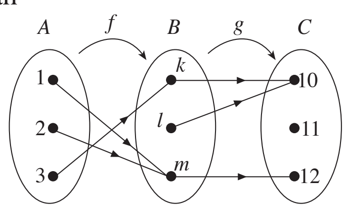
Diskusi

Berpikir Kritis

Menurutmu, apakah setiap fungsi aljabar dapat dikomposisikan? Jika tidak, syarat apa yang harus dipenuhi? Berikan contoh kasus fungsi-fungsi yang tidak dapat dikomposisikan.

Contoh:

1. Diketahui fungsi-fungsi f dan g dalam diagram panah sebagai berikut.
   Tentukan $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(2)$, dan $(g \circ f)(3)$.



Gambar 3.2

   Penyelesaian:
   Dari gambar di samping, tampak bahwa
   $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(m) = 12$;
   $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(m) = 12$;
   $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(k) = 10$.

2. Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada bilangan real ditentukan oleh aturan $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukan komposisi fungsi berikut ini.
   a. $(g \circ f)(x)$
   b. $(f \circ g)(x)$
   c. Apakah $f \circ g = g \circ f$?

   Penyelesaian:
   a. $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x - 2) = 2(3x - 2) = 6x - 4$
   b. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 3(2x) - 2 = 6x - 2$
   c. Karena $(g \circ f)(x) = 6x - 4$, sedangkan $(f \circ g)(x) = 6x - 2$ maka $g \circ f \neq f \circ g$.

2. Nilai Fungsi Komposisi

Nilai dari suatu fungsi komposisi dapat ditentukan dengan menggunakan dua cara, yaitu

a. dengan langsung mengoperasikan fungsi-fungsi tersebut secara berurutan;

b. dengan menentukan rumus komposisi fungsi terlebih dahulu, kemudian menyubstitusikan nilai-nilai pada domainnya ke dalam rumus komposisi itu.

Contoh:

1. Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada himpunan bilangan real yang didefinisikan dengan $f(x) = 4x$ dan $g(x) = \frac{2}{3}x - 2$. Tentukan nilai $(f \circ g)(2)$ dengan dua cara di atas.

Penyelesaian:

a. *Cara 1:*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(2) &= f(g(2)) \\ &= f\left(\frac{2}{3}(2) - 2\right) \\ &= f\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= 4(-\frac{2}{3}) \\ &= -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

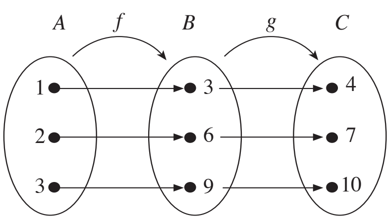
b. *Cara 2:*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(\frac{2}{3}x - 2) \\ &= 4(\frac{2}{3}x - 2) \\ &= \frac{8}{3}x - 8 \\ (f \circ g)(2) &= \frac{8}{3}(2) - 8 \\ &= -\frac{8}{3}\end{aligned}$$

2. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan sebagai himpunan pasangan berurutan berikut.
$f = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9)\}$
$g = \{(3, 4), (6, 7), (9, 10)\}$
Tentukan $g \circ f$ dan $(g \circ f)(2)$.

Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.3

Pada gambar di samping, tampak bahwa
- $g \circ f = \{(1, 4), (2, 7), (3, 10)\}$;
- $(g \circ f)(2) = 7$.

3. Sifat-Sifat Komposisi Fungsi

Untuk dapat mengetahui sifat-sifat dari komposisi fungsi, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan — Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Memahami sifat-sifat yang berlaku pada komposisi fungsi.

Permasalahan:
Sifat-sifat apakah yang berlaku pada komposisi fungsi?

Langkah-Langkah:
Jawablah soal-soal berikut.

1. Misalkan fungsi f dan g pada himpunan bilangan real didefinisikan oleh $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = x - 3$. Tentukan
   a. $(g \circ f)(x)$;
   b. $(f \circ g)(x)$;
   c. Apakah $g \circ f = f \circ g$?
2. Misalkan fungsi-fungsi f, g, dan h pada bilangan real didefinisikan oleh $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x - 2$, dan $h(x) = 3x$.
   a. Tentukan $(f \circ g)(x)$, $((f \circ g) \circ h)(x)$, $(g \circ h)(x)$, dan $(f \circ (g \circ h))(x)$.
   b. Apakah $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$?
3. Misalkan f dan I adalah fungsi pada himpunan bilangan real yang didefinisikan $f(x) = x^2 + 3x - 4$ dan $I(x) = x$.
   a. Tentukan $(f \circ I)(x)$ dan $(I \circ f)(x)$.
   b. Apakah $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x)$?

Kesimpulan:
Dari langkah-langkah di atas, dapat ditemukan sifat-sifat komposisi fungsi.

Dari kegiatan di atas, diperoleh beberapa sifat komposisi fungsi sebagai berikut.

Sifat-sifat komposisi fungsi

a. Komposisi fungsi pada umumnya *tidak bersifat komutatif*:
   $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$.
b. Komposisi fungsi bersifat asosiatif:
   $((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$.
c. Terdapat fungsi identitas $I(x) = x$ sehingga
   $(f \circ I)(x) = (I \circ f)(x) = f(x)$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

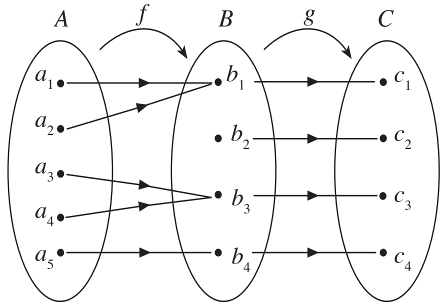
NFungsi $f : R \rightarrow R$.
Diketahui $f(x) = 2 - 3$ dan $g(x) = x^2 + 2x - 3$.
Nilai dari $(f \circ g)(2) = ...$

a. 0
b. 1
c. 7
d. 8
e. 11

Soal Ebtanas SMA, 1990

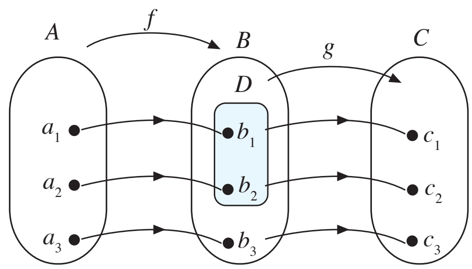
4. Syarat agar Dua Fungsi Dapat Dikomposisikan

Tidak setiap dua fungsi dapat dikomposisikan menjadi fungsi komposisi. Untuk mengetahui syarat agar komposisi dua buah fungsi merupakan sebuah fungsi komposisi, perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.4

Dari gambar di samping, yaitu $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ tampak bahwa
$f(a_1) = b_1$ dan $g(b_1) = c_1$ sehingga $(g \circ f)(a_1) = c_1$;
$f(a_2) = b_1$ dan $g(b_1) = c_1$ sehingga $(g \circ f)(a_2) = c_1$;
$f(a_3) = b_3$ dan $g(b_3) = c_3$ sehingga $(g \circ f)(a_3) = c_3$;
$f(a_4) = b_3$ dan $g(b_3) = c_3$ sehingga $(g \circ f)(a_4) = c_3$;
$f(a_5) = b_4$ dan $g(b_4) = c_4$ sehingga $(g \circ f)(a_5) = c_4$.
Dengan demikian, disimpulkan bahwa $(g \circ f): A \to C$ merupakan sebuah fungsi atau fungsi komposisi.



Gambar 3.5

Dari gambar tersebut, terlihat bahwa g adalah fungsi dengan domain himpunan B, sedangkan f adalah fungsi dengan daerah kawan himpunan B. Range f adalah $\{b_1, b_3, b_4\}$ sehingga range f merupakan himpunan bagian dari himpunan B. Dengan kata lain, range f merupakan himpunan bagian dari domain g. Sekarang, perhatikan fungsi f dan g yang didefinisikan seperti **Gambar 3.5**.

Pada gambar tersebut, fungsi $f: A \to B$ dan fungsi $g: D \to C$ dengan $D \subseteq B$. Jika dibuat komposisi fungsi $g \circ f$, komposisi fungsi tersebut bukan merupakan sebuah fungsi karena $f(a_3) = b_3$ bukan anggota domain g sehingga b_3 oleh g tidak dipetakan. Jika kita perhatikan, ternyata domain g merupakan himpunan bagian dari range f. Oleh karena itu, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

> Fungsi g dapat dikomposisikan dengan fungsi f sehingga komposisi fungsi $g \circ f$ merupakan sebuah fungsi apabila range f merupakan himpunan bagian dari domain g atau dapat ditulis $R_f \subset D_g$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $f: R \to R$, dengan $f(x) = 2x - 2$ dan $g : R \to R$, dengan $g(x) = x^2 - 1$ maka $(f \circ g)(x + 1) = ...$
a. $2x^2 - 4$
b. $2x^2 - 5$
c. $2x^2 + 4x - 2$
d. $2x^2 - 4x + 1$
e. $2x^2 - 2$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar 1996

5. Komposisi dari Dua Fungsi atau Lebih

Suatu fungsi komposisi dapat tersusun atas dua fungsi atau lebih. Jika komposisi fungsi terdiri atas 3 fungsi atau lebih, pengerjaannya harus dilakukan secara berurutan atau tidak boleh terbalik (ingat: komposisi fungsi pada umumnya bersifat komutatif). Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Diketahui fungsi f, g, dan h pada bilangan real dan didefinisikan $f(x) = x^2$, $g(x) = 5x + 3$, dan $h(x) = \sqrt{x+1}$. Tentukan komposisi fungsi berikut ini.

a. $(f \circ g)(x)$

b. $(g \circ f \circ h)(x)$

Penyelesaian:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(5x + 3) = (5x + 3)^2 = 25x^2 + 30x + 9$

b. $$\begin{aligned}(g \circ f \circ h)(x) &= (g \circ f)(h(x)) = (g \circ f)(\sqrt{x+1})\\ &= g(f(\sqrt{x+1}))\\ &= g((\sqrt{x+1})^2) = g(x + 1)\\ &= 5(x + 1) + 3 = 5x + 8\end{aligned}$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Dari fungsi $f: R \rightarrow R$ diketahui bahwa $f(x) = x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 6x + 7$, maka $g(x) = ...$

a. $x^2 + 6x - 4$

b. $x^2 + 3x - 2$

c. $x^2 - 6x + 4$

d. $x^2 + 6x + 4$

e. $x^2 - 3x + 2$

Soal Ebtanas SMA, 1993

6. Menentukan Fungsi Penyusun dari Fungsi Komposisi

Jika suatu fungsi f diketahui dan fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$ juga diketahui maka fungsi g dapat ditentukan. Demikian juga jika yang diketahui fungsi g dan fungsi komposisi $f \circ g$ atau $g \circ f$, fungsi f dapat ditentukan. Untuk memahami cara menentukan sebuah fungsi jika diketahui fungsi komposisi dan fungsi yang lain, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

Diketahui fungsi $(f \circ g)(x) = 4 - 2x$ dan $g(x) = x + 6$. Tentukan fungsi $f(x)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 4 - 2x\\ \Leftrightarrow f(g(x)) &= 4 - 2x\\ \Leftrightarrow f(x + 6) &= 4 - 2x\end{aligned}$$

Misalkan $x + 6 = y$ maka $x = y - 6$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}f(y) &= 4 - 2(y - 6)\\ &= 4 - 2y + 12\\ &= 16 - 2y\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = 16 - 2x$.

Problem Solving

Diketahui fungsi $f(x) = 4x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - x + 3$. Tentukan fungsi $g(x)$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= 2x^2 - x + 3 \\ \Leftrightarrow f(g(x)) &= 2x^2 - x + 3 \\ \Leftrightarrow 4g(x) - 1 &= 2x^2 - x + 3 \\ \Leftrightarrow 4g(x) &= 2x^2 - x + 4 \\ \Leftrightarrow g(x) &= \frac{1}{4}(2x^2 - x + 4) \end{aligned}$$

Jadi, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + 1$.

Soal Terbuka

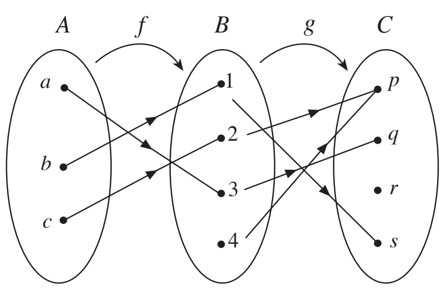
Kerjakan di buku tugas

1. Fungsi f, g, dan h terdefinisi pada bilangan real, dengan $f(x) = 1 - 3x$ dan $g(x) = 5x + 2$. Tentukan rumus fungsi $h(x)$ jika diketahui komposisi fungsi sebagai berikut.
   a. $(f \circ g \circ h)(x) = 15 - 30x$
   b. $(g \circ h \circ f)(x) = -45x - 17$
   c. $(h \circ g \circ f)(x) = 15x^2 - 65$
   d. $(f \circ g \circ h)(x) = 30x + 13$
2. Diketahui fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$. Jika $f(x) = \sqrt{x-5}$ dan $(g \circ f)(x) = x - 2$, tentukan $g(x^2 - 1)$.
   Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4$.
   Tentukan rumus fungsi $g(x)$.

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui fungsi $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow C$ yang ditentukan dengan aturan seperti pada diagram di samping.
   a. Nyatakan fungsi f dan g dalam himpunan pasangan berurutan.
   b. Tentukan nilai $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$, dan $(g \circ f)(c)$.



Gambar 3.6

2. Diketahui fungsi f dan g yang ditentukan sebagai himpunan pasangan berurutan berikut.
   $f = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 4)\}$
   $g = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$

a. Tentukan $(g \circ f)(1)$, $(g \circ f)(3)$, $(f \circ g)(2)$, dan $(f \circ g)(4)$.
b. Nyatakan $f \circ g$ dan $g \circ f$ dalam himpunan pasangan berurutan.

3. Jika f dan g fungsi-fungsi pada bilangan real, tentukan rumus $f \circ g$ dan $g \circ f$ berikut.
   a. $f(x) = 2x - 1$; $g(x) = x^2 + x$
   b. $f(x) = x + x^2$; $g(x) = x + 1$
   c. $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 - x + 1$
   d. $f(x) = x^2 + 1$; $g(x) = 3x - 1$
   e. $f(x) = -3x$; $g(x) = x^3 - 3x$
   f. $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x^2 + 1$
4. Diketahui $g(x) = 2x^2 + 3x$ dan $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 23x + 35$. Jika fungsi f dan g pada bilangan real, tentukan rumus fungsi $f(x)$.
5. Fungsi f dan g didefinisikan pada bilangan real, dengan $g(x) = x - 2$ dan komposisi fungsi $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 8x - 11$.
   a. Tentukan rumus fungsi $f(x)$.
   b. Tentukan nilai $(f \circ g)(3)$.
   c. Tentukan nilai a jika diketahui $(f \circ g)(a) = 5$.
6. Fungsi f, g, dan h pada bilangan real ditentukan dengan aturan $f(x) = x + 3$, $g(x) = 2x - 1$, dan $h(x) = x^2$. Tentukan berikut ini.
   a. $(f \circ g \circ h)(x)$
   b. $(h \circ g \circ f)(x)$
   c. $(f \circ g \circ h)(3)$
   d. $(h \circ g \circ f)(3)$
7. Didefinisikan fungsi $f(x) = x - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x}$. Tentukan domain dari f dan g agar kedua fungsi tersebut dapat dikomposisikan menjadi $f \circ g$ dan $g \circ f$.
8. Diketahui $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = \dfrac{x-1}{x+4}$. Jika $(f \circ g)(a) = 5$, tentukan nilai a.

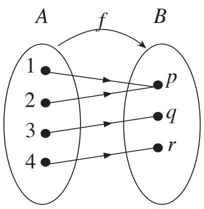
C. Fungsi Invers

1. Pengertian Invers Suatu Fungsi

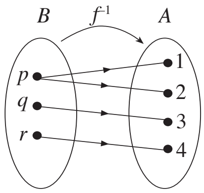
Misalkan f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B yang dinyatakan dalam bentuk pasangan berurutan $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$. Suatu relasi dari himpunan B ke himpunan A yang anggota-anggotanya adalah pasangan berurutan (b, a) dengan $b \in B$, $a \in A$ dinamakan *invers (kebalikan) fungsi f*. Invers dari f dinyatakan dengan f^{-1}. Dengan kata lain, invers suatu fungsi f didefinisikan sebagai berikut.

> Jika fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $f = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ maka invers dari fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ yang ditentukan dengan pasangan berurutan $f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A\}$.

Contoh:



Gambar 3.7



Gambar 3.8

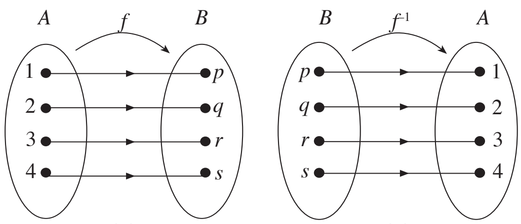
Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{p, q, r\}$. Fungsi $f : A \to B$ dinyatakan dengan diagram panah seperti **Gambar 3.7**. Tentukan invers fungsi f dan selidiki apakah invers dari f merupakan fungsi.

Penyelesaian:

Invers fungsi f atau f^{-1} dapat digambarkan seperti tampak pada **Gambar 3.8**. Pada gambar tersebut terlihat bahwa f^{-1} bukan merupakan suatu fungsi sebab terdapat anggota himpunan B, yaitu p yang mempunyai dua kawan pada himpunan A.

2. Syarat agar Invers Suatu Fungsi Merupakan Fungsi (Fungsi Invers)

Perhatikan gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 3.9

Misalkan himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{p, q, r, s\}$. Suatu fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dinyatakan dengan diagram panah seperti pada **Gambar 3.9** (a). Invers fungsi f atau f^{-1} dari himpunan B ke himpunan A dinyatakan dengan diagram panah pada **Gambar 3.9** (b). Perhatikan bahwa domain dari f^{-1} merupakan kodomain f. Berdasarkan pengertian fungsi, f^{-1} merupakan suatu fungsi apabila setiap anggota himpunan B harus terkawankan dengan tepat satu anggota himpunan A. Hal ini hanya terjadi apabila fungsi $f : A \to B$ merupakan fungsi yang berkorespondensi satu-satu.

Jadi, syarat agar invers suatu fungsi merupakan fungsi (fungsi invers) dapat dirumuskan sebagai berikut.

> Invers suatu fungsi f atau f^{-1} merupakan sebuah fungsi jika fungsi f merupakan korespondensi satu-satu. Fungsi yang berkorespondensi satu-satu disebut *fungsi bijektif*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai fungsi invers $f^{-1}(2)$ dari $f(x) = \dfrac{3x + 4}{2x - 1}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$ adalah ....

a. 6

b. $3\frac{1}{3}$

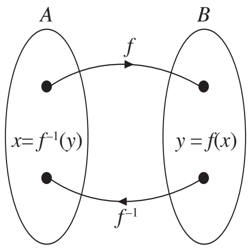
c. 2

d. $\frac{6}{7}$

e. $\frac{2}{7}$

Soal Ebtanas SMA, 1991

3. Menentukan Rumus (Aturan) Invers Fungsi



Gambar 3.10

Misalkan f adalah fungsi bijektif dari himpunan A ke himpunan B. Jika $x \in A$, $y \in B$, dan y adalah peta dari x oleh fungsi f, maka fungsi f dapat dirumuskan $f(x) = y$. Jika f^{-1} adalah invers dari fungsi f, maka x adalah peta dari y oleh fungsi f^{-1} dan ditulis $f^{-1}(y) = x$.

Dengan demikian, untuk menentukan rumus dari f^{-1}, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut.

a. Misalkan $y = f(x)$.
b. Nyatakan x dalam y (x sebagai fungsi y).
c. Gantilah x dengan $f^{-1}(y)$.
d. Gantilah y pada $f^{-1}(y)$ dengan x untuk mendapatkan $f^{-1}(x)$.

Agar kalian lebih memahami langkah-langkah menentukan invers fungsi di atas, perhatikan contoh-contoh berikut.

Contoh:

1. Carilah rumus invers dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 3x + 2$
   b. $f(x) = \dfrac{3x+2}{4x-1}$, untuk $x \neq \dfrac{1}{4}$

   Penyelesaian:

   a. $y = f(x)$
   $\Leftrightarrow y = 3x + 2$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{y-2}{3}$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y-2}{3}$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$

   Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{3}$.

   b. $y = f(x)$
   $\Leftrightarrow y = \dfrac{3x+2}{4x-1}$
   $\Leftrightarrow 4xy - y = 3x + 2$
   $\Leftrightarrow 4xy - 3x = y + 2$
   $\Leftrightarrow (4y - 3)x = y + 2$
   $\Leftrightarrow x = \dfrac{y+2}{4y-3}$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{4y-3} \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{4x-3}$

   Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{4x-3}$.

2. Sebuah fungsi f pada bilangan real ditentukan dengan rumus $f(x) = x + 3$.
   a. Tentukan $f^{-1}(x)$.
   b. Tentukan $(f \circ f^{-1})(x)$.
   c. Tentukan $(f^{-1} \circ f)(x)$.

   Apa yang dapat disimpulkan dari jawaban b dan c?

   Penyelesaian:

   a. $f(x) = x + 3$
   Misalkan $y = f(x) \Leftrightarrow y = x + 3$
   $\Leftrightarrow x = y - 3$
   $\Leftrightarrow f^{-1}(y) = y - 3$

   Jadi, $f^{-1}(x) = x - 3$.

b. $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$
$= f(x - 3)$
$= (x - 3) + 3$
$= x$

c. $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$
$= f^{-1}(x + 3)$
$= (x + 3) - 3$
$= x$

Dari jawaban b dan c, diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika f^{-1} adalah invers dari fungsi f, berlaku
$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x = I(x)$.
Fungsi $I(x) = x$ disebut fungsi identitas

Diskusi Berpikir Kritis

Invers suatu fungsi f merupakan sebuah fungsi jika fungsi f merupakan korespondensi satu-satu. Jelaskan mengapa harus demikian?

4. Menggambar Grafik Fungsi Invers

Sebelum lebih lanjut mempelajari bagaimana cara menggambar grafik fungsi invers, coba kalian pelajari cara menentukan domain dan kodomain fungsi invers terlebih dahulu. Mengapa domain dan kodomain harus kalian kuasai terlebih dahulu?

Menggambar suatu fungsi tentu erat hubungannya dengan domain dan kodomainnya.

Menentukan Domain dan Kodomain Fungsi Invers

Kalian telah mengetahui bahwa invers fungsi f merupakan sebuah fungsi apabila fungsi f bijektif. Fungsi bijektif adalah fungsi yang sekaligus merupakan fungsi surjektif dan fungsi injektif. Fungsi surjektif merupakan suatu fungsi yang memiliki daerah hasil dan kodomain sama. Adapun fungsi injektif merupakan suatu fungsi dengan setiap anggota domain yang berbeda mempunyai peta yang berbeda. Dengan memerhatikan syarat tersebut, domain dan kodomain suatu fungsi agar mempunyai fungsi invers dapat ditentukan.

Contoh:

1. Diketahui fungsi f ditentukan dengan rumus $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$.
   a. Carilah rumus $f^{-1}(x)$.
   b. Tentukan domain dan kodomain fungsi f agar $f(x)$ mempunyai fungsi invers.

   Penyelesaian:

   a. Misalkan $y = f(x)$

   $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow y = \frac{2}{x+1} \\ &\Leftrightarrow xy + y = 2 \\ &\Leftrightarrow xy = 2 - y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{2-y}{y} \\ &\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{2-y}{y} \end{aligned}$$

   Jadi, invers fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{x}$.

   b. 1) Dengan memerhatikan definisi sebuah fungsi maka domain dari fungsi $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ adalah semua bilangan real yang membuat penyebutnya tidak nol atau $x + 1 \neq 0$. Jadi, domain $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$ adalah $x \neq -1$ untuk $x \in R$. (R = himpunan bilangan real.)

   2) Dari jawaban a, diperoleh $f^{-1}(x) = \dfrac{2-x}{x}$ sehingga domain $f^{-1}(x)$ adalah semua bilangan real yang membuat penyebutnya tidak bernilai nol atau $D_{f^{-1}} = \{x \mid x \neq 0, x \in R\}$. Selanjutnya, karena domain dari f^{-1} adalah kodomain dari f, maka agar mempunyai fungsi invers, kodomain fungsi f adalah semua x bilangan real dengan $x \neq 0$.

   3) Jadi, domain f adalah $D_f = \{x \mid x \neq -1, x \in R\}$ dan kodomain f adalah $K_f = \{x \mid x \neq 0, x \in R\}$.

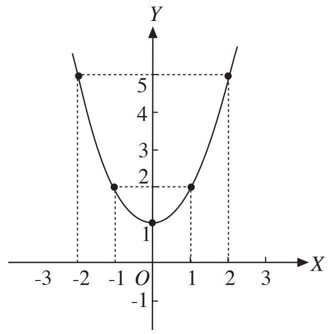
2. Diketahui $f(x) = x^2 + 1$.
   a. Tentukan domain dari fungsi f agar fungsi $f(x)$ mempunyai fungsi invers.
   b. Tentukan rumus $f^{-1}(x)$.

   Penyelesaian:

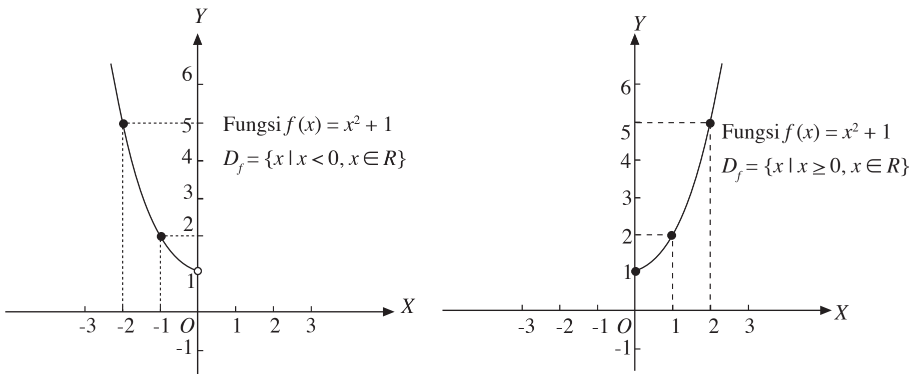
   a. Domain alami fungsi $f(x) = x^2 + 1$ adalah $D_f = \{x \mid x \in R\}$.
   Fungsi f bukan fungsi bijektif karena terdapat nilai x yang berbeda mempunyai peta yang sama seperti terlihat pada **Gambar 3.11**. Misalkan untuk $x = 1$ dan $x = -1$, nilai $f(1) = 2$ dan $f(-1) = 2$.

Karena $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi bijektif maka $f(x)$ tidak mempunyai fungsi invers. Fungsi $f(x)$ dapat diusahakan mempunyai fungsi invers dengan cara membatasi domain alaminya.

Misalkan domain alaminya dipecah menjadi dua bagian seperti pada **Gambar 3.12** sehingga $f(x)$ masing-masing adalah fungsi bijektif.



Gambar 3.11



(a) (b)

Gambar 3.12

b. Misalkan $y = f(x)$.

$$y = x^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 = y - 1$$
$$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} \text{ atau } x = -\sqrt{y-1}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-1} \text{ atau } f^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$$

1) Untuk $D_f = \{x \mid x \leq 0, x \in R\}$, dipilih tanda negatif.

   Oleh karena itu, $f^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$.

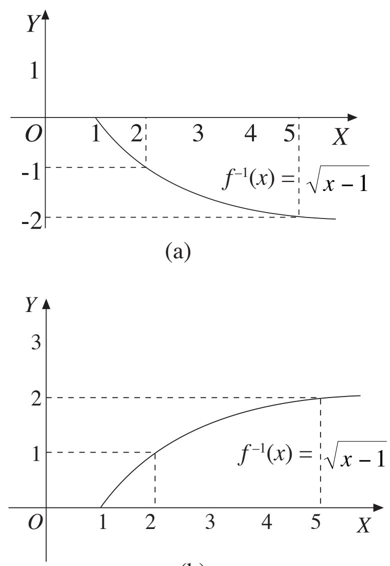
   Jadi, rumus fungsi invers dari f adalah $f^{-1}(x) = -\sqrt{x-1}$.

2) Untuk $D_f = \{x \mid x \geq 0, x \in R\}$, dipilih tanda positif.

   Oleh karena itu, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$.

   Jadi, rumus fungsi invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$.

   Adapun grafik fungsi tersebut tampak pada **Gambar 3.13**.



(b)

Gambar 3.13

Setelah kalian benar-benar memahami bagaimana menentukan domain dan kodomain fungsi invers, sekarang akan kita pelajari bagaimana mengambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya.

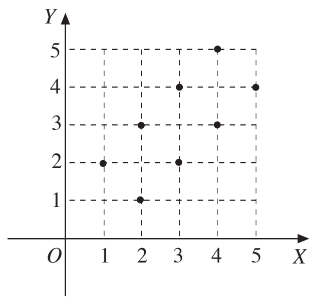
Misalkan diberikan fungsi $f : A \to B$ yang merupakan fungsi bijektif. Invers fungsi f, ditulis $f^{-1} : B \to A$ merupakan suatu fungsi. Dari pengertian invers suatu fungsi yang telah kalian pahami jika fungsi $f : A \to B$ dinyatakan dengan pasangan berurutan $f = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ maka invers dari fungsi f adalah $f^{-1} : B \to A$ yang ditentukan dengan persamaan pasangan berurutan $f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B, a \in A\}$.

Dari pengertian tersebut, tentunya kalian dapat memahami bagaimana menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya. Misalkan kalian menunjuk titik (a, b) pada grafik fungsi f, kalian akan dapat menggambar titik (b, a) pada fungsi f^{-1}.

Contoh:

1. Diberikan fungsi $f : A \to B$ sebagai himpunan pasangan berurutan, dengan $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$. Gambarlah grafik fungsi f^{-1} dari grafik fungsi f.

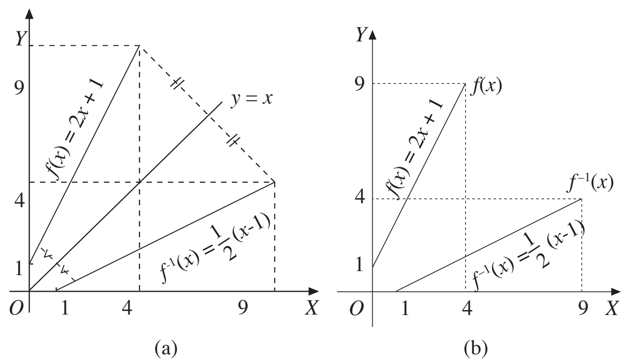
   Penyelesaian:
   Terlebih dahulu digambar grafik fungsi f. Selanjutnya, dari setiap titik dalam grafik fungsi f, dapat digambar titik-titik dalam fungsi f^{-1}, yaitu $f^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$.



Gambar 3.14

2. Diberikan fungsi $f(x) = 2x + 1$, untuk $0 \leq x \leq 4$. Gambarlah grafik fungsi f^{-1} dari grafik fungsi f.

   Penyelesaian:
   Terlebih dahulu digambar grafik fungsi f. Telah kalian ketahui bahwa grafik fungsi $f(x) = 2x + 1$ berupa garis lurus. Misalkan diambil $x = 0$ maka $f(0) = 1$ dan $x = 4$ maka $f(4) = 9$. Grafik fungsi f diperoleh dengan menghubungkan titik (0, 1) dan (4, 9). Selanjutnya, dari titik-titik (0, 1) dan (4, 9) dalam grafik fungsi f dapat digambar titik-titik (1, 0) dan (9, 4) Dengan menghubungkan titik (1, 0) dan (9, 4) diperoleh grafik fungsi $g(x) = \frac{1}{2}(x - 1)$. Ternyata fungsi $g = f^{-1}$. Jika digambarkan, tampak seperti **Gambar 3.15** (a).



Gambar 3.15

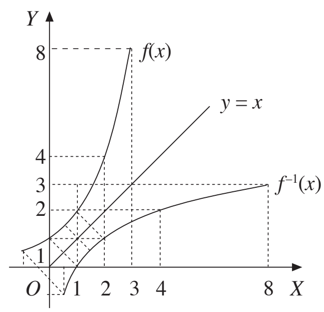
Coba kalian perhatikan kembali contoh tersebut. Apa yang dapat kalian katakan tentang grafik fungsi f dan grafik fungsi f^{-1}? Tentu kalian dapat mengatakan sebagai berikut.

Grafik fungsi f dan grafik fungsi f^{-1} simetris terhadap garis $y = x$.

Hal ini dapat kalian perhatikan pada **Gambar 3.15** (b). Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Diberikan fungsi $f(x) = 2^x$, untuk $-1 \le x \le 3$. Gambarlah grafik fungsi f^{-1} dari grafik fungsi f.



Gambar 3.16

Penyelesaian:

Terlebih dahulu digambar grafik fungsi $f(x) = 2^x$, untuk $-1 \le x \le 3$. Selanjutnya, dengan ketentuan bahwa grafik fungsi f dan grafik fungsi f^{-1} simetris terhadap garis $y = x$ dapat digambar grafik fungsi f^{-1} seperti di samping.

Misalkan $y = f(x)$ maka

$$y = 2^x$$
$$\Leftrightarrow \log y = \log 2^x$$
$$\Leftrightarrow \log y = x \log 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\log y}{\log 2}$$
$$\Leftrightarrow x = {}^2\log y$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = {}^2\log y$$

Jadi, $f^{-1}(x) = {}^2\log x$.

Karena $(f^{-1})^{-1} = f$, maka fungsi invers dari $f^{-1}(x) = {}^2\log x$ adalah $f(x) = 2^x$.

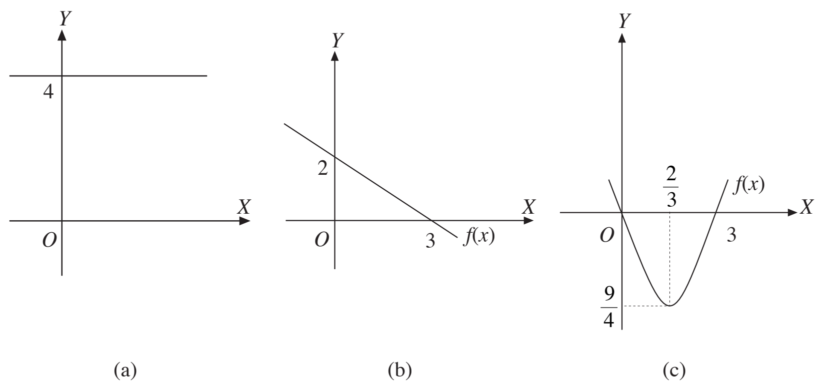
Soal Terbuka — *Kerjakan di buku tugas*

1. Diketahui fungsi f dan g pada himpunan bilangan real dengan $f(x) = 3x + 1$ dan $g(x) = 5 - 6x$.
   a. Tentukan f^{-1}, g^{-1}, $g^{-1} \circ f^{-1}$, dan $f^{-1} \circ g^{-1}$.
   b. Tentukan $(g^{-1} \circ f^{-1})(5)$ dan $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)$.
2. Gambarlah grafik fungsi $f: R \rightarrow R$ (R = himpunan bilangan real) yang ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 2$.
   a. Apakah fungsi f tersebut mempunyai fungsi invers? Apa sebabnya?
   b. Tentukan domain untuk f sehingga ada fungsi invers f^{-1}.
   c. Tentukan invers untuk f^{-1} dan gambarlah grafiknya.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan invers fungsi f yang terdefinisi pada bilangan real berikut.
   a. $f(x) = 3x - 2$
   b. $f(x) = x - 4$
   c. $f(x) = \dfrac{5}{3-2x}$
   d. $f(x) = \dfrac{4x-2}{x+1}$
   e. $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$
   f. $f(x) = \sqrt{5x-3}$
2. Diketahui $P = \{x \mid x > 0, x \in R\}$ dan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi pada P yang ditentukan dengan aturan $f(x) = x + 1$, $g(x) = x$, dan $h(x) = 2x^2$.
   a. Tentukan rumus untuk fungsi invers f^{-1}, g^{-1}, dan h^{-1}.
   b. Tentukan nilai $f^{-1}(2)$, $g^{-1}(5)$, dan $h^{-1}(4)$.
3. Fungsi f dan g pada bilangan real ditentukan dengan aturan $f(x) = x$ dan $g(x) = 2x + 3$.
   a. Tulislah rumus untuk fungsi invers f dan g.
   b. Carilah rumus $g \circ f$, $f^{-1} \circ g^{-1}$, dan $(g \circ f)^{-1}$.
   c. Nyatakan hubungan antara $f^{-1} \circ g^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$.
4. Diketahui fungsi f dan g pada bilangan real positif, dengan $f(x) = x^3 - 1$ dan $g(x) = 4x - 3$. Tentukan berikut ini.
   a. $f^{-1}(7)$
   b. $g^{-1}(9)$
   c. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$
   d. $(f^{-1} \circ g^{-1})(3)$
5. Tentukan invers fungsi f berikut, kemudian tentukan domain dan kodomain f agar f^{-1} merupakan fungsi invers.
   a. $f(x) = \dfrac{2}{x+5}$
   b. $f(x) = \dfrac{3x+2}{x-4}$
   c. $f(x) = -\dfrac{2x}{x-2}$
   d. $f(x) = 3\sqrt{x} - 2$
   e. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
   f. $f(x) = \sqrt{x-1}$
6. Tentukan domain dan kodomainnya agar fungsi yang dinyatakan dengan grafik berikut ini mempunyai fungsi invers.



Gambar 3.17

7. Gambarlah grafik fungsi f^{-1} dari grafik fungsi f jika diberikan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 4$, untuk $-2 \leq x \leq 6$
   b. $f(x) = 3x - 1$, untuk $-1 \leq x \leq 8$
   c. $f(x) = 1 - x$, untuk $-6 \leq x \leq 2$
   d. $f(x) = 2x^2 - 1$, untuk $0 \leq x \leq 3$
   e. $f(x) = 2 - x^2$, untuk $0 \leq x \leq 4$
   f. $f(x) = 3x$, untuk $0 \leq x \leq 3$
8. Tentukan fungsi invers dari fungsi $f(x) = \log x$ dan gambar grafik fungsi inversnya.

D. Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi (Pengayaan)

Fungsi invers dari fungsi komposisi dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika h merupakan fungsi komposisi dari fungsi f dan g (ditulis $h = g \circ f$), invers dari fungsi h merupakan fungsi invers dari fungsi komposisi f dan g yang ditulis $h^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

Misalnya f dan g adalah fungsi-fungsi pada bilangan real dan $g \circ f$ adalah komposisi fungsi f dan g. Salah satu cara untuk menentukan nilai $(g \circ f)^{-1}$ adalah dengan langkah-langkah berikut.

Langkah 1 : Menentukan terlebih dahulu fungsi komposisi $g \circ f$.
Langkah 2 : Dari hasil fungsi komposisi itu, kemudian ditentukan fungsi inversnya.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

NJika $f(x) = \sqrt{x+1}$ dan $g(x) = x^2 - 1$ maka $(g \circ f)(x)$ adalah ....
a. x
b. $x - 1$
c. $x + 1$
d. $2x - 1$
e. $x^2 + 1$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1997

Contoh:

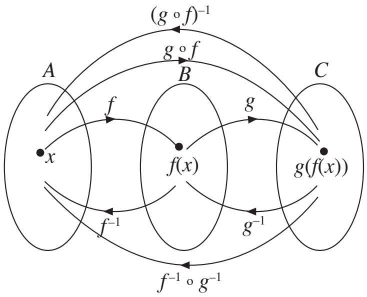
Diketahui fungsi-fungsi f dan g pada bilangan real yang didefinisikan $f(x) = 3x + 2$ dan $g(x) = 2x$. Tentukan
a. $(f \circ g)(x)$;
b. $(f \circ g)^{-1}(x)$.

Penyelesaian:

a. $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x) = 3(2x) + 2 = 6x + 2$.
b. Misalkan $y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = 6x + 2$
$$\Leftrightarrow 6x = y - 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{6}$$
$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = \frac{y-2}{6}$$
$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-2}{6}$$

Jadi, fungsi invers dari $(f \circ g)(x)$ adalah $(f \circ g)^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{6}$.

1. Memahami $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$



Gambar 3.18

Perhatikan gambar di samping. Jika f dan g adalah fungsi-fungsi bijektif dengan $f : A \to B$ dan $g : B \to C$ maka $g \circ f$ adalah fungsi komposisi yang memetakan A ke C. Invers dari fungsi komposisi $g \circ f$ atau $(g \circ f)^{-1}$ pada gambar tersebut dapat dinyatakan sebagai komposisi antara g^{-1} dan f^{-1}, yaitu $f^{-1} \circ g^{-1}$. Dengan demikian, diperoleh

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$$

Dengan cara yang sama, dapat kita peroleh $(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x)$. Oleh karena itu, secara umum dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Jika f^{-1} dan g^{-1} adalah invers dari fungsi-fungsi f dan g, berlaku

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x);$$
$$(f \circ g)^{-1}(x) = (g^{-1} \circ f^{-1})(x).$$

Contoh:

Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ (R = himpunan bilangan real) didefinisikan oleh $f(x) = 4x - 6$ dan $g(x) = x + 3$. Tentukan fungsi berikut ini.

a. $f^{-1}(x)$
b. $g^{-1}(x)$
c. $(f \circ g)^{-1}(x)$

Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x)$.

a.
$$y = 4x - 6$$
$$\Leftrightarrow 4x = y - 6$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{y+6}{4}$$
$$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+6}{4}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+6}{4}$.

b.
$$y = g(x)$$
$$\Leftrightarrow y = x + 3$$
$$\Leftrightarrow x = y - 3$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = y - 3$$

Jadi, $g^{-1}(x) = x - 3$.

c. *Cara 1:*

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x))\\ &= f(x + 3)\\ &= 4(x + 3) - 6\\ &= 4x + 6\end{aligned}$$

Misalkan $y = (f \circ g)(x) \Leftrightarrow y = 4x + 6$

$$\Leftrightarrow 4x = y - 6$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-6}{4}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(y) = \frac{y-6}{4}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)^{-1}(x) = \frac{x-6}{4}$$

Cara 2:

$$\begin{aligned} (f \circ g)^{-1}(x) &= (g^{-1} \circ f^{-1})(x) \\ &= g^{-1}(f^{-1}(x)) \\ &= g^{-1}\left(\frac{x+6}{4}\right) \\ &= \frac{x+6}{4} - 3 = \frac{x-6}{4} \end{aligned}$$

2. Penggunaan Sifat Fungsi Komposisi

Di antara penerapan invers fungsi komposisi adalah menentukan rumus sebuah fungsi apabila diketahui sebuah fungsi lainnya dan komposisi kedua fungsi itu. Untuk itu, kita ingat kembali sifat komposisi sebuah fungsi dengan fungsi inversnya, antara lain $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x) = x$.

Misalkan f dan g adalah fungsi pada bilangan real yang dapat dikomposisikan dan g^{-1} adalah invers dari fungsi g. Berdasarkan sifat di atas, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} f(x) = I(f(x)) &= (g^{-1} \circ g)(f(x)) \\ &= ((g^{-1} \circ g) \circ f)(x) \\ &= (g^{-1} \circ g \circ f)(x) \end{aligned}$$

Karena pada komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif maka $f(x) = (g^{-1} \circ (g \circ f))(x)$.

Di samping itu,

$$\begin{aligned} f(x) = I(f(x)) &= f((g \circ g^{-1})(x)) \\ &= (f \circ (g \circ g^{-1}))(x) \\ &= (f \circ g \circ g^{-1})(x) \end{aligned}$$

Karena pada komposisi fungsi berlaku sifat asosiatif maka $f(x) = ((f \circ g) \circ g^{-1})(x)$.

Jadi, berdasarkan uraian di atas, dapat kita simpulkan sebagai berikut.

1. Apabila diketahui $g(x)$ dan $(g \circ f)(x)$ maka $f(x) = (g^{-1} \circ (g \circ f))(x)$.
2. Apabila diketahui $g(x)$ dan $(f \circ g)(x)$ maka $f(x) = ((f \circ g) \circ g^{-1})(x)$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$ maka $f^{-1}(x) = ...$

a. $x + 9$

b. $2 + \sqrt{x}$

c. $x^2 - 4x - 3$

d. $2 + \sqrt{x+1}$

e. $2 + \sqrt{x+7}$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 2001

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = 2x - 1$ maka $(f \circ g)^{-1}(x) = ...$

a. $\frac{2x-1}{x}$

b. $\frac{x}{2x-1}$

c. $\frac{x+1}{2x}$

d. $\frac{2x}{x+1}$

e. $\frac{2x-1}{2x}$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar 1998

Contoh:

Diketahui fungsi f dan g terdefinisi pada bilangan real dengan $g(x) = x + 5$. Tentukan $f(x)$ jika diketahui

a. $(g \circ f)(x) = 3x^2 + 7x$; b. $(f \circ g)(x) = 3x - 5$.

Penyelesaian:

Agar rumus di atas dapat digunakan, kita perlu menentukan invers fungsi g, yaitu g^{-1}. Misalkan $g(x) = y$.

$$y = x + 5$$
$$\Leftrightarrow x = y - 5$$
$$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = y - 5$$

Jadi, $g^{-1}(x) = x - 5$.

a. $$\begin{aligned} f(x) &= (g^{-1} \circ (g \circ f))(x) \\ &= g^{-1}((g \circ f)(x)) \\ &= g^{-1}(3x^2 + 7x) \\ &= 3x^2 + 7x + 5 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} f(x) &= (f \circ g) \circ g^{-1})(x) \\ &= (f \circ g)(g^{-1}(x)) \\ &= (f \circ g)(x - 5) \\ &= 3(x - 5) - 5 \\ &= 3x - 20 \end{aligned}$$

Pada pembahasan fungsi komposisi, kita telah belajar cara menentukan sebuah fungsi jika fungsi komposisi dan fungsi yang lain diketahui. Coba kerjakan kembali soal-soal di atas dengan cara yang telah kita pelajari sebelumnya. Bagaimana kesimpulan-mu, cara mana yang lebih praktis digunakan?

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Fungsi f dan g terdefinisi pada R (himpunan bilangan real) dengan $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = x - 2$.
   a. Tentukan $f^{-1}(x)$ dan $g^{-1}(x)$.
   b. Tentukan $(f \circ g)^{-1}(x)$ dan $(g \circ f)^{-1}(x)$.
   c. Tentukan $(f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(x)$.
   d. Kesimpulan apa yang kalian peroleh?
2. a. Jika fungsi f pada R didefinisikan oleh $f(x) = \dfrac{3x-2}{3}$, tentukan $f^{-1}(x)$ dan $(f^{-1})^{-1}(x)$? Apa kesimpulanmu?
   b. Tentukan fungsi f pada R jika diketahui
      1) $f^{-1}(x) = 2x - 1$;
      2) $f^{-1}(x) = 2 - 10x$;
      3) $f^{-1}(x) = 3 - \dfrac{2}{3}x$;
      4) $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$, untuk $x \neq -1$.

3. Jika $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, dengan $x \neq -\dfrac{d}{c}$, tentukan rumus $f^{-1}(x)$.
4. Gunakan rumus pada jawaban soal nomor 3 untuk menentukan invers fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1}$
   b. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-1}$
   c. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$
   d. $f(x) = \dfrac{2-3x}{3x}$
   e. $f(x) = \dfrac{x}{x+3}$
   f. $f(x) = \dfrac{3x}{4x-5}$
5. Tentukan fungsi f yang didefinisikan pada himpunan bilangan real jika diketahui
   a. $g(x) = 3x$ dan $(g \circ f)(x) = 3 - 4x$;
   b. $g(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 2x + 5$;
   c. $g(x) = 5 - x$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 9x + 12$;
   d. $g(x) = 2x + 5$ dan $(f \circ g)(x) = 8x^2 + 40x + 54$;
   e. $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

Tentukan rumus fungsi f yang didefinisikan pada himpunan bilangan real sedemikian rupa sehingga

a. $f(x - 2) = x - x^2$;
b. $f(2 - 2x) = 3x - 5x^2$;
c. $f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{2x+3}{x-2}$;
d. $f\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = \dfrac{3-x}{x}$;
e. $f(x + 1) = x^2 + 4x + 3$;
f. $f(x + 4) = x^2 - 3x - 4$;
g. $f(x - 2) = \dfrac{x+3}{x-8}$;
h. $f(x + 3) = \dfrac{x+7}{x^2+16}$.

Refleksi

Masih adakah materi yang belum kalian kuasai? Jika ada, diskusikan dengan teman-teman kalian. Menurut kalian, apakah manfaat dari belajar fungsi komposisi dan fungsi invers jika dikaitkan dengan kehidupan sehari-hari?

Rangkuman

1. Operasi aljabar pada fungsi $f(x)$ dan $g(x)$ adalah sebagai berikut.
   a. Penjumlahan: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
   b. Pengurangan: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
   c. Perkalian: $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
   d. Pembagian: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, untuk $g(x) \neq 0$.
2. Komposisi fungsi $g \circ f$ adalah suatu fungsi yang mengerjakan f terlebih dahulu, kemudian dilanjutkan g, dengan syarat f surjektif.
3. Sifat-sifat komposisi fungsi:
   a. pada umumnya tidak komutatif;
   b. asosiatif;
   c. terdapat fungsi identitas $I(x) = x$.
4. Jika fungsi bijektif $f: A \rightarrow B$ yang dinyatakan oleh
   $f = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$ maka fungsi $f^{-1}: B \rightarrow A$ yang dinyatakan oleh
   $f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$ disebut invers fungsi f.
5. Pada fungsi komposisi g dan f, berlaku
   a. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$;
   b. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Latihan Ulangan Harian III

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Jika $f(x) = x^2 + 4$ dan $g(y) = \dfrac{2}{\sqrt{y}}$ maka $(g \circ f)(t) = ...$
   a. $\dfrac{4+4t}{t}$
   b. $\dfrac{2+2t}{t}$
   c. $\dfrac{2+t}{t}$
   d. $\dfrac{2}{t+2}$
   e. $\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}$

2. Jika $f: R \rightarrow R$ dan $g: R \rightarrow R$ ditentukan oleh $f(x) = x^2 + 5x$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x}$ maka $(f \circ g)(1)$ adalah ....
   a. 14
   b. 13
   c. 12
   d. $\dfrac{1}{12}$
   e. $\dfrac{1}{13}$

3. Diketahui $f(x) = x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4$. Rumus $g(x)$ yang benar adalah ....
   a. $g(x) = 3x + 4$
   b. $g(x) = 3x + 3$
   c. $g(x) = 3x^2 + 4$
   d. $g(x) = 3(x^2 + 1)$
   e. $g(x) = 3(x^2 + 3)$

4. Diketahui fungsi f dan g ditentukan oleh $f(x) = 3x^2 + x - 7$ dan $g(x) = 2x + 1$. Rumus fungsi $(f \circ g)(x) = ...$
   a. $3x^2 + 3x - 6$
   b. $6x^2 + 2x - 13$
   c. $12x^2 + 6x - 5$
   d. $12x^2 + 14x - 3$
   e. $12x^2 + 2x - 3$
5. Fungsi $g : R \to R$ ditentukan oleh $g(x) = x^2 - 3x + 1$ dan fungsi $f : R \to R$ sehingga $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 6x - 1$. Fungsi $f(x) = ...$
   a. $2x + 3$
   b. $2x - 1$
   c. $2x + 1$
   d. $2x - 2$
   e. $2x - 3$
6. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ dirumuskan dengan $f(x) = 2x^2 - 2$ dan $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Rumus $(f \circ g)(x) = ...$
   a. $x^2 + 1$
   b. $\frac{1}{2}x^2 + 6$
   c. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$
   d. $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6$
   e. $\frac{1}{2}x^2 + 8x + 6$
7. Jika $f : R \to R$ dan $g : R \to R$ ditentukan oleh $f(x) = 2x^2 + 5x$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$ maka $(f \circ g)(2) = ...$
   a. 4
   b. 3
   c. 2
   d. $\frac{1}{2}$
   e. $\frac{1}{3}$
8. Diketahui fungsi komposisi $(f \circ g)(x) = x^2 - 6x + 3$ dan $g(x) = x - 1$. Rumus fungsi $f(x) = ...$
   a. $x^2 - 4x - 2$
   b. $x^2 - 6x - 2$
   c. $x^2 - 3x - 2$
   d. $x^2 - 4x + 2$
   e. $x^2 - 6x + 2$
9. Jika $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$ maka $f(x - 2)$ adalah ....
   a. $2x + 1$
   b. $2x - 1$
   c. $2x - 3$
   d. $2x + 3$
   e. $2x - 5$
10. Diketahui fungsi $f : R \to R$, dengan $f(x) = \frac{x+1}{2x-4}$, $x \neq 2$. Invers fungsi f adalah $f^{-1}(x) = ...$
    a. $\frac{4x+1}{2x-1}, x \neq \frac{1}{2}$
    b. $\frac{2x-1}{4x+1}, x \neq \frac{-1}{4}$
    c. $\frac{x-1}{2x+4}, x \neq -2$
    d. $\frac{4x+1}{x-1}, x \neq 1$
    e. $\frac{2x+4}{x-1}, x \neq 1$
11. Invers dari $f(x) = (1 - x^3)^{\frac{1}{5}} + 2$ adalah $f^{-1}(x) = ...$
    a. $(x - 2)^{\frac{5}{3}}$
    b. $1 - (x - 2)^{\frac{5}{3}}$
    c. $1 + (x - 2)^{\frac{5}{3}}$
    d. $(1 - (x - 2)^5)^{\frac{1}{3}}$
    e. $(1 + (x - 2)^5)^{\frac{1}{3}}$

12. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dan $g : R \rightarrow R$ dirumuskan dengan $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ dan $g(x) = 2x + 4$. Nilai dari $(g \circ f)^{-1}(10) = ...$
   a. 4
   b. 8
   c. 9
   d. 12
   e. 16
13. Jika diketahui $f(x) = 2x$ dan $g(x) = 3 - 5x$ maka $(g \circ f)^{-1}(x) = ...$
   a. $\frac{3}{11}(6+x)$
   b. $\frac{6}{11}(3+x)$
   c. $\frac{1}{10}(6-x)$
   d. $\frac{1}{10}(6+x)$
   e. $\frac{6}{11}(6-x)$
14. Jika $f(x) = 5^x$ dan $g(x) = x^2 + 3$, untuk $x \neq 0$ maka $f^{-1}(g(x^2) - 3) = ...$
   a. ${}^5\log (x^4 + 3)$
   b. ${}^5\log (x^4 + 3)$
   c. ${}^5\log (x^4 - 3)$
   d. $4\ {}^5\log x$
   e. $2\ {}^5\log x$
15. Invers fungsi $f(x) = x^2 - 20x + 100$ adalah ....
   a. $f^{-1}(x) = (x + 10)^2$
   b. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 10$
   c. $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 10$
   d. $f^{-1}(x) = 2\sqrt{x} + 10$
   e. $f^{-1}(x) = (x - 10)^2$
16. Jika $f(x) = \frac{4x-1}{2x+1}$ maka $f^{-1}(1) = ...$
   a. 0 d. 1
   b. –1 e. 2
   c. –2
17. Jika diketahui $f(x) = -x + 3$ maka $f(x^2) + (f(x))^2 - 2f(x) = ...$
   a. $2x^2 - 6x + 4$ d. $-4x + 6$
   b. $6x + 4$ e. $2x^2 - 4x - 6$
   c. $2x^2 + 4x + 6$
18. Jika $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$ maka $(g \circ f \circ f)(x) = ...$
   a. $x + 1$
   b. $x^2 + 1$
   c. $\sqrt{x} + 1$
   d. $\sqrt[4]{x} + 1$
   e. $\sqrt[3]{x} + 1$
19. Invers fungsi $f(x) = \frac{3x+4}{2x-1}$, $x \neq \frac{1}{2}$ adalah ....
   a. $\frac{2x-1}{3x+4}, x \neq \frac{-4}{3}$
   b. $\frac{x+4}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$
   c. $\frac{3x-4}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$
   d. $\frac{2x-3}{x+4}, x \neq -\frac{1}{4}$
   e. $\frac{x+4}{2x+3}, x \neq -\frac{3}{2}$
20. Jika $f : x \rightarrow 5^{2x}$ maka $f^{-1}(x) = ...$
   a. ${}^5\log 2x$ d. ${}^{2x}\log 5x$
   b. ${}^5\log \sqrt{x}$ e. ${}^2\log 5x$
   c. ${}^5\log x$
21. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ dan $g(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{x^2-4x}}$ maka domain $(f + g)(x)$ adalah ....
   a. $-3 \leq x \leq 4$
   b. $1 \leq x < 4$ atau $-3 \leq x < 0$
   c. $-1 \leq x \leq 1$
   d. $-3 \leq x \leq -1$ atau $3 \leq x < 4$
   e. $-3 \leq x \leq 0$ atau $3 \leq x \leq 4$

22. Perhatikan pasangan fungsi f dan g berikut.
    (1) $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 7)\}$ dan $g = \{(5, 9), (6, 8), (7, 9)\}$
    (2) $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 6)\}$ dan $g = \{(7, 9), (8, 10)\}$
    (3) $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 6)\}$ dan $g = \{(5, 9), (6, 10), (7, 11)\}$
    (4) $f = \{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$ dan $g = \{(6, 9), (8, 10)\}$

    Fungsi $g \circ f$ terdefinisi pada pasangan ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. semua benar
23. Diketahui $g(x) = x^2$, $(g \circ f)(x) = x^2 + 6x + 9$, $f(-5) = 2$, dan $h(x) = \sqrt{4x-8}$.
    Nilai $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(-11)$ adalah ....
    a. 2
    b. 3
    c. 4
    d. 6
    e. 8
24. Jika f^{-1} dan g^{-1} berturut-turut invers fungsi f dan fungsi g, dengan $f(x) = x + 1$ dan $g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ maka
    (1) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = x + 2$
    (2) $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$
    (3) $(g^{-1} \circ g)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$
    (4) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{x+1}$

    Dari pernyataan di atas yang betul adalah ....
    a. (1), (2), dan (3)
    b. (1) dan (3)
    c. (2) dan (4)
    d. (4)
    e. semuanya betul
25. Jika $f(x) = \frac{x+2}{3-x}$, dengan $x \neq 3$ maka invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x) =$ ....
    a. $\frac{3-x}{x+2}$, $x = -2$
    b. $\frac{x+2}{3-x}$, $x \neq 3$
    c. $\frac{3x-2}{x-1}$, $x \neq 1$
    d. $\frac{x-2}{x-3}$, $x \neq 3$
    e. $\frac{3x-2}{x+1}$, $x \neq -1$

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Diketahui fungsi-fungsi berikut $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x^2$, dan $h(x) = 5 - 2x$. Tentukan $(f \circ g)(x)$, $(h \circ f)(x)$, dan $(g \circ h \circ f)(x)$.
2. Fungsi $(f \circ g)(x) = -x$ dan $f(x) = \frac{x}{1-x}$.
   Tentukan rumus fungsi $g(x)$.
3. Diketahui fungsi $f : R \to R$ dan $g : R \to R$, dengan R himpunan bilangan real. Jika $f(x) = 3x - 10$ dan $g(x) = 4x + 2k$, tentukan nilai k agar $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$.
4. Tentukan invers fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 2x - 7$
   b. $f(x) = \frac{2x+3}{3x-2}$
   c. $f(x) = x^2 - 10x + 25$
5. Diketahui $f : R \to R$, $g : R \to R$, dengan R = himpunan bilangan real. Jika $f(x) = x + 2$, dan $g(x) = x^2 + 5$, tentukan $(g \circ f)^{-1}$ dan $(f \circ g)^{-1}$, kemudian gambarlah grafiknya.

Bab IV

Limit Fungsi

Sumber: *Dokumen Penerbit*

Motivasi

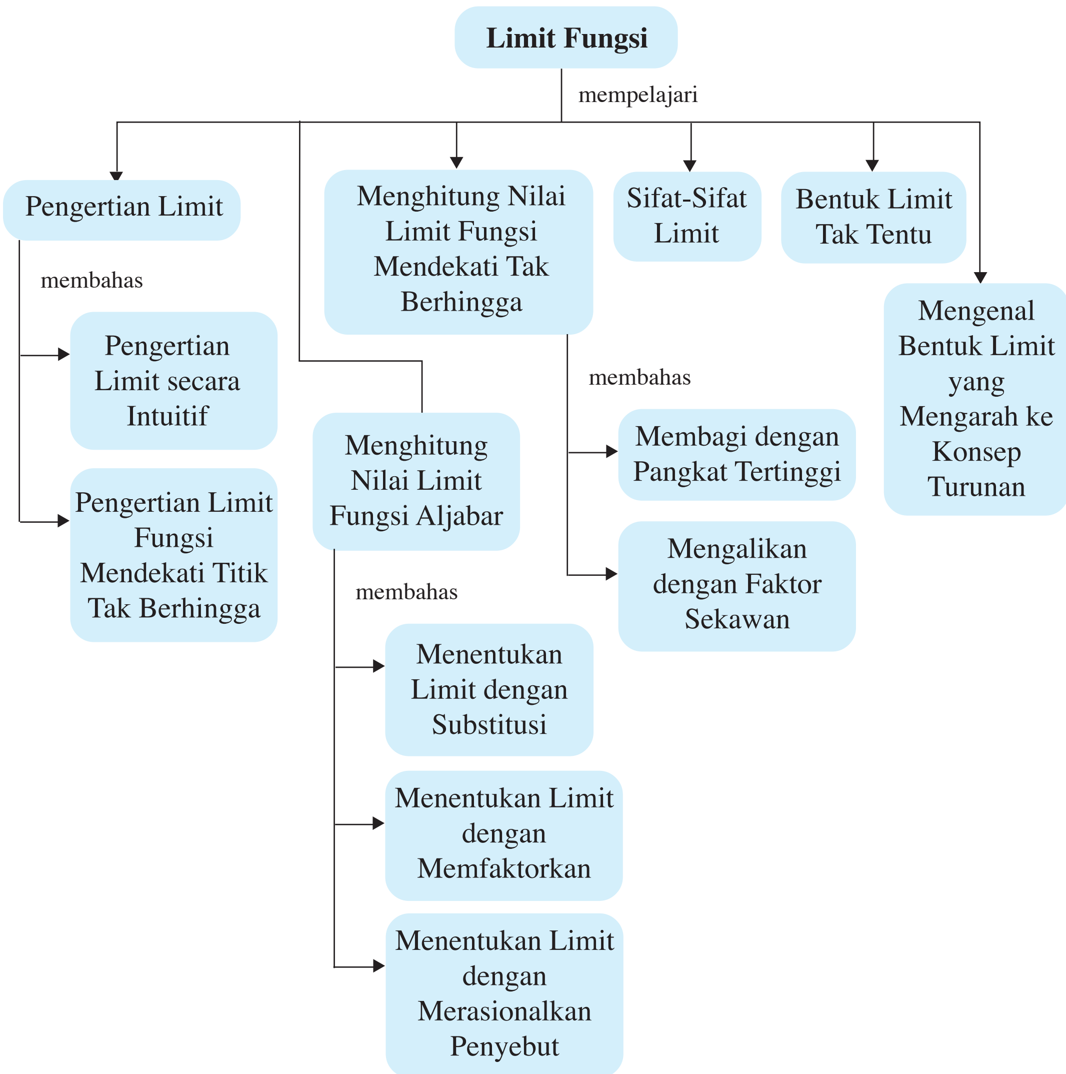
Pada dasarnya limit merupakan konsep dasar dari operasi hitung diferensial (turunan fungsi), yaitu operasi yang menunjukkan laju perubahan pada suatu saat atau titik tertentu. Cara yang dilakukan adalah membagi suatu perubahan kecil dalam salah satu variabel dengan suatu perubahan kecil dalam variabel lain. Sebagai contoh, kita tidak dapat menentukan besar perubahan volume air yang tertuang ke dalam gelas tepat pada waktu tertentu. Namun, dengan metode limit, kita dapat menentukannya melalui nilai pendekatannya.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan arti limit fungsi di satu titik;
2. menghitung limit fungsi aljabar di satu titik;
3. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit;
4. menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi;
5. menghitung bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar;
6. menghitung limit fungsi yang mengarah ke konsep turunan.

Peta Konsep



Kata Kunci

- bentuk tak tentu
- L'Hopital
- limit fungsi
- limit fungsi aljabar
- limit fungsi trigonometri
- pemfaktoran
- substitusi

Pokok bahasan ini merupakan pokok bahasan baru yang belum pernah dipelajari pada jenjang sebelumnya. Pada bab ini, kalian akan mempelajari pengertian limit, menghitung nilai limit fungsi aljabar, menghitung nilai limit mendekati tak berhingga, sifat-sifat limit, bentuk limit tak tentu, dan mengenal bentuk limit yang mengarah pada konsep turunan.

Materi limit merupakan prasyarat untuk mempelajari kalkulus, baik hitung diferensial maupun integral yang akan kalian pelajari di kelas XII. Sebelum mempelajari lebih lanjut tentang limit fungsi, coba kalian jawab soal-soal berikut.

Uji Prasyarat — *Kerjakan di buku tugas*

1. Tentukan nilai $f(1)$, $f(-2)$, dan $f(0)$ dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = x + 1$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$
   c. $f(x) = 4$
2. Sederhanakan bentuk aljabar berikut.
   a. $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$
   b. $\dfrac{x(x-1)(x+2)}{x^2 - 7x + 6}$

Setelah kalian benar-benar dapat menjawab persoalan-persoaalan di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Pengertian Limit

Tentu kalian sering mendengar kalimat-kalimat berikut.

1. Kedua mobil yang sedang salip-menyalip itu *hampir saja* berserempetan.
2. Kurs dolar Amerika Serikat terhadap mata uang rupiah *mendekati* Rp10.000,00.
3. *Beberapa saat* sebelum gempa bumi terjadi, rumah itu masih berdiri tegar.

Perhatikan kata-kata yang dicetak miring (*italic*). Kata-kata itu memiliki makna ”mendekati”. Coba perhatikan ketiga kasus di atas. Kasus pertama, berarti kedua mobil itu *tidak berserempetan*. Kasus kedua, berarti kurs dolar Amerika Serikat terhadap rupiah *tidak* (*belum*) *mencapai* Rp10.000,00. Kasus ketiga, berarti rumah itu sudah *tidak berdiri tegar* ketika gempa bumi terjadi.

Penggunaan kata ”*mendekati*” sejalan dengan konsep limit. Nilai-nilai limit dalam matematika merupakan nilai-nilai pendekatan.

Pengertian Limit secara Intuitif

Untuk memahami pengertian limit secara intuitif, kalian dapat menganalis ketiga kasus yang disajikan di depan. Agar kalian lebih memahaminya, coba pelajari contoh berikut.

Contoh:

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 1$, untuk x bilangan real. Berapakah nilai $f(x)$ jika x mendekati 2?

Penyelesaian:

Untuk menentukan nilai $f(x)$ jika x mendekati 2, kita pilih nilai-nilai x di sekitar 2 (baik dari kiri maupun dari kanan). Kemudian, kita tentukan nilai $f(x)$ seperti tabel berikut.

Tabel 4.1

x	1,8	1,9	1,95	1,96	1,97	1,98	1,99	2	2,01	2,02	2,03
$f(x)$	4,6	4,8	4,9	4,92	4,94	4,96	4,98	5	5,02	5,04	5,06

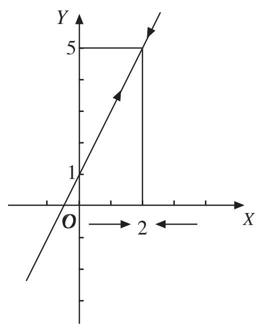
Dari tabel di atas, tampak bahwa jika x mendekati 2 dari kiri, $f(x)$ mendekati 5 dari kiri, sedangkan jika x mendekati 2 dari kanan, $f(x)$ mendekati 5 dari kanan.

Apabila kita lukis, grafik fungsi $f(x) = 2x + 1$, untuk x mendekati 2 tampak seperti pada **Gambar 4.1**.

Ternyata nilai $f(x)$ terus-menerus mendekati 5 jika x terus-menerus mendekati 2. Di dalam matematika, pernyataan tersebut dapat ditulis dengan

$$\lim_{x \to 2} (2x + 1) = 5$$

(dibaca: *limit dari 2x + 1 untuk x mendekati 2 adalah 5*)



Gambar 4.1

2. Tentukan nilai $\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$ terdefinisi untuk semua x bilangan real, kecuali $x = 1$.

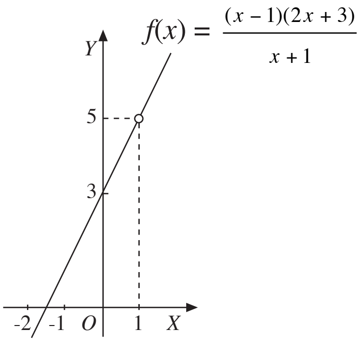
Kita tentukan nilai fungsi $f(x) = \frac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$ untuk x mendekati 1 seperti pada tabel berikut.

Tabel 4.2

x	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	1	1,1	1,2	1,3
$(x-1)(2x+3)$	–1,68	–1,32	–0,92	–0,48	–0,245	0	0,52	1,08	1,68
$x-1$	–0,4	–0,3	–0,2	–0,1	–0,05	0	0,1	0,2	0,3
$\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$	4,2	4,4	4,6	4,8	4,9	$\dfrac{0}{0}$	5,2	5,4	5,6

Dari tabel tersebut, tampak bahwa jika x mendekati 1 dari kiri, nilai $f(x)$ mendekati 5 dari arah kiri. Demikian pula jika x mendekati 1 dari arah kanan, nilai $f(x)$ mendekati 5 dari arah kanan. Sementara itu, untuk x = 1 maka nilai $f(1) = \dfrac{(1-1)(2\times1+3)}{1-1} = \dfrac{(0)(5)}{0} = \dfrac{0}{0}$ (tidak tentu atau tak terdefinisi).

Agar lebih jelas, cobalah untuk nilai-nilai x = 0,96; 0,97; 0,98; 0,99; 1,001; 1,01. Apa yang kalian peroleh?



Gambar 4.2

Jika kalian kerjakan dengan benar, kalian akan dapat menyimpulkan bahwa nilai $\dfrac{(x-1)(2x+3)}{x-1}$ mendekati 5 untuk x mendekati 1.

Oleh karena itu, dapat ditulis $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{2x^2+x-3}{x-1} = 5$.

Untuk memahaminya, perhatikan gambar di samping. Tampak bahwa grafik fungsi $f(x)$ terputus saat x = 1 yang nilainya $\dfrac{0}{0}$ (tak terdefinisi).

Tugas

Informasi Lebih Lanjut

Coba cari tahu tentang pengertian limit kiri dan limit kanan. Bagaimana kaitannya dengan nilai limit suatu fungsi?

Dari kedua contoh di atas, dapat kita peroleh pengertian limit fungsi secara intuitif, yaitu sebagai berikut.

Misalkan f adalah fungsi dalam variabel x dan L adalah bilangan real, pernyataan

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

artinya untuk x mendekati a (tetapi $x \neq a$), nilai $f(x)$ mendekati L.

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menyelidiki eksistensi (keberadaan) nilai limit suatu fungsi.

Permasalahan:
Bagaimana eksistensi nilai limit suatu fungsi di suatu titik?

Langkah-Langkah:

1. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} x + 4, x \leq 3 \\ 5x - 8, x > 3 \end{cases}$.
2. Dengan memerhatikan grafik fungsi tersebut, tentukan nilai limit fungsi tersebut untuk x mendekati 3 dari kiri. Hasil ini merupakan nilai fungsi untuk x mendekati 3 dari kiri ditulis $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$ (limit kiri).
3. Dengan memerhatikan grafik fungsi tersebut, tentukan nilai limit fungsi tersebut untuk x mendekati 3 dari kanan. Hasil ini merupakan nilai fungsi untuk x mendekati 3 dari kanan ditulis $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$ (limit kanan).
4. Dengan memerhatikan grafik fungsi tersebut, tentukan nilai limit fungsi tersebut untuk x mendekati 3. Hasil ini merupakan nilai fungsi untuk x mendekati 3 ditulis $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

Kesimpulan:

a. $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} x + 4 = 7$

b. $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} 5x - 8 = 7$

c. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 7$ sebab $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 7$.

Nilai limit suatu fungsi untuk mendekati titik tertentu ada jika limit kiri sama dengan limit kanan.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Diketahui fungsi $f(x) = 3x - 2$, untuk setiap x bilangan real. Berapakah nilai $f(x)$ jika x mendekati 1?
2. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 + 3$, untuk setiap x bilangan real. Berapakah nilai $f(x)$ jika x mendekati 0?
3. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$, untuk setiap x bilangan real. Berapakah nilai $f(x)$ jika x mendekati -1?
4. Dengan menggunakan pengertian limit fungsi secara intuitif, tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2 + 2)$

   b. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$

   c. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 7x - 15}{x - 5}$

   d. $\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} \dfrac{6x^2 + 5x - 6}{3x - 2}$

B. Menghitung Nilai Limit Fungsi Aljabar

Setelah kita mempelajari definisi limit suatu fungsi, kita dapat menentukan limit suatu fungsi dengan menggunakan definisi limit secara umum maupun secara intuitif seperti di atas. Akan tetapi, ada beberapa cara yang lebih sederhana untuk menentukan limit, antara lain

a. *substitusi*;
b. *memfaktorkan*;
c. *merasionalkan penyebut*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Nilai k yang memenuhi persamaan

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{1 - \sqrt{x}} = \ldots$$

a. -2
b. -5
c. 0
d. 1
e. ∞

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2002

1. Menentukan Limit dengan Substitusi

Limit suatu fungsi f untuk x mendekati a, dengan a bilangan real, dapat ditentukan dengan substitusi, yaitu mengganti nilai x dengan a. Namun, apabila hasilnya $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, atau $(\infty - \infty)$, cara ini tidak dapat diterapkan secara langsung. Fungsi yang diambil limitnya itu perlu disederhanakan terlebih dahulu. Perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Hitunglah nilai limit fungsi-fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x + 2}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 3x + 2)$

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x + 2} = \dfrac{2^3 - 8}{2 + 2} = \dfrac{0}{4} = 0$

b. $\lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 3x + 2) = 0^2 + 3(0) + 2 = 2$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$$\lim_{x \to 27} \frac{x - 27}{\sqrt[3]{x} - 3} = \ldots$$

a. 9
b. 18
c. 27
d. 36
e. 45

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1999

2. Menentukan Limit dengan Memfaktorkan

Misalkan terdapat bentuk $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Seperti yang telah disinggung sebelumnya, apabila $x = a$ disubstitusikan pada fungsi yang diambil limitnya tersebut mengakibatkan $\dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$ (tak tentu), cara substitusi tidak dapat diterapkan secara langsung.

Oleh karena itu, fungsi tersebut perlu disederhanakan lebih dahulu dengan memfaktorkan $f(x)$ dan $g(x)$ sehingga keduanya mempunyai faktor yang sama. Selanjutnya, faktor yang sama itu dihilangkan sehingga diperoleh bentuk yang lebih sederhana seperti berikut.

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)P(x)}{(x-a)Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)};\ Q(a) \neq 0$$

Contoh:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$

b. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$

Penyelesaian:

Jika kita menyubstitusikan nilai-nilai yang didekati x ke dalam bentuk-bentuk di atas, akan kita peroleh $\frac{0}{0}$. Oleh karena itu, fungsi-fungsi tersebut perlu disederhanakan dengan menghilangkan faktor-faktor yang sama pada pembilang dan penyebut.

a. $\displaystyle\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+5)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x + 5) = 8$

b. $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} = \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{(\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})}$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

3. Menentukan Limit dengan Merasionalkan Penyebut

Apabila dalam suatu fungsi yang akan ditentukan nilai limitnya sulit disederhanakan karena memuat penyebut yang tidak rasional, kita perlu merasionalkan penyebutnya lebih dahulu. Penyebut suatu pecahan akan menjadi rasional jika dikalikan antara lain dengan bentuk sekawannya.

Selanjutnya, agar nilai pecahannya tidak berubah maka pecahan semula harus dikalikan dengan pecahan yang bernilai satu, misalnya $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$, $\frac{a - \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}}$, dan $\frac{a + \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} = \ldots$

a. -6
b. -4
c. 2
d. 4
e. 8

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{x-7}{\sqrt{x}-\sqrt{7}} = ...$

a. $7\sqrt{7}$

b. $3\sqrt{7}$

c. $2\sqrt{7}$

d. $\dfrac{1}{2\sqrt{7}}$

e. $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1997

a. Pecahan $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ jika dikalikan $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$, diperoleh $\dfrac{a}{b}\sqrt{b}$;

b. Pecahan $\dfrac{c}{a+\sqrt{b}}$ jika dikalikan $\dfrac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}$, diperoleh $\dfrac{c\,(a-\sqrt{b})}{a^2-b}$;

c. Pecahan $\dfrac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ jika dikalikan $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, diperoleh $\dfrac{c\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$.

Diskusi Eksplorasi

Apa yang kalian ketahui dengan bentuk sekawan? Bagaimana bentuk aljabar yang mengandung akar pangkat tiga?

Contoh:

Tentukan nilai limit fungsi

a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}-5}$

b. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}}$

Penyelesaian:

a. $$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}-5} &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+16}-5} \times \frac{\sqrt{x^2+16}+5}{\sqrt{x^2+16}+5} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}{(x^2+16)-25} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x^2-9)\left(\sqrt{x^2+16}+5\right)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \to 3} \sqrt{x^2+16}+5 \\ &= \sqrt{25}+5 \\ &= 5+5 = 10\end{aligned}$$

b. $$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt{3x-2}-\sqrt{2x}} \times \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x}}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x})}{3x-2-2x}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x})}{x-2}$$
$$= \lim_{x\to 2} (\sqrt{3x-2}+\sqrt{2x})$$
$$= \sqrt{3(2)-2}+\sqrt{2(2)}$$
$$= \sqrt{4}+\sqrt{4} = 4$$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menyubstitusikan nilai-nilai yang didekati oleh x, tentukan nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 0} (2x-6)$

   b. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

   c. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+8}{x+2}$

   d. $\lim\limits_{x\to 3} (4x+\sqrt{x+1})$

   e. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-6}{x}$

   f. $\lim\limits_{x\to 4} \sqrt{3x+4}$

   g. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{1+x^2}}{2x-1}$

   h. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+8}}{x^3}$

   i. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-1}{x^2-1}$

   j. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{-x^2+5x}{x^2+2x+1}$

2. Dengan menghilangkan faktor-faktor yang sama, tentukan nilai limit fungsi berikut.

   a. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$

   b. $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2-6x+8}{x-4}$

   c. $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^2+5x+6}{x+3}$

   d. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+3x-5}{x-1}$

   e. $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x-5}{2\sqrt{x-5}}$

   f. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2-x}{9x^2+2x}$

   g. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-x^2}{9x^2}$

   h. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3+3x}{3x^2-6x}$

   i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^5-x^3+3x^2}{x^4+x^3-2x^2}$

   j. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^9-4x^2}{x^8+5x^2}$

3. Dengan merasionalkan penyebutnya, tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}+3}$

b. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+1}-4}$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-1}{\sqrt{x+2}+3}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

4. Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\sqrt{3x+3}+\sqrt{x^2-2x+3}\right)$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-1}{x^2-x}$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2-6x+4}{x^2-2x}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$

e. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x^2+4x+1}}{3x}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$

5. Hitunglah limit-limit berikut dengan cara yang paling mudah.

a. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{x^2-100}{x-10}$

b. $\lim\limits_{x \to -9} \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-3x}$

d. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-27}{x^2-3x}$

e. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-64}{x-4}$

f. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4-16}{x-4}$

g. $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{x^3+p^3}{x^2-p^2}$

h. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3-64}{x^2-16}$

i. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-16}}$

j. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+5}-2}$

k. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt{x^2+10}}$

l. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-7x-6}{(x+2)^3}$

C. Menghitung Nilai Limit Fungsi Mendekati Tak Berhingga (Pengayaan)

Limit fungsi f untuk x mendekati tak berhingga dinotasikan dengan $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$. Lambang "$\infty$" dibaca *tak berhingga*, digunakan untuk menyatakan nilai yang besar sekali atau nilai yang tak dapat ditentukan besarnya. Untuk menentukan limit mendekati tak berhingga, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ jika $f(x) = \frac{1}{x}$.

Penyelesaian:

Kita buat tabel fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ untuk beberapa nilai x sebagai berikut.

Tabel 4.3

x	1	2	3	....	1.000	10.000
$f(x) = \frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	....	$\frac{1}{1.000}$	$\frac{1}{10.000}$

Dari tabel di atas, tampak bahwa apabila nilai x makin besar, nilai $f(x)$ makin kecil sehingga untuk x mendekati ∞, nilai f mendekati 0. Hal ini dapat ditulis $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Limit fungsi untuk x mendekati ∞ biasanya berbentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ atau $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - g(x))$. Untuk menentukan nilai limit tersebut, kita lakukan substitusi secara langsung. Apabila diperoleh nilai $\frac{\infty}{\infty}$ atau ($\infty - \infty$), kita gunakan cara lain, di antaranya

a. membagi dengan pangkat tertinggi;
b. mengalikan dengan faktor sekawan.

1. Membagi dengan Pangkat Tertinggi

Jika dengan substitusi langsung bentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ hasilnya adalah $\frac{\infty}{\infty}$. Kita sederhanakan fungsi yang diambil limitnya itu dengan kaidah atau aturan berikut.

a. Pada keadaan limit, jika a bilangan real maka bentuk $\frac{a}{0}$ bernilai ∞ (tidak mempunyai limit) karena 0 di sini mewakili bilangan yang kecil sekali, bukan benar-benar nol. Pada keadaan bukan limit, bentuk $\frac{a}{0}$ tidak boleh diganti ∞.

b. Untuk limit mendekati tak berhingga yang berbentuk $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, berlaku sebagai berikut.

1) Jika pangkat tertinggi $f(x)$ = pangkat tertinggi $g(x)$ maka

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{koefisien pangkat tertinggi } f(x)}{\text{koefisien pangkat tertinggi } g(x)}.$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(4 + 5x)(2 - x)}{(2 - x)(1 - x)} =$ ....

a. $-\infty$
b. $\frac{1}{5}$
c. 2
d. 5
e. ∞

Soal UMPTN, Matematika Dasar, 1998

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3} = ...$

a. 1

b. $\dfrac{27}{64}$

c. $\dfrac{-27}{64}$

d. $\dfrac{8}{27}$

e. $\dfrac{-8}{27}$

Soal SKALU, 1978

2) Jika pangkat tertinggi $f(x) >$ pangkat tertinggi $g(x)$ maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty .$$

3) Jika pangkat tertinggi $f(x) <$ pangkat tertinggi $g(x)$ maka

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ketahuilah

Jika a suatu bilangan bukan nol dan $a > 1$, nilai pendekatan untuk

$\dfrac{a}{\infty}$ adalah 0	$\dfrac{\infty}{a}$ adalah ∞	$\infty + \infty$ adalah ∞
a^{∞} adalah ∞	$a^{-\infty}$ adalah 0	$\infty \times \infty$ adalah ∞

Contoh:

1. Tentukan nilai limit fungsi-fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3}{4x^2+2x}$

b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n-2)!}{2n!}$

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x^2+1}{x-2}$

Penyelesaian:

a. $$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2+\frac{3}{x^2}}{4+\frac{2}{x}} = \frac{2+0}{4+0} = \frac{1}{2}$$

b. $$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)!}{2n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-2)!}{2n(n-1)(n-2)!}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n(n-1)}$$

$$= 0$$

c. $$\lim_{x\to\infty} \frac{9x^2+1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{9+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}$$

Untuk x mendekati tak berhingga, nilai $\frac{1}{x}$ dan $\frac{1}{x^2}$ mendekati nol sehingga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{9+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}} = \infty$$

Dalam hal ini, tidak berarti $\frac{9}{0} = \infty$, tetapi karena nilai pembilang mendekati 9 dan nilai penyebut mendekati nol maka limit tersebut sama dengan tak berhingga.

2. Tentukan nilai limit:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-7x+5}{2x^2-6}$;

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-7x^2+1}{2x^4-2x+1}$;

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{2x^4-6}$.

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{6x^2-7x+5}{2x^2-6} = \dfrac{6}{2} = 3$

(Pangkat tertinggi pembilang dan penyebutnya sama)

b. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^5-7x^2+1}{2x^4-2x+1} = \infty$

(Pangkat tertinggi pembilang lebih besar daripada pangkat tertinggi penyebut)

c. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{2x^4-6} = 0$

(Pangkat tertinggi pembilang lebih kecil daripada pangkat tertinggi penyebut)

Problem Solving

Tentukan $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4^x-4^{-x}}{2(4^x)}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{4^x-4^{-x}}{2(4^x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4^x-4^{-x}}{2(4^x)} \times \frac{4^{-x}}{4^{-x}} \\ &= \lim_{x\to 4} \frac{4^{x-x}-4^{-x-x}}{2(4^{x-x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1-4^{-2x}}{2(1)}\end{aligned}$$

Untuk x mendekati tak berhingga, nilai $4^{-2x} = \frac{1}{4^{2x}}$ mendekati nol sehingga

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-4^{-2x}}{2(1)} = \frac{1}{2}.$$

2. Mengalikan dengan Faktor Sekawan

Misalkan dengan substitusi pada bentuk $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x))$ diperoleh $\infty - \infty$, bentuk limit tersebut perlu disederhanakan lebih dahulu. Jika bentuk tersebut dikalikan dengan faktor sekawannya, diperoleh

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to\infty}\left((f(x)-g(x)) \times \frac{f(x)+g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f^2(x)-g^2(x)}{f(x)+g(x)}\right)$$

Contoh:

Hitunglah nilai dari limit fungsi

a. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)$

b. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+4}-\sqrt{x^2+x-2}\right)$

Penyelesaian:

a. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\times\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)-(x-1)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right)$$

Untuk x mendekati tak berhingga, nilai $\sqrt{x+1}$ dan $\sqrt{x-1}$ mendekati tak berhingga sehingga $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right) = 0.$

b. $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+4}-\sqrt{x^2+x-2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+4}-\sqrt{x^2+x-2}\right)\times\frac{\sqrt{x^2-x+4}+\sqrt{x^2+x-2}}{\sqrt{x^2-x+4}+\sqrt{x^2+x-2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2 - x + 4) - (x^2 + x - 2)}{\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{x^2 + x - 2}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x + 6}{\sqrt{x^2 - x + 4} + \sqrt{x^2 + x - 2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x\left(-2 + \frac{6}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-2 + \frac{6}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -1$$

3. Menentukan Nilai Limit dengan Menggunakan Rumus

Perhatikan bentuk limit contoh b (halaman 185). Limit itu mempunyai bentuk $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}\right)$ .... (*)

Bentuk , dengan a = p dapat diselesaikan dengan cara yang lebih efektif. Bagaimana cara menentukan rumus yang efektif itu? Untuk itu, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan — Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menentukan cara menentukan nilai yang mempunyai bentuk (*).

Permasalahan:
Bagaimana cara menentukan limit yang mempunyai bentuk (*) secara efektif?

Langkah-Langkah:
1. Ubahlah koefisien x^2 bentuk kuadrat yang ada dalam tanda akar menjadi 1.
2. Kerjakan bentuk limit itu dengan menggunakan perkalian bentuk sekawan.
3. Dari hasil langkah 2, kalian memperoleh nilai limit.

Kesimpulan:
Bentuk (*) dapat dikerjakan dengan cepat menggunakan rumus
$$\frac{b-q}{2\sqrt{a}}.$$
Dari kegiatan di atas, dapat ditemukan suatru rums berikut.
Untuk $a = p$, berlaku
$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{px^2+qx+r}\right)=\frac{b-q}{2\sqrt{a}}.$$
Dengan menggunakan rumus tersebut, tunjukkan bahwa contoh b di atas benar.

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x}{x^2-2x}$
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2-10x+4}{-2x^3+5x^2-3x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^2}{(x+1)^2}$
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-x+1}{x^2+x-10}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x-5}{4x^3-3x+10}$
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2-x+7}{16x^3+3x^2+5x+8}$
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-4x^3+7x^2+2x+2}{3x^2-2x^2+3x-9}$
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x^3+1)}{4(x^5+10)}$
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x^2+4)^2}{6x^4}$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n+1)!}{n(n+2)!}$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{(n+2)!}$
12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4^x-1}{4^x}$
13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x+3^{-x}}{3^{-x}-3^x}$
14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^3}{(x-1)(x^2+x+1)}$
15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x-4}-\sqrt{x-2}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-4x+4}-\sqrt{x^2+2x-2}\right)$
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\ (x-\sqrt{x^2-8x})$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x}\right)$
20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^4-1}+\sqrt{x^4+1}\right)$

D. Sifat-Sifat Limit dan Penggunaannya

Sifat-sifat limit yang akan kalian pelajari pada pembahasan kali ini sangat erat kaitannya dengan teorema tentang limit.

Teorema Limit

Dalam menyelesaikan limit fungsi aljabar, baik untuk x mendekati a maupun x mendekati ∞, sebenarnya secara tidak langsung kita sudah menggunakan teorema limit. Jika n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk x mendekati a, berlaku sebagai berikut.

1. $\lim\limits_{x \to a} k = k$
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} k\,f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$
4. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$
5. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) - \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$
9. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

Sifat-sifat di atas biasanya disebut teorema limit pusat (utama). Selain teorema limit pusat, teorema substitusi juga dapat digunakan dalam penentuan nilai limit fungsi. Teorema ini berfungsi sebagai berikut.

Jika f adalah suatu fungsi polinom atau fungsi rasional, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ dengan syarat jika fungsinya berbentuk fungsi rasional, nilai penyebut untuk $x = a$ tidak sama dengan nol.

Contoh:

1. Hitunglah nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 8)$

   b. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{2x + 8}}{x}$

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x \to 1} (2x + 8) = \lim\limits_{x \to 1} 2x + \lim\limits_{x \to 1} 8 = 2(1) + 8 = 10$

b. $$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x + 8}}{x} = \frac{\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{2x + 8}}{\lim\limits_{x \to 4} x}$$

$$= \frac{\sqrt{\lim\limits_{x \to 4} (2x + 8)}}{\lim\limits_{x \to 4} x} = \frac{\sqrt{16}}{4} = 1$$

2. Dengan menggunakan teorema substitusi, tentukan nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 9}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1}$

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + 1}{3x^3 - 9} = \dfrac{4(2)^3 - 2(2)^2 + 1}{3(2)^3 - 9} = \dfrac{25}{15} = 1\dfrac{2}{3}$

b. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 1} = \dfrac{1^3 + 2(1)^2 + 1}{1^2 + 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan teorema limit utama, tentukan nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 2} (4x - 5)$

b. $\lim\limits_{x \to 4} (8 - 2x)$

c. $\lim\limits_{x \to 2} (3x + 5)(1 - x)$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2}{x + 2}$

e. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{5 - x}}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

g. $\lim\limits_{x \to -3} \sqrt{\dfrac{x^2 - 9}{2x^2 + 7x + 4}}$

h. $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}}$

i. $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{\dfrac{x^2 - 3x + 4}{2x^2 + x - 9}}$

j. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[4]{\dfrac{3x - 8}{x^2 + x + 4}}$

2. Dengan menggunakan teorema substitusi, tentukan nilai limit berikut.

a. $\lim\limits_{x \to 5} (3x - 7)$

b. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - 4x + 5)$

c. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{4x - 5}{5x - 1}$

d. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5}{2x^2 + 6}$

e. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt{\dfrac{1}{3x - 5}}$

f. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 10}{x^2 + 3x + 2}$

g. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 4}$

h. $\lim\limits_{x \to 1} \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - 2x + 5}}$

E. Bentuk Limit Tak Tentu

Pada pembahasan sebelumnya, kalian telah menemukan bentuk-bentuk limit seperti berikut.

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + x - 20}{x - 4}$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{x - 5}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4})$

Apabila mencoba menentukan limit dengan substitusi, kalian akan memperoleh

1. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 + x - 20}{x - 4} = \dfrac{4^2 + 4 - 20}{4 - 4} = \dfrac{0}{0};$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x + 1}{x - 5} = \dfrac{2(\infty) + 1}{\infty - 1} = \dfrac{\infty}{\infty};$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x + 4} - \sqrt{x - 4}) = (\sqrt{\infty + 4} - \sqrt{\infty - 4}) = \infty - \infty$.

Bentuk-bentuk $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$ disebut *bentuk tak tentu*. Bentuk-bentuk inilah yang sering ditemukan dalam penghitungan limit fungsi. Dengan cara yang telah kalian pelajari di depan, kalian akan dapat menentukan nilai limit tersebut.

Untuk menyelesaikan limit yang mempunyai bentuk tak tentu, kalian dapat menggunakan

a. *cara memfaktorkan;*

b. *mengalikan dengan sekawan;*

c. *teorema L'Hopital (dipelajari pada bab selanjutnya).*

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

$\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{9x + 1} - \sqrt{9x - 1})$

= ....

a. –9

b. –3

c. 0

d. 3

e. 9

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

Contoh:

Tentukan nilai limit fungsi berikut.

a. $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^3 - 1.000}{x - 10}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x-1}$

Penyelesaian:

a. Bentuk limit ini jika dikerjakan dengan substitusi, akan diperoleh bentuk tak tentu $\dfrac{0}{0}$. Oleh karena itu, untuk menyelesaikannya digunakan pemfaktoran.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 10} \frac{x^3 - 1.000}{x - 10} &= \lim_{x\to 10} \frac{(x-10)(x^2 + 10x + 100)}{(x-10)} \\ &= \lim_{x\to 10} (x^2 + 10x + 100) \\ &= 100 + 100 + 100 \\ &= 300\end{aligned}$$

b. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x-1}$

Bentuk ini merupakan bentuk tak tentu $\dfrac{0}{0}$. Untuk menyelesaikannya, digunakan cara mengalikan dengan sekawan.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{3x-2}}{x-1} \times \frac{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-1) - (3x-2)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-(x-1)}{(x-1)(\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-2}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Diskusi Investigasi

Mengapa bentuk-bentuk $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$ disebut bentuk tak tentu? Adakah bentuk-bentuk tak tentu yang lain?

Uji Kompetensi 5

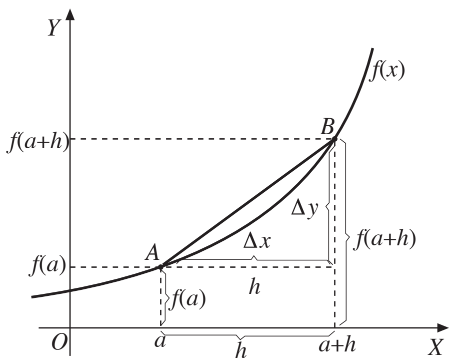
Kerjakan di buku tugas

Tentukan nilai limit berikut.

1. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x+2}{x^2-4}$
2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$
3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+2}{x^2-4}$
4. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^2+2x+1}{x^2+4x+4}$
5. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-2}{3x^2+x-6}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
7. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x+2}{x+\sqrt{x^2}}$
8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{2+x+x^2}-\sqrt{2-x+2x^2}}{x}$
9. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-1}}{\sqrt{2x-1}-\sqrt{x}}$
10. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2-ax}{\sqrt{a^2-x^2}-\sqrt{a^2-ax}}$

F. Mengenal Bentuk Limit yang Mengarah ke Konsep Turunan

Misalkan fungsi f terdefinisi dalam selang $a \leq x \leq a + h$. Fungsi f berubah dari $x = a$, yaitu $f(a)$, sampai pada $x = a + h$, yaitu $f(a + h)$, seperti terlihat pada gambar di samping.



Gambar 4.3

Pada gambar, tampak bahwa

1. koordinat titik A adalah $(a, f(a))$ dan koordinat titik B adalah $(a + h, f(a + h))$;
2. perubahan nilai x adalah $(a + h) - a = h$ dan perubahan nilai fungsi f adalah $f(a + h) - f(a)$.

Laju perubahan nilai $f(x)$ pada $x = a$ sebesar h dapat dinyatakan dalam bentuk limit, yaitu

$$\lim_{B \to A} \text{gradien } \overline{AB} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Konsep limit yang berbentuk $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ atau secara umum berbentuk $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ merupakan dasar untuk menentukan turunan suatu fungsi yang akan kalian pelajari pada bab berikutnya.

Tugas Informasi Lebih Lanjut **Kerjakan di buku tugas**

Cari tahu tentang pengertian fungsi kontinu. Berikan contoh fungsi yang kontinu di suatu interval.

Contoh:

1. Tentukan nilai $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ jika diketahui fungsi $f(x) = 3x + 5$ di $x = 2$.

   Penyelesaian:
   Diketahui $f(x) = 3x + 5$ di $x = 2$.

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2+h)+5) - (3(2)+5)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \to 0} 3 = 3\end{aligned}$$

2. Diketahui suatu kubus dengan panjang rusuk r. Volume kubus merupakan fungsi dalam variabel r, yaitu $f(r) = r^3$. Tentukan laju perubahan volume kubus tersebut terhadap r, untuk $r = 3$.

   Penyelesaian:
   Laju perubahan volume terhadap r untuk $r = 3$ adalah

$$\begin{aligned}\lim_{h \to 0} \frac{f(r+h) - f(h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(3+h)^3 - 3^3}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(27 + 27h + 9h^2 + h^3) - 27}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(27 + 9h + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (27 + 9h + h^2) = 27\end{aligned}$$

Problem Solving

Diketahui R fungsi penerimaan total dirumuskan dengan $R = xy$. Fungsi permintaan linear dinyatakan dengan $y = 3 - x$. Jika fungsi penerimaan marjinal dinyatakan dengan $\lim\limits_{h \to 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h}$, tentukan fungsi penerimaan marjinalnya.

Penyelesaian:

Coba kalian ingat lagi apa yang dimaksud fungsi penerimaan total, fungsi permintaan, dan fungsi penerimaan marjinal di pelajaran Ekonomi.

Dari soal diketahui: fungsi permintaan $y = 3 - x$.

Fungsi penerimaan total $R = xy = x(3 - x) = 3x - x^2$.

Dengan demikian, fungsi penerimaan marjinal (misal $M(x)$) dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
M(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{R(x+h) - R(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\{3(x+h) - (x+h)^2\} - \{3x - x^2\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\{(3x+3h) - (x^2 + 2xh + h^2)\} - \{3x - x^2\}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{3h - 2xh - h^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (3 - 2x - h) \\
&= 3 - 2x
\end{aligned}$$

Jadi, fungsi penerimaan marjinalnya adalah $M(x) = 3 - 2x$.

Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan nilai $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t}$ jika diketahui
   a. $f(x) = 7x^2$ di $x = 2$;
   b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ di $x = 1$;
   c. $f(x) = 4x^3 - 2x$ di $x = 1$;
   d. $f(x) = 3$ di $x = 2$;
   e. $f(x) = \sqrt{3x}$ di $x = 3$.
2. Tentukan laju sesaat perubahan luas persegi terhadap panjang sisi-sisinya pada saat panjang sisi persegi itu 5 cm.
3. Lebar suatu persegi panjang adalah x cm, sedangkan panjangnya sama dengan empat kali lebarnya.
   a. Jika L menyatakan luas persegi panjang itu, nyatakan L sebagai fungsi x.
   b. Tentukan laju perubahan luas L terhadap x pada saat $x = 4$ cm.
4. Misalnya diketahui fungsi permintaan linear $y = a - bx$, fungsi penerimaan total dinyatakan dengan $R = xy$. Jika fungsi penerimaan marginal didefinisikan
   $M(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(x+h) - R(x)}{h}$, tentukan fungsi penerimaan marjinalnya.
5. Diketahui fungsi permintaan kuadratis $y = 3 - x^2$ dan fungsi penerimaan total $R = xy$. Tentukan fungsi penerimaan marjinalnya.

Refleksi

Adakah materi bab ini yang belum kalian kuasai? Jika ada, diskusikan dengan teman-teman kalian. Setelah mempelajari konsep limit, apa yang kalian peroleh dari materi itu, terutama manfaatnya? Adakah hal baru yang kalian temui?

Rangkuman

1. Definisi limit secara intuitif:

   $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, berarti untuk x mendekati a (tetapi $x \neq a$) maka nilai $f(x)$ mendekati L.

2. Teorema limit utama

   Jika n bilangan bulat positif, k konstanta, f dan g adalah fungsi-fungsi yang mempunyai limit untuk x mendekati a, berlaku sebagai berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to a} k = k$ dan $\lim\limits_{x \to a} x = a$

   b. $\lim\limits_{x \to a} k\,f(x) = k \lim\limits_{x \to a} f(x)$

   c. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

   d. $\lim\limits_{x \to a} (f(x) \times g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \times \lim\limits_{x \to a} g(x)$

   e. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, untuk $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

   f. $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x \to a} f(x)\right)^n$

   g. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

3. Bentuk limit tak tentu adalah bentuk-bentuk limit yang jika penyelesaiannya dilakukan dengan cara substitusi menghasilkan $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, dan $\infty - \infty$.

Latihan Ulangan Harian IV

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Nilai dari $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - 6}{2x} = ...$

   a. –4
   b. –2
   c. 1
   d. 2
   e. 4

2. Nilai dari $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{3x - 1}{3 - 5x} = ...$

   a. 2
   b. 1
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $-\frac{1}{2}$
   e. –1

3. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 5x + 6} = ...$
   a. –5
   b. –4
   c. $\dfrac{1}{5}$
   d. $\dfrac{1}{4}$
   e. 5

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1 - \sqrt{x}}{1 - x^2} = ...$
   a. $-\dfrac{1}{2}$
   b. 0
   c. $\dfrac{1}{4}$
   d. 1
   e. 4

5. $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^3 - 8}{t^2 + t - 6} = ...$
   a. 0
   b. $\dfrac{4}{3}$
   c. $\dfrac{12}{5}$
   d. $\dfrac{5}{4}$
   e. ∞

6. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{ax^m + b}{cx^n + d} = ...$
   a. $\dfrac{a}{c}$ jika $m = n$
   b. $\dfrac{b}{d}$ jika $m = n$
   c. $\dfrac{a}{c}$ untuk m dan n sembarang
   d. $\dfrac{b}{d}$ untuk m dan n sembarang
   e. 0 untuk $m = 1$ dan $n = 0$

7. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = ...$
   a. 0
   b. 4
   c. 5
   d. 6
   e. 12

8. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(2x - 3)(x + 5)(6x + 1)}{3x^3 + x^2 + 6x + 1} = ...$
   a. 1
   b. 2
   c. 3
   d. 4
   e. 5

9. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{48 - 3x^2}{5 - \sqrt{x^2 + 9}} = ...$
   a. 10
   b. 20
   c. 30
   d. 40
   e. 50

10. Diketahui $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{ax - \sqrt{x}}{x - 4} = \dfrac{3}{4}$.
    Nilai $a + 2 = ...$
    a. 3
    b. 2
    c. 1
    d. –1
    e. –2

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \{(3x - 2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 5}\} = ...$
    a. 0
    b. $-\dfrac{1}{3}$
    c. –1
    d. $-\dfrac{4}{3}$
    e. $-\dfrac{5}{3}$

12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x}{\sqrt{9 + x} - \sqrt{9 - x}} = ...$
    a. 3
    b. 6
    c. 9
    d. 12
    e. 15

13. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3+4x)(2-x)}{(2+x)(4-x)} = ...$
   a. $-\infty$
   b. 1
   c. 2
   d. 4
   e. ∞

14. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 10x}\right) = ...$
   a. –10
   b. –5
   c. 0
   d. 5
   e. 10

15. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} = ...$
   a. –2
   b. $\pm\dfrac{2}{3}$
   c. 0
   d. 6
   e. 12

16. Perbandingan jumlah penduduk Kota Bayur dan Kota Porong dinyatakan dengan $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{t^2+t-2}{t^2+2t-3}$. Jika jumlah penduduk kedua kota itu 800.000 jiwa, jumlah penduduk Kota Bayur adalah ....
   a. 200.000 jiwa
   b. 240.000 jiwa
   c. 300.000 jiwa
   d. 400.000 jiwa
   e. 600.000 jiwa

17. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x-2)^3}{(4x+3)^3} = ...$
   a. 1
   b. $\dfrac{27}{64}$
   c. $-\dfrac{27}{64}$
   d. $\dfrac{8}{27}$
   e. $-\dfrac{8}{27}$

18. Jika $f(x) = \begin{cases} x+1; & x \le 2 \\ 4x\ ; & x > 2 \end{cases}$
   maka nilai $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = ...$
   a. 1 d. 8
   b. 3 e. tidak ada
   c. 6

19. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 5$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -9$ maka harga $\lim\limits_{x\to a} [2f(x) - 12g(x)]$ adalah ....
   a. –14 d. 34
   b. 10 e. 118
   c. 28

20. Jika $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -4$ dan $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -7$ maka harga $\lim\limits_{x\to a} [(f(x))^2 - 2(g(x))^2 + 3f(x)g(x)]$ adalah ....
   a. –6 d. 4
   b. –3 e. 8
   c. 2

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan nilai limit berikut.
   a. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{4x^3 + 2x^2 + x}$
   b. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{x^3 - 343}{x - 7}$

2. Tentukan nilai $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk:
   a. $f(x) = 4x - 7$;
   b. $f(x) = x^2 - 6x + 8$;
   c. $f(x) = 2\sqrt{x}$.

3. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{6x^2 + 3x + 4}{3x^2 - 6x + 1}$

   b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4x - 7)(2x + 3)(5 - 7x)}{x^3 - 18}$

4. Tentukan nilai limit berikut.

   a. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 5x - 3} - \sqrt{x^2 - x + 1}\right)$

   b. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n - 4)!(n - 4)}{(n + 1)!(n + 1)}$

5. Tentukan nilai

   $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ untuk $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ 6x & ; x = 2 \end{cases}$

6. Sebuah perusahaan mebel memproduksi x unit mebel yang sama jenisnya setiap minggu. Biaya total untuk pembuatan x unit mebel itu dirumuskan dengan $B(x) = 15.500 + 85\,x + 0{,}5\,x^2$ (dalam ribuan rupiah). Biaya marjinal dirumuskan dengan

   $M(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{B(x + h) - B(x)}{h}$. Tentukan biaya marjinal produksi mebel perminggu. Berapa biaya marjinal jika perusahaan itu memproduksi 10 mebel?

Bab V

Turunan

Sumber: *CD COREL profesional - circus & amusements parks*

Motivasi

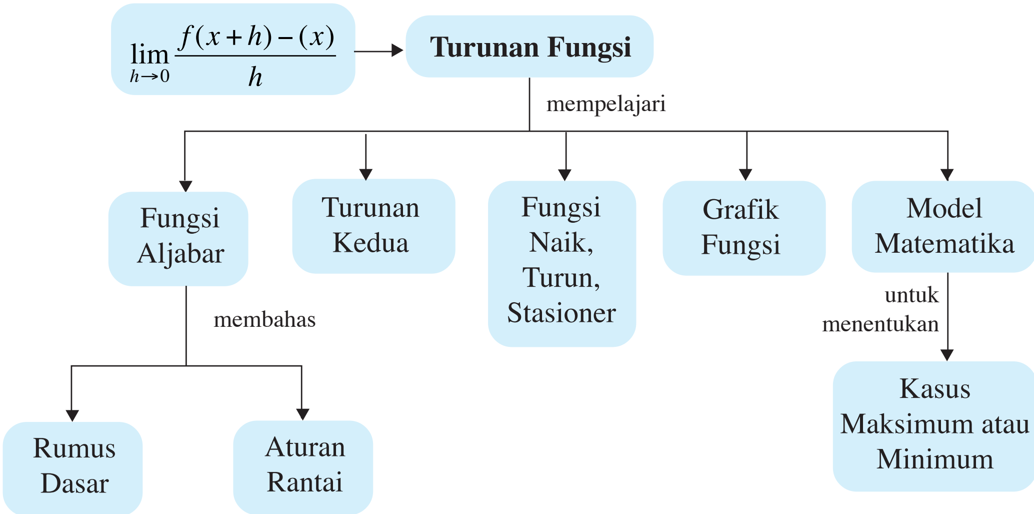
Disadari atau tidak, hampir setiap orang tentu pernah merasakan laju berubahnya suatu kelajuan. Misalnya, seseorang mengendarai sebuah *roller coaster* dengan kecepatan tertentu. Kecepatan orang pada *roller coaster* itu merupakan laju perubahan jarak menurut waktu. Apabila *roller coaster* itu dipercepat atau diperlambat, maka kecepatannya berubah. Laju perubahan seperti inilah yang dimaksudkan sebagai laju berubahnya suatu kelajuan. Hitung diferensial (turunan) membahas perhitungan laju perubahan seperti di atas dalam keadaan tertentu sehubungan dengan perubahan lain pada suatu titik dalam suatu proses.

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kalian dapat

1. menjelaskan arti fisis dan arti geometris dari turunan di satu titik;
2. menentukan laju perubahan nilai fungsi terhadap variabel bebasnya;
3. menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar;
4. menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva;
5. menentukan selang di mana suatu fungsi naik atau turun;
6. menentukan titik stasioner suatu fungsi beserta jenis ekstremnya;
7. menentukan titik belok suatu fungsi;
8. menggambarkan grafik fungsi.

Peta Konsep



Kata Kunci

- diferensial
- diferensiabel
- fungsi naik
- fungsi turun
- gradien
- nilai ekstrem
- nilai stasioner

Pokok bahasan ini pada dasarnya merupakan kelanjutan dari pembahasan limit. Hal ini disebabkan konsep-konsep dasar yang pernah dipelajari pada limit banyak digunakan di sini. Pada bab ini, kita hanya akan mempelajari turunan fungsi aljabar.

Sebelum mempelajari lebih lanjut tentang turunan, coba kalian jawab soal berikut.

Uji Prasyarat — **Kerjakan di buku tugas**

Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jika diketahui

a. $f(x) = 1$;

b. $f(x) = 2x$;

c. $f(x) = x^2 - 3x$.

d. $f(x) = (1 + (1 + x)^2)$

Setelah kalian dapat menjawab soal-soal di atas, mari lanjutkan ke materi berikut.

A. Turunan Fungsi Aljabar

1. Pengertian Turunan

Tentu kalian tahu bahwa biaya marjinal adalah biaya tambahan yang dikeluarkan untuk menghasilkan satu unit tambahan produk. Pengertian biaya marjinal telah kalian pelajari di mata pelajaran Ekonomi. Jika fungsi biaya adalah $C = f(Q)$; C adalah biaya total dan Q unit produk maka biaya marjinalnya (dilambangkan M_C) sebesar $\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$. Secara matematis dapat dituliskan dengan $M_C = \dfrac{\Delta C}{\Delta Q}$.

Misalkan diberikan fungsi biaya total $C = f(Q)$. Besar perubahan biaya total per unit dari jumlah produk sebesar Q menjadi $Q + h$ adalah $f(Q + h) - f(Q)$.

Dengan demikian,
$$M_C = \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{f(Q+h)-f(Q)}{(Q+h)-Q} = \frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}$$

Untuk h kecil maka M_C dapat ditentukan sebagai berikut.

$$M_C = \lim_{h \to 0} \frac{f(Q+h)-f(Q)}{h}$$


Sumber: *www.cygo.com*
G.W. Leibniz (1646–1716)
Gambar 5.1

Bentuk limit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(Q+h)-f(Q)}{h}$ dapat ditulis sebagai $f\,'(Q)$.

Jadi, $f\,'(Q) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(Q+h)-f(Q)}{h}$.

$f\,'$ adalah simbol untuk turunan fungsi f.

Sesuai dengan konsep di atas, dapat didefinisikan turunan fungsi sebagai berikut.

> Diberikan fungsi $y = f(x)$, turunan fungsi f adalah fungsi $f\,'$ yang nilainya di titik c adalah $f\,'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ jika nilai limit ini ada.

Jika nilai limit tersebut ada maka dikatakan bahwa f diferensiabel (dapat diturunkan) di titik c. Selanjutnya, untuk menentukan $f\,'(x)$ kita pandang x sebagai suatu bilangan sembarang sehingga diperoleh turunan dari fungsi $y = f(x)$ adalah

$f\,'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ jika nilai limit ini ada.

Selain notasi $f\,'(x)$ di atas, turunan fungsi $f(x)$ dapat ditulis dengan notasi $\dfrac{df}{dx}$ (dibaca *df dx*) atau $\dfrac{dy}{dx}$ (dibaca *dy dx* yang arti harfiahnya adalah turunannya y ke x). Notasi ini disebut notasi *Leibniz* karena dikemukakan pertama kali oleh seorang matematikawan Jerman bernama *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646–1716).

Tugas Eksplorasi **Kerjakan di buku tugas**

Misalkan $x = c + h$, selidiki bahwa $f\,'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$\Leftrightarrow f\,'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$

Contoh:

1. Tentukan turunan fungsi $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

Penyelesaian:

$$f\,'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x+h)^2+(x+h)-1\right)-\left(2x^2+x-1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2(x^2+2xh+h^2)+x+h\ -1\right)-2x^2-x+1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(4xh + 2h^2 + h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(4x + 2h + 1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (4x + 2h + 1)$$

$$= 4x + 1$$

2. Tentukan turunan fungsi $f(x) = x^2 + 2x + 3$ di $x = 4$.

Penyelesaian:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2+2(x+h)+3)-(x^2+2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^2+2hx+h^2+2x+2h+3)-(x^2+2x+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2hx+h^2+2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h+2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2x + h + 2$$

$$= 2x + 2$$

Jadi, $f'(4) = 2(4) + 2 = 6$.

Kegiatan — Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menyelidiki eksistensi (keberadaan) nilai turunan suatu fungsi di suatu titik.

Permasalahan:
Bagaimana eksistensi (keberadaan) nilai turunan suatu fungsi di suatu titik?

Langkah-Langkah:

1. Gambarlah grafik fungsi $f(x) = \begin{cases} 2x+1, x < 2 \\ x-3, x \geq 2 \end{cases}$.
2. Tentukan nilai turunan fungsi tersebut di titik $x = 2$ dengan menggunakan rumus $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$ untuk $c = 2$.

Terlebih dahulu hitunglah $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ dan

$\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Kesimpulan:

a. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 2$

b. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 1$

c. $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$ untuk $c = 2$ atau $f'(2)$

$= \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ tidak ada sebab

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} \neq \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

Jadi, fungsi di atas tidak mempunyai turunan di titik $x = 2$. Sehubungan dengan hasil ini perhatikan grafik fungsi di titik tersebut yang telah kalian gambar.

Uji Kompetensi 1

Kerjakan di buku tugas

1. Dengan menggunakan rumus $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, tentukan turunan fungsi berikut.
   a. $f(x) = 6x + 5$
   b. $f(x) = 4x + 8$
   c. $f(x) = 5x - 9$
   d. $f(x) = -x^2 - 3$
   e. $f(x) = 8x^2 + 3x + 1$
   f. $f(x) = 8x^2 - 3x - 2$
2. Tentukan turunan fungsi berikut di $x = a$.
   a. $f(x) = 4x - 5$ untuk $a = 4$
   b. $f(x) = 3x^2 - 2x + 8$ untuk $a = 2$
   c. $f(x) = -4x^2 + 6$ untuk $a = 3{,}25$
   d. $f(x) = 5x^2 + 6x - 9$ untuk $a = 2{,}5$
   e. $f(x) = x^3 + 5$ untuk $a = 6$
   f. $f(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 5$ untuk $a = 1$
3. Dengan menggunakan rumus $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c}$, tentukan turunan fungsi-fungsi di titik yang diberikan. Bandingkan hasilnya dengan menggunakan rumus

   $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$.
   a. $f(x) = 2 - 2x$ di $x = 2$
   b. $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$ di $x = 3$
   c. $f(x) = 2x^2$ di $x = 0{,}2$
   d. $f(x) = (3 - 2x)^2$ di $x = -1$
   e. $f(x) = x^2 - 2x + 1$ di $x = -1$

4. Tentukan biaya marjinal jika diketahui rumus fungsi biaya total (C) dalam Q (unit) berikut.
   a. $C = 2Q + 5$
   b. $C = 6Q - 3$
   c. $C = -8Q + 6$
   d. $C = Q^2 - 2Q + 1$
   e. $C = 2Q^2 + 3Q + 5$
   f. $C = Q^3 + 4Q^2 - 2Q + 6$

2. Rumus Turunan Fungsi $f(x) = ax^n$

Dengan menggunakan rumus turunan fungsi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

kita dapat menentukan turunan fungsi konstan, turunan fungsi identitas, rumus turunan fungsi pangkat $f(x) = x^n$, dan rumus turunan fungsi $f(x) = ax^n$ dengan a konstanta real.

a. Turunan Fungsi Konstan $f(x) = c$, dengan c Konstanta Real

Misalkan $f(x) = c$ maka $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$\lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika $f(x) = c$, dengan c konstanta real maka $f'(x) = 0$.

b. Turunan Fungsi Identitas $f(x) = x$

Misalkan $f(x) = x$ maka

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Dengan demikian, dapat kita simpulkan sebagai berikut.

Jika $f(x)$ adalah fungsi identitas atau $f(x) = x$ maka $f'(x) = 1$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $f(3 - 2x) = 4 - 2x + x^2$ maka $f'(1) = ...$

a. -6
b. -3
c. -2
d. 0
e. 3

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2003

c. Turunan Fungsi Pangkat $f(x) = x^n$ dengan n Bilangan Asli

Misalkan $f(x) = x^n$, dengan n bilangan asli. Untuk $n = 1$ maka $f(x) = x$. Oleh karena itu, untuk $n = 1$ maka $f'(x) = 1$. Bagaimana turunan fungsi $f(x) = x^n$? Untuk itu, lakukan kegiatan berikut.

Kegiatan

Kerjakan di buku tugas

Tujuan:
Menentukan rumus turunan $f(x) = x^n$.

Permasalahan:
Bagaimanakah turunan $f(x) = x^n$, n bilangan asli?

Langkah-Langkah:

1. Dengan menggunakan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$, tentukan hasilnya jika $f(x) = x^2$.
2. Analog dengan langkah 1, gantilah $f(x) = x^3$, kemudian $f(x) = x^4$. Manfaatkan teorema binomial.
3. Amati pola turunan dari x^2, x^3, dan x^4.

   Hal ini dapat kalian lanjutkan untuk $n = 5, 6, \ldots$ sehingga turunan fungsi $f(x) = x^n$, dengan n bilangan asli tampak seperti pada tabel berikut. Lengkapilah.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	...	x^n
$f'(x)$	...	...	...	...	...	...	...	...

Kesimpulan:
Secara umum dapat disimpulkan sebagai berikut.

Jika $f(x) = x^n$, dengan n bilangan asli maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Apakah rumus di atas juga berlaku untuk n bilangan real? Dengan cara serupa, tentu kalian dapat menunjukkan bahwa:

Jika $f(x) = ax^n$, dengan n bilangan real maka $f'(x) = nax^{n-1}$.

Diskusi — Investigasi

Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$.

Tentukan nilai turunan fungsi tersebut di titik $x = 0$.
Diskusikan dengan teman-teman kalian.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = 10$

b. $f(x) = 4x^5$

c. $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

d. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-3}$

e. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$

f. $f(x) = 3x^5 - 7x^2$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 10$ maka $f'(x) = 0$

b. $f(x) = 4x^5$ maka $f'(x) = (5)(4)x^{5-1} = 20x^4$

c. $f(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$ maka nilai $f'(x) = (\frac{1}{2})(2)\, x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-\frac{1}{2}}$

d. $f(x) = \frac{1}{3}x^{-3}$ maka nilai $f'(x) = (-3)(\frac{1}{3})x^{-3-1} = -x^{-4}$

e. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ maka $f'(x) = (2)(1)\, x^{1-1} - \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = 2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

f. $f(x) = 3x^5 - 7x^2 + 1$ maka $f'(x) = (5)(3)x^{5-1} - (2)(7)x^{2-1}$
$= 15x^4 - 14x$

Uji Kompetensi 2

Kerjakan di buku tugas

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = 4x^2 - 5x + 7$
2. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 10$
3. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6$
4. $f(x) = 5x^8 + 3x^6 - x^3 + 7$
5. $f(x) = 4x^{-3} - 5x^{-2} + 4x - 5$
6. $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}} + 4$
7. $f(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} - 8$
8. $f(x) = 5x^{-\frac{1}{5}} - 12$
9. $f(x) = \sqrt[9]{x^4} + 3$
10. $f(x) = 4x^{-\frac{1}{4}} + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^2 + 3x - 4$

B. Rumus-Rumus Turunan Fungsi

1. Turunan Hasil Kali Konstanta dengan Suatu Fungsi

Misalkan $f(x) = cu(x)$ dengan c konstanta real dan $u(x)$ yang mempunyai turunan, yaitu $u'(x)$. Turunan dari $f(x)$ adalah sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{c(u(x+h)-u(x))}{h} \\
&= c\left(\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right) \\
&= cu'(x)
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, dapat kita peroleh kesimpulan sebagai berikut.

> Jika $u'(x)$ adalah turunan fungsi $u(x)$, maka turunan fungsi $f(x) = cu(x)$ dengan c konstanta real adalah $f'(x) = cu'(x)$.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Jika $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{3x-2}$, maka $f'(2) = ...$

a. $\frac{1}{8}$ d. $-\frac{1}{4}$

b. $\frac{1}{4}$ e. $-\frac{1}{2}$

c. $-\frac{1}{8}$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1997

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $f(x) = 4(x^2 + 1)$.

Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = 4(x^2 + 1)$.

Misalkan $u(x) = x^2 + 1$. Oleh karena itu, $u'(x) = 2x$.

Karena untuk $f(x) = cu(x)$ turunannya $f'(x) = cu'(x)$ maka $f'(x) = 4(2x) = 8x$.

2. Turunan Jumlah dan Selisih Dua Fungsi

Misalkan fungsi-fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ berturut-turut mempunyai turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$ maka $f'(x)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)+v(x+h))-(u(x)+v(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(u(x+h)-u(x))+(v(x+h)-v(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\
&= u'(x) + v'(x)
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang sama, jika $f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$. Jadi, dapat disimpulkan sebagai berikut.

> a. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
> b. Jika $f(x) = u(x) - v(x)$ maka $f'(x) = u'(x) - v'(x)$.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = (x^2 + 3x) + (5x^3 + 1)$

b. $f(x) = (4x^3 - \sqrt{x}) - \dfrac{5}{\sqrt{x}} \pm \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

Penyelesaian:

a.
$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 3x) + (5x^3 + 1) \\ f'(x) &= (2x + 3) + 15x^2 \\ &= 15x^2 + 2x + 3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^3 - \sqrt{x}) - \left(\frac{5}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right) \\ f'(x) &= \left(12x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\right)\right) \\ &= \left(12x^2 - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-\frac{1}{3}}\right) \\ &= 12x^2 + x^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}x^{-\frac{3}{2}} \\ &= 12x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{2x\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Uji Kompetensi 3

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 3x - 6x^2$
   b. $f(x) = 5(6 - x^2)$
   c. $f(x) = 7(3x^2 + 2x - 2)$
   d. $f(x) = 12(4x^3 - 3x)$
   e. $f(x) = \dfrac{1}{2}(8x^2 - 4x + 21)$
   f. $f(x) = 18\left(\dfrac{1}{2}x^3 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{6}x + 3\right)$
2. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut, kemudian tulislah hasilnya dalam bentuk yang paling sederhana.
   a. $f(x) = (x^2 + 3) + (x^3 - 2x^2)$
   b. $f(x) = (\sqrt{x} + 2x) + \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} - 3x^2\right)$
   c. $f(x) = (2 + 3x) + (4 - 3x)$
   d. $f(x) = \left(\dfrac{5}{2}x^2 - 7x\right) + \left(4x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{3}x^3\right)$
   e. $f(x) = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right) + \left(\dfrac{3}{2x^3} - \dfrac{5}{3x^2}\right)$
   f. $f(x) = (x^3 - 6x^2 - 7x) + (8 - 12x - 9x^2)$
3. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut, kemudian tulislah hasilnya dalam bentuk yang paling sederhana.
   a. $f(x) = (3x^2 + 2x^2) - (4x^3 - 3x)$
   b. $f(x) = (5 - 3x - 16x^3) - (6x - 12x^2)$

c. $f(x) = (x - \sqrt{x}) - (x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}})$

d. $f(x) = (4 + 7x) - (8x - x^{\frac{2}{3}})$

e. $f(x) = \left(\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4\sqrt{x}\right) - \left(\dfrac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)$

f. $f(x) = \left(x^{-\frac{5}{2}} + \sqrt[3]{x}\right) - \left(2x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\right)$

4. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = (x^4 + 2x^3 + 1) + (3x^2 - 2x + 6)$
   b. $f(x) = (6x^5 + 7x^4) - (4x^3 + 2x^2)$
   c. $f(x) = (x^{\frac{3}{2}} + \sqrt{x}) + (5x^2 + x\sqrt{x})$
   d. $f(x) = (x^{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}) - (\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x}{\sqrt{x}})$
   e. $f(x) = (\dfrac{1}{4}x^4 - 2x^3) - (\dfrac{3}{4}x^4 + \dfrac{2}{3}x^3)$

3. Turunan Hasil Kali Dua Fungsi

Misalkan fungsi-fungsi $u(x)$ dan $v(x)$ berturut-turut mempunyai turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$. Jika $f(x) = u(x) \times v(x)$ maka $f'(x)$ dapat ditentukan sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h)\ v(x+h)) - (u(x)\ v(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h)v(x+h) - u(x+h)\ v(x) + u(x+h)\ v(x) - u(x)\ v(x))}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(u(x+h)(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}) + v(x)(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left(u(x+h)(\frac{v(x+h) - v(x)}{h}) \right) + \lim_{h \to 0} \left(v(x)(\frac{u(x+h) - u(x)}{h}) \right) \\
&= \lim_{h \to 0} u(x+h) \lim_{h \to 0} \left(\frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) + \lim_{h \to 0} v(x) \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \\
&= u(x)\ v'(x) + v(x)\ u'(x) \\
&= u'(x)\ v(x) + u(x)\ v'(x)
\end{aligned}$$

Jadi, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

Misalkan $u(x)$ dan $v(x)$ masing-masing mempunyai turunan $u'(x)$ dan $v'(x)$ maka turunan fungsi $f(x) = u(x)\ v(x)$ adalah $f'(x) = u'(x)\ v(x) + u(x)\ v'(x)$.

Contoh:

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = (2x + 3)(x^2 + x)$

b. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x^4 + 2x^2)$

Penyelesaian:

a. $f(x) = (2x + 3)(x^2 + x)$

Cara 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= (2x + 3)(x^2 + x) \\ &= 2x^3 + 5x^2 + 3x \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $f'(x) = 6x^2 + 10x + 3$.

Cara 2:

Misalkan $u(x) = 2x + 3$ maka $u'(x) = 2$ dan $v(x) = x^2 + x$ maka $v'(x) = 2x + 1$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \\ &= 2(x^2 + x) + (2x + 3)(2x + 1) \\ &= 2x^2 + 2x + 4x^2 + 8x + 3 \\ &= 6x^2 + 10x + 3 \end{aligned}$$

b. $f(x) = (x^2 + 2x + 1)(3x^4 + 2x^2)$

Cara 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 2x + 1)(3x^4 + 2x^2) \\ &= (3x^6 + 2x^4 + 6x^5 + 4x^3 + 3x^4 + 2x^2) \\ &= 3x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 2x^2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $f'(x) = 18x^5 + 30x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 4x$.

Cara 2:

Misalkan $u(x) = x^2 + 2x + 1$ maka $u'(x) = 2x + 2$ dan

$v(x) = 3x^4 + 2x^2$ maka $v'(x) = 12x^3 + 4x$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \\ &= (2x + 2)(3x^4 + 2x^2) + (x^2 + 2x + 1)(12x^3 + 4x) \\ &= 6x^5 + 6x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 12x^5 + 24x^4 + 12x^3 + 4x^3 + 8x^2 + 4x \\ &= 18x^5 + 30x^4 + 20x^3 + 12x^2 + 4x \end{aligned}$$

Diskusi Kreativitas

Misalkan diberikan suatu fungsi $f(x) = u(x)v(x)w(x)$. Tunjukkan bahwa turunan fungsi $f(x)$ adalah

$f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$.

4. Turunan Hasil Bagi Suatu Fungsi oleh Fungsi Lain

Misalkan $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ dengan $v(x) \neq 0$. Dari persamaan tersebut, diperoleh $u(x) = f(x)\ v(x)$. Misalkan $u'(x)$ turunan dari $u(x)$ dan $v'(x)$ turunan dari $v(x)$. Dengan menggunakan rumus turunan hasil kali fungsi, diperoleh

$u'(x) = f'(x)\ v(x) + f(x)\ v'(x)$

$\Leftrightarrow f'(x)\ v(x) = u'(x) - f(x)\ v'(x)$

$$\Leftrightarrow f'(x)\ v(x) = u'(x) - \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) v'(x)$$

$$\Leftrightarrow f'(x)\ v(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{v(x)}$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{(v(x))^2}$$

Jadi, kita peroleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ dengan $v(x) \neq 0$, $u'(x)$ turunan dari $u(x)$ dan $v'(x)$ turunan dari $v(x)$ maka berlaku

$$f'(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{(v(x))^2}$$

Contoh:

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 2}$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5}$

Penyelesaian

a. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{3x + 2}$

Misalkan $u(x) = 2x + 1$ dan $v(x) = 3x + 2$. Akibatnya, $u'(x) = 2$ dan $v'(x) = 3$. Oleh karena itu,

$$f'(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{2(3x+2) - (2x+1)3}{(3x+2)^2}$$

$$= \frac{6x + 4 - 6x - 3}{(3x + 2)^2}$$

$$= \frac{1}{(3x + 2)^2}$$

b. $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5}$

Misalkan $u(x) = x^2 + 2x - 3$ dan $v(x) = x^2 + 5$. Akibatnya, $u'(x) = 2x + 2$ dan $v'(x) = 2x$. Oleh karena itu,

$$f'(x) = \frac{u'(x)\, v(x) - u(x)\, v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{(2x + 2)(x^2 + 5) - (x^2 + 2x - 3)2x}{(x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{2x^3 + 2x^2 + 10x + 10 - 2x^3 - 4x^2 + 6x}{(x^2 + 5)^2}$$

$$= \frac{-2x^2 + 16x + 10}{(x^2 + 5)^2}$$

Uji Kompetensi 4

Kerjakan di buku tugas

Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.

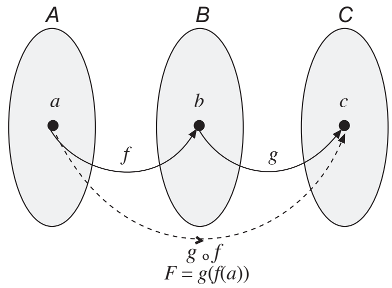
1. $f(x) = (3x^2 + 2x)(4x^3 + 5x^2)$
2. $f(x) = 6x^4(3x^3 + 2x^2)$
3. $f(x) = (8x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}})\,(3x^{\frac{3}{2}} - \sqrt{x})$
4. $f(x) = (8 - 2x)(4x^2 - 6x + 1)$
5. $f(x) = (5x^4 + 2x)(6x^3 + 2x^2 + x - 1)$
6. $f(x) = \dfrac{5 - 3x}{4x + 7}$
7. $f(x) = \dfrac{4x^2 - 3x + 4}{x^2 + 2x + 5}$
8. $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$
9. $f(x) = \dfrac{8(3x + 1) - 4(x^2 + 1)}{x^4}$
10. $f(x) = \dfrac{2x^4(x + 5) + 3x^2(x^2 + 5)}{x - 1}$

C. Menentukan Turunan Fungsi Komposisi dengan Aturan Rantai (Pengayaan)

Aturan rantai adalah suatu metode atau cara untuk menentukan turunan fungsi komposisi atau fungsi majemuk. Untuk itu, kita mulai pembahasan ini dengan mengingat kembali pengertian fungsi komposisi.

Pada bab sebelumnya, kalian telah mempelajari tentang fungsi komposisi. Jika diketahui fungsi f: $A \to B$ dan g: $B \to C$ seperti pada gambar di samping, fungsi F: $A \to C$ disebut *fungsi komposisi* dari f dan g dengan rumus

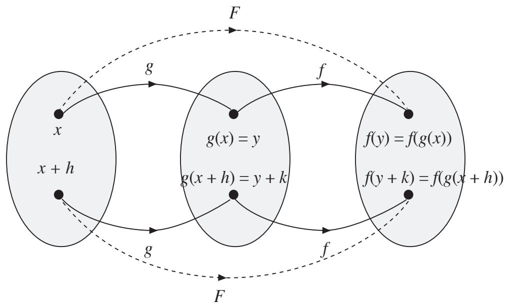
$$F(a) = (g \circ f)(a) = g(f(a))$$



Gambar 5.2

Notasi "$g \circ f$" dibaca g bundaran f, yaitu komposisi fungsi yang mengerjakan fungsi f lebih dahulu, kemudian dilanjutkan fungsi g.

Seperti yang telah disinggung sebelumnya, aturan rantai dapat digunakan untuk menentukan turunan fungsi-fungsi komposisi. Misalkan terdapat fungsi komposisi $F(x) = f(g(x))$ seperti pada diagram di samping.



Gambar 5.3

Dengan mengingat definisi turunan suatu fungsi, dapat ditentukan

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \times \frac{k}{h} \end{aligned}$$

Karena $g(x + h) = y + k$ maka $k = g(x + h) - y \Leftrightarrow k = g(x + h) - g(x)$ sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \times \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \times \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(y) \times g'(x) \\ &= f'(g(x)) \times g'(x) \end{aligned}$$

Jadi, berdasarkan uraian di atas, dapat kita peroleh kesimpulan sebagai berikut.

Jika $F(x) = f(g(x))$ maka $F'(x) = f'(g(x))\, g'(x)$.

Dalam notasi Leibniz, jika $y = f(u)$ dan $u = g(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

Rumus penurunan fungsi komposisi seperti inilah yang disebut *aturan rantai*.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Turunan fungsi $f(x) = \sqrt[4]{(2x^2 - 3)^3}$ adalah ....

a. $\dfrac{-x}{\sqrt[4]{2x^2 - 3}}$

b. $\dfrac{3x}{\sqrt[4]{2x^2 - 3}}$

c. $\dfrac{16x}{3\sqrt[4]{2x^2 - 3}}$

d. $-3x\sqrt[4]{2x^2 - 3}$

e. $3x\sqrt[4]{2x^2 - 3}$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 2001

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $f(x) = 2(3x + 1)^2$.

Penyelesaian:

Cara 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2(3x+1)^2 \\ &= 2(9x^2 + 6x + 1) \\ &= 18x^2 + 12x + 2 \end{aligned}$$

Oleh karena itu, $f\,'(x) = 36x + 12$.

Cara 2:

Misalkan $y = f(x) = 2u^2$, dengan $u = 3x + 1$. Berarti, $\frac{dy}{du} = 4u$ dan $\frac{du}{dx} = 3$.

Dengan aturan rantai, diperoleh

$$f\,'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 4u \times 3 = 4(3x+1) \times 3 = 12(3x+1) = 36x + 12.$$

Problem Solving

Tentukan turunan fungsi $F(x) = 3(x^2 - 2x)^5$.

Penyelesaian:

Misalkan $y = F(x) = 3u^5$, dengan $u = x^2 - 2x$. Dengan demikian,

$\frac{dy}{du} = 15u^4$ dan $\frac{du}{dx} = 2x - 2$.

Dengan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= 15u^4 \times (2x-2) \\ &= 15(x^2 - 2x)^4(2x - 2) \\ &= 30(x-1)(x^2 - 2x)^4 \end{aligned}$$

Rumus penurunan fungsi dengan aturan rantai dapat dikembangkan untuk komposisi lebih dari dua fungsi. Misalkan untuk tiga fungsi f, g, dan h.

Jika $F(x) = f(g(h(x)))$ maka $F\,'(x) = f(g(h(x))) \times g'(h(x)) \times h'(x)$.

Dalam notasi *Leibniz*, jika $y = f(u)$, $u = g(v)$, dan $v = h(x)$ maka

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}$$

Contoh:

Tentukan turunan fungsi $F(x) = ((2x^3 - x^2) + 1)^5$.

Penyelesaian:

$F(x) = ((2x^3 - x^2) + 1)^5$

Misalkan $y = u^5$, $u = v + 1$, dan $v = 2x^3 - x^2$. Dengan demikian,

$$\frac{dy}{du} = 5u^4,\ \frac{du}{dv} = 1, \text{ dan } \frac{dv}{dx} = 6x^2 - 2x = 2x(3x - 1)$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dv} \times \frac{dv}{dx}\\ &= 5u^4 \times 1 \times 2x(3x - 1)\\ &= 5((2x^3 - x^2) + 1)^4)(2x(3x - 1)\\ &= 10x(3x - 1)((2x^3 - x^2) + 1)^4\end{aligned}$$

Uji Kompetensi 5 — Kerjakan di buku tugas

Dengan aturan rantai, tentukan turunan fungsi-fungsi berikut ini.

1. $F(x) = (3x - 2x^2 - x^3)^6$
2. $F(x) = (12 + 3x - x^2)^4$
3. $F(x) = \sqrt{(4x - 1)^3}$
4. $F(x) = (2 + 3x)\sqrt{x^2 - 1}$
5. $F(x) = 3x^2 + \dfrac{(x-2)}{\sqrt{x}}$
6. $F(x) = ((x^5 - 7x + 1)^5 - 1)^2$
7. $F(x) = \dfrac{3}{(x^2 + 2x + 1)^3}$
8. $F(x) = \dfrac{(5x - 2)^4}{\sqrt{3x^2 + 1}}$
9. $F(x) = (x + 1)^2 (x - 3)^2$
10. $F(x) = \dfrac{(x + 3)^2}{(x - 1)^2}$
11. $F(x) = x\sqrt[3]{(x^2 - 3x + 1)^2}$
12. $F(x) = \dfrac{6x^2 + 1}{\sqrt{3x^3 + 2x^2}}$

D. Persamaan Garis Singgung Suatu Kurva

1. Gradien Garis Singgung Kurva $y = f(x)$ di $x = a$

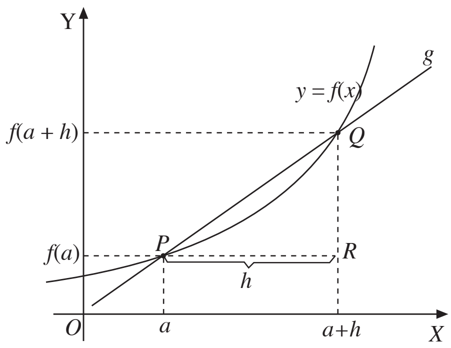
Gambar 5.4 adalah grafik fungsi dengan persamaan $y = f(x)$, titik P adalah suatu titik tetap pada grafik itu, sedangkan titik Q adalah titik di dekat P yang dapat dipindah-pindahkan (bergerak sepanjang grafik $y = f(x)$).

Jika koordinat titik $P(a, f(a))$ dan titik $Q(a + h, f(a + h))$, gradien (kemiringan) garis yang menghubungkan titik P dan Q adalah $m = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Jika Q mendekati P (dalam hal ini h mendekati 0), maka garis g menjadi garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik P.

Garis singgung di titik P ini merupakan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik dengan absis $x = a$. Oleh karena itu, gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik ini adalah turunan dari fungsi $y = f(x)$ di $x = a$, yaitu

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$



Gambar 5.4

Dengan demikian, gradien garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $P(a, f(a))$ adalah

$$m = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Dengan notasi *Leibniz*, nilai gradien kurva $y = f(x)$ di $x = a$ seperti di atas dapat ditulis

$$m = \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$$

dibaca "m sama dengan turunan fungsi f ke x untuk $x = a$".

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Persamaan garis yang menyinggung kurva $y = 2x^3 - 4x + 3$ di titik yang berbasis –1 adalah ....

a. $y = 2x + 3$
b. $y = 2x + 7$
c. $y = -2x + 3$
d. $y = -2x - 1$
e. $y = -2x - 2$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1998

2. Persamaan Garis Singgung pada Kurva

Jika titik $P(x_1, y_1)$ terletak pada kurva $y = f(x)$, persamaan garis singgung kurva yang melalui titik $P(x_1, y_1)$ adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan m adalah gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di $x = x_1$. Nilai m dapat ditentukan menggunakan rumus turunan fungsi, yaitu

$$m = f'(x_1)$$

Contoh:

Tentukan gradien dan persamaan garis singgung kurva $y = 2x^2 - 3$ di titik $(1, -1)$.

Penyelesaian:

Karena $y = 2x^2 - 3$ maka $\dfrac{dy}{dx} = 4x$.

Gradien garis singgung di titik $(1, -1)$ adalah $m = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 4(1) = 4$.

Jadi, persamaan garis singgung pada parabola $y = 2x^2 - 3$ di titik $(1, -1)$ adalah $y + 1 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x - 5$.

Problem Solving

Garis singgung kurva $y = x^2 + 8x + 1$ di titik P sejajar dengan garis $4x + 2y + 1 = 0$. Tentukan koordinat titik P dan persamaan garis singgung kurva yang melalui titik P.

Penyelesaian:

Misalkan koordinat titik P adalah (a, b). Persamaan kurvanya $y = x^2 + 8x + 1$, berarti $\frac{dy}{dx} = 2x + 8$.

Gradien garis singgung kurva $y = x^2 + 8x + 1$ di titik (a, b) adalah m_1, dengan

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x\,=\,a} = 2a + 8.$$

Misalkan gradien garis $4x + 2y + 1 = 0$ adalah m_2.

$$\begin{aligned} & 4x + 2y + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 2y = -4x - 1 \\ \Leftrightarrow\ & y = -2x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh $m_2 = -2$.

Syarat agar dua buah garis sejajar adalah $m_1 = m_2$.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} & m_1 = -2 \\ \Leftrightarrow\ & 2a + 8 = -2 \\ \Leftrightarrow\ & 2a = -10 \\ \Leftrightarrow\ & a = -5 \end{aligned}$$

Karena titik $P(a, b)$ terletak pada kurva $y = x^2 + 8x + 1$ maka

$$\begin{aligned} & y = a^2 + 8a + 1 \\ \Leftrightarrow\ & y = (-5)^2 + 8(-5)+1 \\ \Leftrightarrow\ & y = -14 \end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik P adalah $(-5, -14)$.

Persamaan garis singgung kurva $y = x^2 + 8x + 1$ di titik $P(-5, -14)$ adalah

$y + 14 = -2(x + 5) \Leftrightarrow y = -2x - 24$.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Garis singgung kurva $y = x^2 - 4x + 4$ di titik Q tegak lurus dengan garis $2x - y + 2 = 0$. Tentukan koordinat titik Q dan persamaan garis singgung kurva yang melalui titik Q.
2. Tentukan persamaan garis singgung kurva $x^3 - 9x^2 + 8y - 4 = 0$ yang tegak lurus dengan garis $3x - y + 5 = 0$.

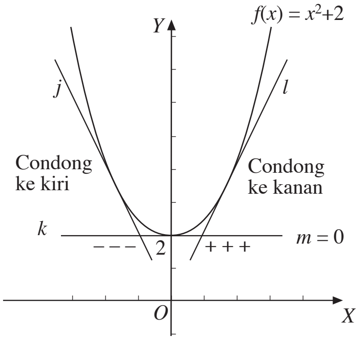
Uji Kompetensi 6

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan koordinat titik A pada kurva $y = x^2 + 2x + 2$ yang gradien garis singgungnya di titik tersebut adalah 2.
2. Tentukan koordinat titik-titik pada kurva $y = x^3 - 4x^2$ yang gradien garis singgung di titik tersebut adalah –5.
3. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^2 - 4x$ di titik (1, –3).
4. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 - x^2 - 2x + 4$ di titik (0, 4).
5. Garis singgung kurva $y = x^2 - 4x + 4$ di titik P sejajar dengan garis $2x - y + 2 = 0$. Tentukan koordinat titik P dan persamaan garis singgung kurva yang melalui titik P.
6. Diketahui kurva $y = x^4$. Tentukan persamaan garis singgung kurva yang sejajar dengan garis $x - 2y + 5 = 0$.
7. Diketahui kurva $3y = x^3 - 3x^2 + 6x + 4$. Tentukan persamaan garis singgung kurva yang tegak lurus dengan garis $2x - y + 3 = 0$.
8. Diketahui kurva $y = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 8$. Tentukan persamaan garis singgung kurva yang tegak lurus dengan garis $4x + y - 7 = 0$.

E. Fungsi Naik, Fungsi Turun, dan Nilai Stasioner

1. Pengertian Fungsi Naik dan Fungsi Turun



Gambar 5.5

Misalkan fungsi $f(x) = x^2 + 2$ digambarkan dalam diagram Cartesius seperti **Gambar 5.5**. Garis j, k, dan l masing-masing adalah garis singgung kurva fungsi tersebut. Dari grafik pada **Gambar 5.5** dapat dikatakan sebagai berikut.

a. $f(x)$ adalah fungsi turun pada interval $x < 0$ (di sebelah kiri sumbu Y).

b. $f(x)$ adalah fungsi naik pada interval $x > 0$ (di sebelah kanan sumbu Y).

c. $f(x)$ tidak naik dan tidak turun pada $x = 0$ (pada titik potong kurva dengan sumbu Y).

Secara matematis, pengertian fungsi naik dan fungsi turun adalah sebagai berikut.

Misalkan fungsi $f(x)$ terdefinisi pada interval I.

a. Fungsi $f(x)$ dikatakan *fungsi naik* dalam interval I apabila untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) < f(x_2)$, dengan notasi matematika dapat ditulis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

b. Fungsi $f(x)$ dikatakan *fungsi turun* dalam interval I apabila untuk setiap x_1 dan x_2 dalam interval I dan $x_1 < x_2$ maka berlaku $f(x_1) > f(x_2)$, dengan notasi matematika dapat ditulis

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Grafik $y = x^4 - 4x$ turun untuk x yang memenuhi

a. $x < 0$
b. $0 < x < 1$
c. $x > 1$
d. $x < 1$
e. $x < 0$ atau $x > 1$

Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2006

2. Syarat Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Perhatikan kembali **Gambar 5.5**, yaitu kurva $y = x^2 + 2$. Seperti yang telah kita ketahui bahwa turunan dari fungsi $f(x)$ atau $f'(x)$ dapat ditafsirkan sebagai gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $(x, f(x))$. Dengan demikian, dapat kita ketahui hal-hal berikut.

a. Dalam interval $x < 0$, fungsi $f(x) = x^2 + 2$ merupakan fungsi turun karena gradien garis singgungnya bernilai negatif (condong ke kiri) sehingga $f'(x) < 0$.

b. Dalam interval $x > 0$, fungsi $f(x) = x^2 + 2$ merupakan fungsi naik karena gradien garis singgungnya bernilai positif (condong ke kanan) sehingga $f'(x) > 0$.

c. Pada $x = 0$ fungsi $f(x) = x^2 + 2$ tidak naik dan tidak turun karena gradien garis singgungnya bernilai nol (mendatar) sehingga $f'(x) = 0$. Pada fungsi $f(x) = x^2 + 2$, $f(0)$ merupakan nilai stasioner.

Dari uraian di atas, dapat dikemukakan syarat fungsi naik dan fungsi turun.

> Misalkan fungsi $f(x)$ kontinu dalam interval I dan *diferensiabel* (dapat diturunkan) di setiap titik dalam interval tersebut.
>
> a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x dalam interval I maka fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi naik dalam interval I.
>
> b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x dalam interval I maka fungsi $f(x)$ dikatakan fungsi turun dalam interval I.

Untuk menentukan interval-interval pada saat fungsi $f(x)$ naik atau turun, langkah-langkahnya adalah sebagai berikut.

a. Tentukan turunan fungsi $f(x)$, yaitu $f'(x)$.

b. Selesaikan pertidaksamaan $f'(x) > 0$ untuk fungsi naik atau $f'(x) < 0$ untuk fungsi turun.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Kurva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$ naik pada interval ....

a. $x > 0$

b. $-3 < x < 1$

c. $-1 < x < 3$

d. $x < -3$ atau $x > 1$

e. $x < -1$ atau $x > 3$

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1996

Contoh:

Tentukan interval-interval yang menunjukkan fungsi $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$

a. naik;

b. turun.

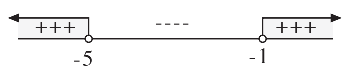
Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x + 4$ maka

$f'(x) = 3x^2 + 18x + 15 = 3(x^2 + 6x + 5)$.

a. $f(x)$ merupakan fungsi naik jika

$$\begin{aligned} & f'(x) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & 3(x^2 + 6x + 5) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + 6x + 5 > 0 \\ \Leftrightarrow\ & (x + 1)(x + 5) > 0 \\ \Leftrightarrow\ & x < -5 \text{ atau } x > -1 \end{aligned}$$



Gambar 5.6

Jadi, $f(x)$ merupakan fungsi naik pada interval $x < -5$ atau $x > -1$.

b. $f(x)$ merupakan fungsi turun jika

$f'(x) < 0$

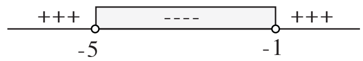
$\Leftrightarrow\ 3(x^2 + 6x + 5) < 0$

$\Leftrightarrow\ x^2 + 6x + 5 < 0$

$\Leftrightarrow\ (x + 1)(x + 5) < 0$

$\Leftrightarrow\ -5 < x < -1$

Jadi, $f(x)$ merupakan fungsi turun pada interval $-5 < x < -1$.

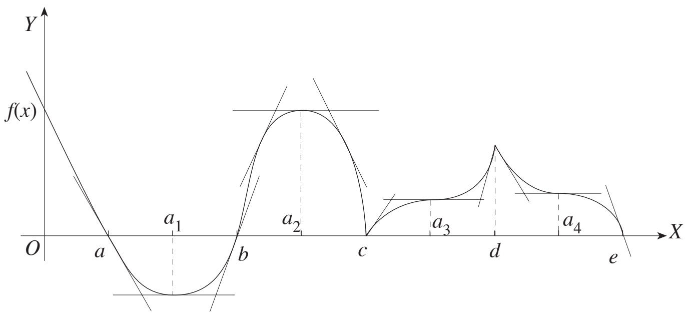


Gambar 5.7

3. Nilai Stasioner

a. Pengertian Nilai Stasioner dan Titik Stasioner

Misalkan terdapat sebuah kurva dengan persamaan $y = f(x)$ dan gradien garis singgung kurva itu di titik $(a, f(a))$ dapat dinyatakan sebagai turunan fungsi di $x = a$ atau $f'(a)$. Grafik beberapa macam bentuk kurva $y = f(x)$, antara lain terlihat seperti pada **Gambar 5.8**.



Gambar 5.8

Pada **Gambar 5.8** arah garis singgung di titik $(a_1, f(a_1))$, $(a_2, f(a_2))$, $(a_3, f(a_3))$, dan $(a_4, f(a_4))$ sejajar sumbu X. Oleh karena itu, gradien garis singgungnya bernilai nol sehingga $f'(a_1) = 0$, $f'(a_2) = 0$, $f'(a_3) = 0$ dan $f'(a_4) = 0$. Titik-titik ini disebut *titik stasioner*, yaitu suatu titik pada kurva di mana gradien garis singgung kurva di titik tersebut bernilai nol. Nilai fungsi f di titik itu dinamakan *nilai stasioner*.

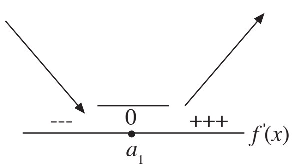
> **Tes Mandiri**
>
> Kerjakan di buku tugas
>
> Fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ mencapai ....
> a. maksimum di (0, 5)
> b. maksimum di (3, –22)
> c. minimum di (–1, 10)
> d. minimum di (–3, 22)
> e. minimum di (3, –22)
>
> **Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2004**

b. Jenis-Jenis Titik Stasioner

Jenis-jenis titik stasioner dapat kita tentukan dengan memerhatikan tanda dari $f'(x)$. Perhatikan kembali **Gambar 5.8**.

1) Untuk $x < a_1$, nilai $f'(x)$ negatif; untuk $x = a_1$, nilai $f'(a_1) = 0$; sedangkan untuk $x > a_1$, nilai $f'(x)$ positif. Karena nilai $f'(x)$ berubah tanda dari negatif ke nol, kemudian ke positif, dalam garis bilangan hal ini dapat digambarkan seperti gambar di samping.

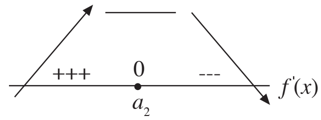
   Ingat, tanda 0 di atas garis bilangan bukan menunjukkan nilai suatu bilangan, tetapi hanya tanda arah



Gambar 5.9

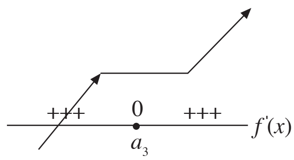
gradien. Pada keadaan ini, titik $(a_1, f(a_1))$ disebut *titik balik minimum*, sedangkan nilai $f(a_1)$ disebut *nilai balik minimum* atau *harga minimum*.

2) Untuk $x < a_2$, nilai $f'(x)$ positif; untuk $x = a_2$, nilai $f'(a_2) = 0$; sedangkan untuk $x > a_2$, nilai $f'(x)$ negatif. Karena nilai $f'(x)$ berubah tanda dari positif ke nol, kemudian ke negatif, dalam garis bilangan hal ini dapat digambarkan seperti gambar di samping. Pada keadaan ini, titik $(a_2, f(a_2))$ disebut *titik balik maksimum*, sedangkan nilai $f(a_2)$ disebut *nilai balik maksimum* atau *harga maksimum*.



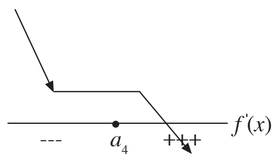
Gambar 5.10

3) Untuk $x < a_3$, nilai $f'(x)$ positif; untuk $x = a_3$, nilai $f'(a_3) = 0$; sedangkan untuk $x > a_3$, nilai $f'(x)$ juga positif. Karena nilai $f'(x)$ berubah tanda dari positif ke nol, kemudian ke positif lagi, dalam garis bilangan hal ini dapat ditampilkan seperti gambar di samping.



Gambar 5.11

4) Untuk $x < a_4$, nilai $f'(x)$ negatif; untuk $x = a_4$, nilai $f'(a_4) = 0$; sedangkan untuk $x > a_4$, nilai $f'(x)$ juga negatif. Karena nilai $f'(x)$ berubah tanda dari negatif ke nol, kemudian ke negatif lagi, dalam garis bilangan hal ini dapat digambarkan seperti gambar di samping.



Gambar 5.12

Pada dua keadaan yang terakhir, yaitu titik $(a_3, f(a_3))$ dan $(a_4, f(a_4))$ disebut *titik belok horizontal* atau sering disebut *titik belok* saja.

Contoh:

Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$. Tentukan

a. titik stasioner;

b. jenis titik stasionernya;

c. nilai maksimum dan nilai minimum.

Penyelesaian:

Karena $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$

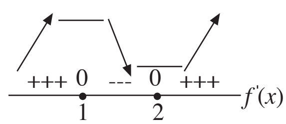
maka $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$.

a. Titik stasioner syaratnya $f'(x) = 0$.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = 2$$

Untuk $x = 1$ maka $f(1) = 2(1^3) - 9(1^2) + 12\,(1) = 5$, sedangkan untuk $x = 2$ maka

$$f(2) = 2(2^3) - 9(2^2) + 12(2)$$
$$= 4.$$

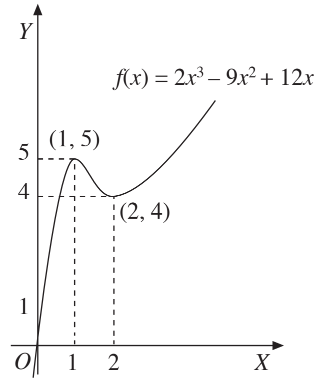


Gambar 5.13

Jadi, terdapat dua titik stasioner, yaitu (1, 5) dan (2, 4).

b. Untuk menentukan jenis titik stasioner, dibuat garis bilangan seperti **Gambar 5.13**.
Dari **Gambar 5.13**, dapat kita simpulkan bahwa titik (1, 5) merupakan titik balik maksimum sebab $f'(x)$ berubah tanda dari positif ke nol, kemudian ke negatif, sedangkan titik (2, 4) merupakan titik balik minimum sebab $f'(x)$ berubah tanda dari negatif ke nol, kemudian ke positif.

c. Nilai maksimum fungsi adalah $f(1) = 5$ dan nilai minimum fungsi adalah $f(2) = 4$.



Gambar 5.14

4. Nilai Maksimum dan Minimum Suatu Fungsi dalam Interval Tertutup

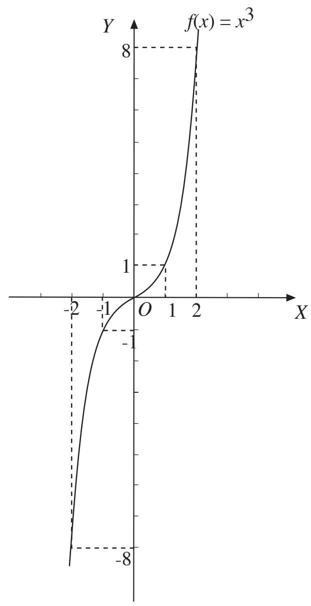
Pada pembahasan sebelumnya kita sudah mempelajari baik cara menentukan nilai maksimum maupun nilai minimum suatu fungsi $f(x)$. Sekarang, jika fungsi $f(x)$ terletak dalam interval tertutup, bagaimana cara menentukan nilai maksimum atau nilai minimumnya? Untuk dapat menjawab permasalahan tersebut, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = x^3$ dalam interval $-2 \leq x \leq 2$.

Penyelesaian:

Grafik fungsi $f(x) = x^3$ adalah seperti di samping.
Dengan memperhatikan grafik fungsi di samping, tampak bahwa pada interval $-2 \leq x \leq 2$ nilai maksimum fungsi di atas adalah 8, yaitu untuk $x = 2$, sedangkan nilai minimumnya adalah -8, yaitu untuk $x = -2$.
Perhatikan pula bahwa nilai maksimum dalam interval tersebut, yaitu $f(2)$ merupakan nilai fungsi pada ujung kanan interval, sedangkan nilai minimumnya, yaitu $f(-2)$, merupakan nilai fungsi pada ujung kiri interval.



Gambar 5.15

Dengan memerhatikan contoh tersebut, dapat kita ketahui bahwa nilai maksimum atau nilai minimum suatu fungsi pada interval tertutup merupakan nilai fungsi pada ujung-ujung interval. Jadi, nilai maksimum atau minimum fungsi dalam interval tertutup *tidak selalu* merupakan nilai balik maksimum atau nilai minimumnya. Hal ini dapat kita rangkum sebagai berikut.

Nilai maksimum dan minimum fungsi dalam interval tertutup dapat diperoleh dari dua kemungkinan, yaitu

a. nilai-nilai stasioner fungsi (nilai balik maksimum atau nilai balik minimum);
b. nilai-nilai fungsi pada ujung interval.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Titik belok dari fungsi $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ adalah ....

a. (–2, 3)
b. (–2, 7)
c. (–2, 5)
d. (2, 10)
e. (2, 5)

Soal UMPTN, Kemampuan Dasar, 1997

Contoh:

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari fungsi $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ pada interval $-2 \leq x \leq 0$.

Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 4$.

Nilai-nilai fungsi pada ujung interval adalah sebagai berikut.

- $f(-2) = (-2)^4 + 4(-2)^3 - 2(-2)^2 - 12(-2) + 4$
  $= 16 - 32 - 8 + 24 + 4 = 4$
- $f(0) = 0^4 + 4(0)^3 - 2(0)^2 - 12(0) + 4 = 4$

Selanjutnya, turunan fungsi f adalah $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 - 4x - 12 = 4(x^3 + 3x^2 - x - 3)$.

Titik stasioner terjadi jika $f'(x) = 0$ sehingga

$4(x^3 + 3x^2 - x - 3) = 0$

$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 1$ atau $x = -1$ atau $x = -3$.

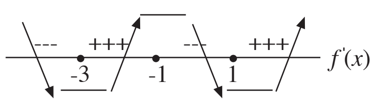
Untuk $x = 1$ maka $f(1) = 1^4 + 4(1)^3 - 2(1)^2 - 12(1) + 4 = -5$,

untuk $x = -1$ maka $f(-1) = (-1)^4 + 4(-1)^3 - 2(-1)^2 - 12(-1) + 4 = 11$, dan

untuk $x = -3$ maka $f(-3) = (-3)^4 + 4(-3)^3 - 2(-3)^2 - 12(-3) + 4 = -5$.

Oleh karena itu, titik stasionernya adalah titik (1, –5), (–1, 11), dan (–3, –5).

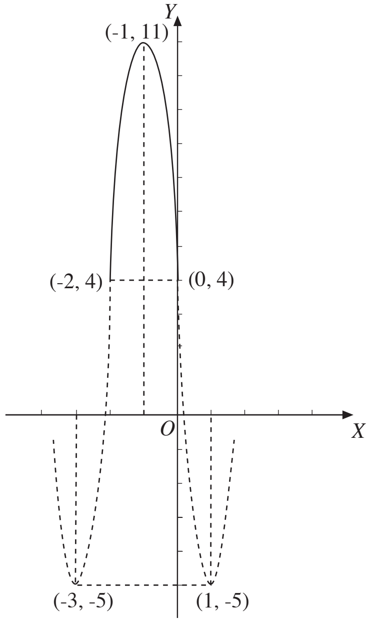
Untuk menyelidiki jenis stasioner titik-titik tersebut, dibuat garis bilangan untuk $f'(x) = 4(x - 1)(x + 1)(x + 3)$.



Gambar 5.16

Dari garis bilangan tersebut, tampak bahwa (–3, –5) adalah titik balik minimum, (–1, 11) merupakan titik balik maksimum, dan (1, –5) merupakan titik balik minimum. Sketsa grafiknya tampak seperti pada **Gambar 5.17**.

Dengan memerhatikan sketsa tersebut, nilai minimum fungsi $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 4$ pada interval $-2 \leq x \leq 0$ adalah 4, yaitu untuk $x = -2$ dan $x = 0$, sedangkan nilai maksimumnya adalah 11, yaitu untuk $x = -1$.



Gambar 5.17

Uji Kompetensi 7

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan interval yang menunjukkan fungsi berikut naik dan interval yang menunjukkan fungsi berikut turun.

   a. $f(x) = x^2 - 5x + 6$

   b. $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - \frac{13}{2}$

   c. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

   d. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1$

   e. $f(x) = x^4 + 4x$

   f. $f(x) = 2x - \frac{1}{x}$

2. Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi berikut selalu naik untuk setiap x bilangan real.

   a. $f(x) = 3x^3 + 4x - 7$

   b. $f(x) = x^3 + 2x - 5$

   c. $f(x) = x^5 + 3x^3 + x - 12$

   d. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + x^3 + x - 12$

3. Tunjukkan bahwa fungsi-fungsi berikut selalu turun untuk setiap x bilangan real.

   a. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 8x + 6$

   b. $f(x) = -x^3 - 12x + 1$

   c. $f(x) = -x^5 - 3x^3 - 15x + 7$

   d. $f(x) = -\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^3 - x + 36$

4. Tentukan titik stasioner, jenis titik stasioner, nilai maksimum, dan nilai minimum dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = x^2 - 8x + 7$
   b. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$
   c. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
   d. $f(x) = x^3 - 3x - 1$
   e. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
   f. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
   g. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$
   h. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 2$
   i. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$
   j. $f(x) = 3x^4 - 4x^3$
5. Tentukan nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi-fungsi berikut dalam interval tertutup I.
   a. $f(x) = (x - 3)^2$, $I = [0, 5]$
   b. $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $I = [-1, 2]$
   c. $f(x) = x^2 + x - 12$, $I = [-2, 4]$
   d. $f(x) = -x^3$, $I = [-1, 1]$
   e. $f(x) = (x - 3)^3 + 4$, $I = [1, 4]$
   f. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, $I = [-1, 3]$
   g. $f(x) = (x^3 - 12x)$, $I = [-3, 4]$
   h. $f(x) = (2x^3 - 3x^2 - 12x + 8]$, $I = [-3, 4]$
   i. $f(x) = (x + 1)^4$, $I = [-2, 1]$
   j. $f(x) = x^4$, $I = [-2, 5]$
6. Penerimaan penjualan barang elekronik sebanyak x unit dinyatakan dengan $P(x) = 60x - 0{,}025x^2$, untuk $0 \leq x \leq 2.400$. $P(x)$ dalam puluh ribuan. Untuk x unit berapakah penerimaan penjualan akan menurun? Berapakah penerimaan maksimum yang dicapai?

F. Turunan Kedua Suatu Fungsi

1. Pengertian Turunan Kedua

Misalkan terdapat fungsi $f(x)$ yang diferensiabel dengan fungsi turunannya $f'(x)$. Dalam hal ini, $f'(x)$ dinamakan *turunan pertama* dari $f(x)$. Selanjutnya, jika $f'(x)$ didiferensialkan, akan diperoleh fungsi baru yang disebut *turunan kedua* dari $f(x)$. Jika turunan pertama fungsi $f(x)$ dapat dinyatakan dengan salah satu notasi $f'(x)$, y', $\dfrac{df(x)}{dx}$, atau $\dfrac{dy}{dx}$, dengan cara yang sama turunan kedua $f(x)$ dapat dituliskan dengan salah satu notasi $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$, atau $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Notasi $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ berasal dari $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{df(x)}{dx}\right)$, sedangkan notasi $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ berasal dari $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Contoh:

Carilah turunan kedua dari fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^2 + 1$

b. $f(x) = (3x + 2)^5$

c. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$

Penyelesaian:

a. $f(x) = 2x^5 - x^4 + 3x^2 + 1$

$f'(x) = 10x^4 - 4x^3 + 6x$

$f''(x) = 40x^3 - 12x^2 + 6$

b. $f(x) = (3x + 2)^5$

$f'(x) = 5(3x + 2)^4(3) = 15(3x + 2)^4$

$f''(x) = 4(15)(3x + 2)^3(3) = 180(3x + 2)^3$

c. $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1}$

Misalkan $u(x) = 2x + 1$ maka $u'(x) = 2$ dan $v(x) = x^2 + 1$ maka $v'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$= \frac{2(x^2 + 1) - (2x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2 - 4x^2 - 2x}{x^4 + 2x^2 + 1} = \frac{-2x^2 - 2x + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

Selanjutnya, dari $f'(x)$ dapat ditentukan $f''(x)$ sebagai berikut.

Misalkan $u(x) = -2x^2 - 2x + 2 \Leftrightarrow u'(x) = -4x - 2$ dan

$v(x) = x^4 + 2x^2 + 1 \Leftrightarrow v'(x) = 4x^3 + 4x$.

$$f''(x) = \frac{u'(x)\ v(x) - u(x)\ v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$= \frac{(-4x - 2)(x^4 + 2x^2 + 1) - (-2x^2 - 2x + 2)(4x^3 + 4x)}{(x^4 + 2x^2 - 1)^2}$$

$$= \frac{4x^5 + 6x^4 - 8x^3 + 4x^2 - 12x - 2}{(x^4 + 2x^2 + 1)^2}$$

2. Menentukan Nilai Stasioner Suatu Fungsi dan Penerapannya

Selain menggunakan turunan pertama, jenis-jenis titik stasioner suatu fungsi juga dapat ditentukan dengan menggunakan turunan kedua fungsi tersebut. Untuk memahami penggunaan turunan kedua, perhatikan kembali contoh halaman 222 dan 223, yaitu sebagai berikut.

a. Menentukan titik stasioner, jenis titik stasioner, serta nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ (halaman 222).

Dari contoh tersebut diperoleh hasil titik stasioner (1, 5) merupakan titik balik maksimum, titik stasioner (2, 4) merupakan titik balik minimum. Nilai maksimum dan minimum fungsi masing-masing adalah $f(1) = 5$ dan $f(2) = 4$. Dengan menggunakan turunan kedua dapat kita selidiki sebagai berikut.

Perhatikan fungsi $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$.

Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$.

$f''(x) = 12x - 18$ sehingga $f''(2) = 12(2) - 18 = 6 > 0$ dan $f''(1) = 12(1) - 18 = -6 < 0$.

- Jika $f'(2) = 0$ dan $f''(2) > 0$ maka $(2, f(2)) = (2, 4)$ adalah titik balik minimum.
- Jika $f'(1) = 0$ dan $f''(1) < 0$ maka $(1, f(1)) = (1, 5)$ adalah titik balik maksimum.

b. Menentukan nilai maksimum dan minimum fungsi $f(x) = x^3$, $-2 \le x \le 2$ (halaman 223).

Dengan menggunakan turunan pertama, diperoleh

$$f'(x) = 3x^2 \Leftrightarrow 0 = 3x^2$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Titik stasionernya adalah $(0, f(0))$, yaitu (0, 0).

Titik (0, 0) merupakan titik belok horizontal.

Dengan menggunakan turunan kedua, diperoleh $f''(x) = 6x$.

Dengan demikian, untuk $x = 0$, diperoleh $f''(0) = 0$.

Jadi, jika $f''(0) = 0$ dan $f''(x)$ berganti tanda maka titik $(0, f(0)) = (0, 0)$ merupakan titik belok horizontal.

$f'(x)$ + + + | + + +

0

Gambar 5.18

– – – | + + +

0

$f'(x)$ berganti tanda

Gambar 5.19

Oleh karena itu, misalkan terdapat suatu fungsi kontinu f dalam interval $b < x < c$ yang memuat $x = a$, turunan pertama dan turunan kedua $f(x)$ terdefinisi pada interval tersebut.

1) Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik balik minimum.
2) Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$ maka $(a, f(a))$ adalah titik balik maksimum.
3) Jika $f''(a) = 0$ dan $f''(a)$ bergantian tanda pada sebelah kiri dan kanan titik a maka $(a, f(a))$ merupakan *titik belok horizontal*.

Dengan demikian, untuk mendapatkan titik belok horizontal, selain syarat bahwa turunan kedua harus sama dengan nol, perlu diselidiki bahwa turunan kedua itu berubah tanda dari tanda positif ke nol, kemudian ke tanda negatif atau dari tanda negatif ke nol, kemudian ke tanda positif. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Contoh:

Tentukan titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok fungsi $f(x) = x^4 - 8x^2$.

Penyelesaian:

Diketahui $f(x) = x^4 - 8x^2$ maka $f'(x) = 4x^3 - 16x$ dan $f''(x) = 12x^2 - 16$.
Titik stasioner terjadi jika $f'(x) = 0$.

$$4x^3 - 16x = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2 \text{ atau } x = -2.$$

Untuk $x = 0$, nilai $f(0) = (0)^4 - 8(0)^2 = 0$ dan $f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$.
Berarti, (0, 0) adalah titik balik maksimum.
Untuk $x = 2$, nilai $f(2) = 2^4 - 8(2)^2 = -16$ dan $f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 32 > 0$.
Berarti, (2, –16) adalah titik balik minimum.
Untuk $x = -2$, nilai $f(-2) = (-2)^4 - 8(-2)^2 = -16$ dan $f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$.
Berarti, (–2, –16) adalah titik balik minimum.
Untuk mendapatkan titik belok horizontal, syaratnya $f''(x) = 0$.

$$12x^2 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow 4(3x^2 - 4) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3}$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

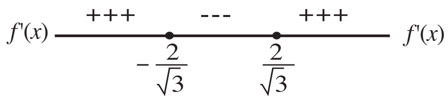
Untuk $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, nilai $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 - 8\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{80}{9}$.

Untuk $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, nilai $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^4 = -8\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = -\frac{80}{9}$.

Selanjutnya, diselidiki beberapa nilai x berikut.

1) Untuk $x < \frac{2}{\sqrt{3}}$, diambil $x = 0$ sehingga $f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$.
2) Untuk $x > -\frac{2}{\sqrt{3}}$, diambil $x = 0$ sehingga
   $f''(0) = 12(0)^2 - 16 = -16 < 0$.
3) Untuk $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$, diambil $x = 2$ sehingga
   $f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 48 - 16 = 32 > 0$.
4) Untuk $x < -\frac{2}{\sqrt{3}}$, diambil $x = -2$ sehingga
   $f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 = 32 > 0$.

Apabila digambarkan dalam garis bilangan, tampak seperti gambar berikut.



Gambar 5.20

Jadi, titik beloknya adalah $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{80}{9}\right)$ dan $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{80}{9}\right)$.

Uji Kompetensi 8

Kerjakan di buku tugas

1. Tentukan turunan kedua dari fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = 4x^2 - 8x + 12$
   b. $f(x) = -8x^2 + 5x - 15$
   c. $f(x) = -5x^3 + 4x^2 - 15x + 20$
   d. $f(x) = 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 3x + 12$
   e. $f(x) = x^{-4} + x^{-3} - 6x^{-2} + 4x^{-1} + 6$
   f. $f(x) = (x + 4)^2(x - 3)^3$
   g. $f(x) = (2x + 7)^3(x^2 + 2x - 1)$
   h. $f(x) = \dfrac{x - 3}{x + 4}$
   i. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x + 4}$
   j. $f(x) = \dfrac{3x - 10}{x^2 - 7x + 4}$
2. Tentukan titik belok dari kurva $f(x) = x^3$.
3. Buktikan bahwa kurva $f(x) = x^6$ tidak mempunyai titik belok.
4. Tentukan titik balik maksimum, titik balik minimum, dan titik belok dari fungsi-fungsi berikut dengan menggunakan turunan kedua.
   a. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 2$
   b. $f(x) = x^3 - 3x$
   c. $f(x) = x^3 - 3x^2$
   d. $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x$
   e. $f(x) = x^4 - 18x^2 + 36$
   f. $f(x) = 6x^5$
5. Tentukan nilai stasioner fungsi-fungsi di bawah ini, kemudian tentukan sifatnya.
   a. $f(x) = 3 + x^{\frac{2}{3}}$
   b. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 6\text{x}^2 + 7$
   c. $f(x) = 2x(12 - 2x)^2$
   d. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 8$
   e. $f(x) = (x^2 - 4)^2$
   f. $f(x) = 10x^6$
6. Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = (3 - x)^2$ tidak memiliki nilai maksimum dan minimum.

G. Menggambar Grafik Suatu Fungsi

Secara umum, untuk menggambar grafik suatu fungsi diperlukan beberapa titik yang memenuhi fungsi tersebut. Kemudian jika kita hubungkan beberapa titik tersebut dengan kurva mulus maka akan diperoleh grafik fungsi yang dimaksud. Setelah kita mempelajari turunan sebuah fungsi, cara menentukan titik stasioner dan jenisnya, serta mengetahui interval di mana fungsi naik dan fungsi turun, maka kita akan dapat menggambarkan fungsi aljabar $y = f(x)$. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut.

1. Tentukan titik potong kurva $y = f(x)$ dengan sumbu-sumbu koordinat (jika mudah ditentukan).
   a. Titik potong kurva dengan sumbu X, syaratnya $y = 0$.
   b. Titik potong kurva dengan sumbu Y, syaratnya $x = 0$.
2. Tentukan titik stasioner dan jenisnya.
3. Tentukan interval di mana fungsi naik dan fungsi turun.
4. Tentukan nilai fungsi $f(x)$ untuk x besar positif dan untuk x besar negatif.
5. Tentukan titik-titik bantu apabila diperlukan.
6. Hubungkan titik-titik yang diperoleh pada langkah 1, 2, dan 5 dengan kurva mulus dengan tetap memerhatikan langkah 3 dan 4.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut.

Tes Mandiri

Kerjakan di buku tugas

Grafik fungsi
$f(x) = 5 + 15x + 9x^2 + x^3$ naik untuk x yang memenuhi ....
a. $x < 1$ atau $x > 5$
b. $1 < x < 5$
c. $-5 < x < -1$
d. $x < -5$ atau $x > -1$
e. $-5 < x < 1$

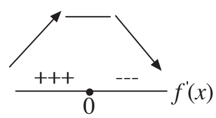
Soal SPMB, Kemampuan Dasar, 2002

Contoh:

Gambarlah kurva $y = 4 - x^2$.

Penyelesaian:

a. Titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat
   1) Titik potong kurva dengan sumbu X syaratnya $y = 0$ sehingga $0 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ atau $x = -2$. Jadi, titik potong kurva dengan sumbu X adalah $(-2, 0)$ dan $(2, 0)$.
   2) Titik potong kurva dengan sumbu Y syaratnya $x = 0$ sehingga $y = 4 - 0^2 = 4$. Jadi, titik potong kurva dengan sumbu Y adalah $(0, 4)$.



Gambar 5.21

b. Titik stasioner dan jenisnya
   Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$ sehingga $-2x = 0$ atau $x = 0$. Untuk $x = 0$, nilai $f(0) = 4$. Jadi, titik stasioner tersebut dapat adalah $(0, 4)$. Jenis titik stasionernya ditentukan dengan membuat garis bilangan seperti **Gambar 5.21**.
   Dari garis bilangan itu tampak bahwa titik stasioner itu adalah titik balik maksimum.

c. Pada interval $x < 0$, nilai $f'(x)$ positif, berarti fungsi $f(x)$ naik, sedangkan untuk interval $x > 0$, nilai $f'(x)$ negatif, berarti fungsi $f(x)$ turun.

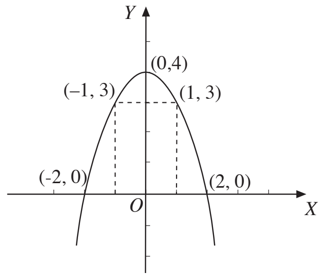
d. Untuk $x = +\infty$, nilai $f(x) = 4 - (+\infty)^2 = -\infty$ (besar negatif) dan untuk $x = -\infty$, nilai $f(x) = 4 - (-\infty)^2 = -\infty$ (besar negatif).

e. Titik bantu

Untuk $x = 1$ maka $y = 4 - 1^2 = 3$ dan untuk $x = -1$ maka

$y = 4 - (-1)^2 = 3$. Jadi, diperoleh titik bantu (1, 3) dan (–1, 3).

f. Dengan menghubungkan titik-titik yang diperoleh pada langkah a, b, dan e, tetapi tetap memerhatikan langkah c dan d diperoleh grafik $y = 4 - x^2$ seperti **Gambar 5.22**.



Gambar 5.22

Problem Solving

Gambarlah kurva $y = (x - 1)^2(x + 2)$.

Penyelesaian:

a. Titik potong kurva dengan sumbu-sumbu koordinat

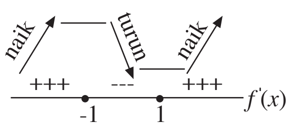
1) Titik potong kurva dengan sumbu X syaratnya $y = 0$ sehingga $0 = (x - 1)^2(x + 2)$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ atau $x = -2$. Jadi, titik potong kurva dengan sumbu X adalah (1, 0) dan (–2, 0).

2) Titik potong kurva dengan sumbu Y syaratnya $x = 0$ sehingga $y = (0 - 1)^2(0 + 2) = 2$. Jadi, titik potong kurva dengan sumbu Y adalah (0, 2).

b. Titik stasioner dan jenisnya

Titik stasioner diperoleh jika $f'(x) = 0$. Misalkan $u(x) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$ dan $v(x) = x + 2$ maka $u'(x) = 2x - 2$ dan $v'(x) = 1$.

Oleh karena itu,
$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \\ &= (2x - 2)(x + 2) + x^2 - 2x + 1 \\ &= 2x^2 + 2x - 4 + x^2 - 2x + 1 \\ &= 3x^2 - 3 \end{aligned}$$



Gambar 5.23

Jika $f'(x) = 0$ maka $3x^2 - 3 = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 1$ atau $x = -1$.

Untuk $x = 1$ maka $f(1) = (1 - 1)^2(1 + 2) = 0$.

Untuk $x = -1$ maka $f(-1) = (-1 - 1)^2(-1 + 2) = (-2)^2(1) = 4$.

Jadi, titik stasionernya adalah (1, 0) dan (–1, 4). Jenis titik stasionernya dapat ditentukan dengan membuat garis bilangan seperti **Gambar 5.23**.

Dari garis bilangan tersebut, tampak bahwa titik (–1, 4) adalah titik balik maksimum, sedangkan titik (1, 0) adalah titik balik minimum.

c. Pada interval $x < -1$ dan $x > 1$, nilai $f'(x)$ positif, berarti fungsi $f(x)$ naik, sedangkan untuk interval $-1 < x < 1$, nilai $f'(x)$ negatif berarti fungsi $f(x)$ turun.

d. Untuk $x = +\infty$,

nilai $f(x) = ((+\infty) - 1)^2((+\infty) + 2) = +\infty$ (besar positif), untuk $x = -\infty$,

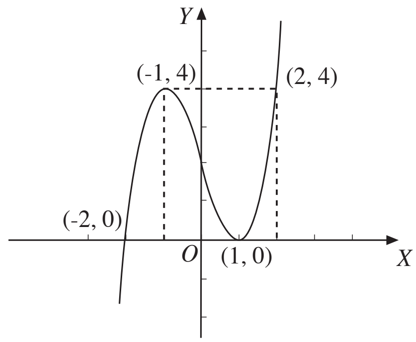
nilai $f(x) = ((-\infty) - 1)^2((-\infty) + 2) = -\infty$ (besar negatif).

e. Titik bantu

Untuk $x = 2$ maka $y = (2 - 1)^2(2 + 2) = 4$.

Jadi, diperoleh titik bantu (2, 4).

f. Dengan menghubungkan titik-titik yang diperoleh pada langkah a, b, dan e, tetapi tetap memerhatikan langkah c dan d, diperoleh grafik $y = (x - 1)^2(x + 2)$ seperti **Gambar 5.24**.



Gambar 5.24

Uji Kompetensi 9

Kerjakan di buku tugas

Gambarlah kurva dari fungsi-fungsi berikut.

1. $f(x) = x^2 - 6x - 1$
2. $f(x) = x^2 - 4x - 5$
3. $f(x) = x^2 + 11x + 24$
4. $f(x) = x^2 + 4x - 12$
5. $f(x) = -x^2 + 11x - 24$
6. $f(x) = 2x^3 + 11x^2 + 12x - 9$
7. $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 7$
8. $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x + 5$
9. $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 1$
10. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

H. Model Matematika Nilai Ekstrem Fungsi

Pemodelan matematika yang berkaitan dengan nilai ekstrem (maksimum dan minimum) suatu fungsi dapat ditentukan dari berbagai persoalan. Untuk dapat memahami bagaimana memodelkan, menyelesaikan, dan menafsirkannya, perhatikan contoh berikut.

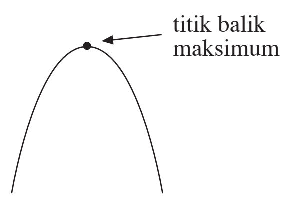
Contoh:

Jumlah bilangan x dan y adalah 40. Hasil kalinya adalah p.

a. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan x dan y.
b. Nyatakan p dalam x.
c. Tentukan kedua bilangan tersebut agar mempunyai hasil kali terbesar.

Penyelesaian:

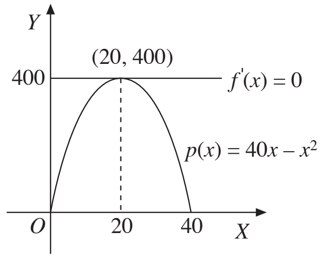
a. Secara rinci, permasalahan di atas dapat diselesaikan sebagai berikut. Dari soal diketahui $x + y = 40$ dan $p = xy$.
b. Karena $x + y = 40 \Leftrightarrow y = 40 - x$ maka $p = x(40 - x) = 40x - x^2$. Tampak bahwa p merupakan fungsi kuadrat dalam x sehingga dapat ditulis $p(x) = 40x - x^2$.



Gambar 5.25

c. Karena $p(x)$ merupakan fungsi kuadrat dengan koefisien x^2 adalah $-1 < 0$, maka kurvanya berbentuk parabola terbuka ke bawah. Karena terbuka ke bawah, maka titik baliknya adalah titik balik maksimum. Perhatikan ilustrasinya.

Gradien garis singgung di titik balik maksimum adalah nol karena arahnya mendatar. Artinya, $p'(x) = 0 \Leftrightarrow 40 - 2x = 0$. Dengan demikian, diperoleh $2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$.
Karena $x = 20$ titik balik maksimum, maka nilai maksimumnya adalah $p(20)$ sehingga $p(20) = 40(20) - (20)^2 = 400$. Perhatikan grafik di samping.



Gambar 5.26

Jadi, hasil kali maksimum yang dimaksud adalah $p = 400$.
Secara singkat, soal di atas dapat dikerjakan sebagai berikut.

a. Persamaan yang menyatakan hubungan x dan y adalah $x + y = 40$ atau $y = 40 - x$.
b. Hasil kalinya p. Dengan demikian,

$$\begin{aligned} & p = xy \\ \Leftrightarrow\ & p = x(40 - x) \\ \Leftrightarrow\ & p = 40x - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & p(x) = 40x - x^2 \end{aligned}$$

c. Hasil kali terbesar diperoleh jika $p'(x) = 0$. Berarti,
$40 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = 40 \Leftrightarrow x = 20$.
Karena $y = 40 - x$ maka $y = 40 - 20 = 20$. Jadi, kedua bilangan tersebut adalah $x = 20$ dan $y = 20$.

Problem Solving

Diketahui fungsi biaya total $C = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q - 5$ (dalam jutaan rupiah).
Fungsi biaya marjinal (dinyatakan M_C) adalah turunan dari fungsi biaya total terhadap Q, dengan Q menyatakan jumlah unit produk. Tentukan
a. fungsi biaya marjinal;
b. unit produksi agar biaya total minimum dan tentukan pula biaya yang minimum itu.

Penyelesaian:

a. $C = \frac{1}{3}Q^3 - \frac{7}{2}Q^2 + 12Q - 5$

$$M_C = \frac{dC}{dQ} = Q^2 - 7Q + 12$$

Jadi, fungsi biaya marginal adalah $M_C = Q^2 - 7Q + 12$.

b. Agar biaya total minimum, $M_C = 0$. Dengan kata lain, $\frac{dC}{dQ} = 0$

$$Q^2 - 7Q + 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow (Q - 5)(Q - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow Q - 5 = 0 \text{ atau } Q - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow Q = 5 \text{ atau } Q = 2$$

Jadi, agar biaya total minimum, jumlah produksi adalah 5 unit atau 2 unit.
Biaya total minimumnya adalah sebagai berikut.

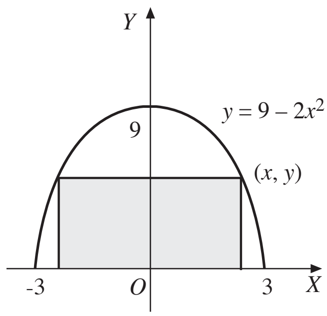
Untuk $Q = 5$ maka $C = \frac{1}{3}(5^3) - \frac{7}{2}(5^2) + 12(5) - 5 = 9{,}1667$ atau Rp9.166.700,00.

Untuk $Q = 2$ maka $C = \frac{1}{3}(2^3) - \frac{7}{2}(2^2) + 12(2) - 5 = 7{,}6667$ atau Rp7.666.700,00.

Soal Terbuka

Kerjakan di buku tugas

1. Suatu parabola dinyatakan dengan persamaan $y = 9 - x^2$. Daerah di atas sumbu X dan di bawah parabola dibuat persegi panjang dengan dua buah titik sudutnya terletak pada sumbu X, sedangkan dua buah titik sudut lainnya terletak pada parabola, seperti pada gambar di samping.



Gambar 5.27

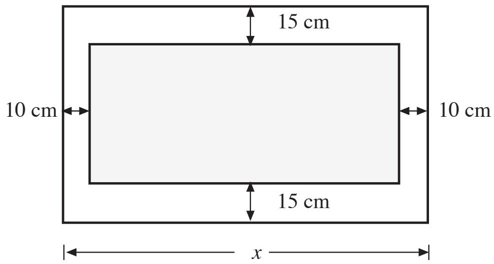
   a. Jika L menyatakan luas persegi panjang itu, nyatakanlah L sebagai fungsi x.
   b. Tentukanlah $\frac{dL}{dx}$.
   c. Tentukan nilai x yang menyebabkan L maksimum.
   d. Berapakah nilai L maksimum yang dapat dicapai?
2. Diketahui fungsi biaya total $C = (Q - 2)^3$.
   Tentukan fungsi biaya marginal dan berapa unit yang harus diproduksi dengan biaya produk minimum.

Uji Kompetensi 10

Kerjakan di buku tugas

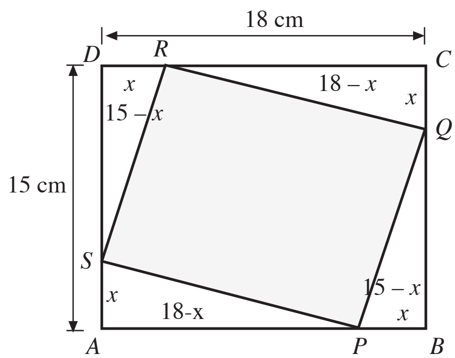
1. Diketahui jumlah bilangan x dan y adalah 16. Hasil kalinya adalah p.
   a. Tulislah persamaan yang menyatakan hubungan x dan y.
   b. Nyatakan p dalam x.
   c. Tentukan kedua bilangan tersebut agar mempunyai hasil kali terbesar.
2. Selembar karton berbentuk persegi, dengan panjang sisi 24 cm. Pada keempat titik sudutnya dibuat potongan berbentuk persegi dengan ukuran sama. Sisa potongan dilipat ke atas sehingga diperoleh sebuah bentuk kotak terbuka. Tentukan volume kotak terbesar yang dapat dibuat.

3. Selembar seng lebarnya 16 meter. Di sepanjang tepinya dilipat ke atas untuk dijadikan sebuah talang dengan sisi-sisi samping tegak ke atas. Berapa meterkah tepi tersebut harus dilipat agar kapasitas talang maksimum?
4. Luas suatu kertas sama dengan 4 cm^2. Bidang gambar pada kertas itu dibatasi dengan batas atas dan batas bawah masing-masing selebar 15 cm, sedangkan batas kiri dan batas kanan masing-masing selebar 10 cm. Perhatikan gambar di samping.
   a. Jika panjang kertas sama dengan x cm dan L adalah luas bidang gambar, nyatakan luas L sebagai fungsi dari x.
   b. Tentukan panjang dan lebar kertas itu agar luas bidang gambar maksimum.



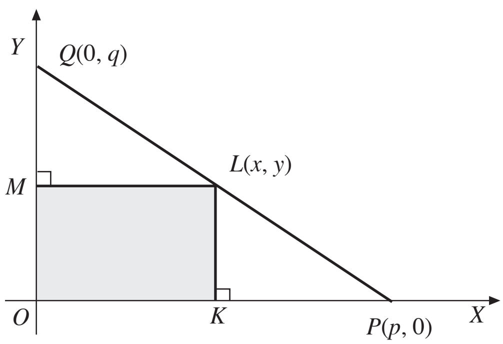
Gambar 5.28

5. Sekeping papan tripleks berbentuk persegi panjang $ABCD$ dengan ukuran panjang 18 cm dan lebar 15 cm. Papan tripleks itu dipotong pada bagian pojok-pojoknya sepanjang garis PQ, QR, RS, dan SP dengan ukuran $PB = QC = RD = SA = x$ cm. Dengan pemotongan itu akan diperoleh bentuk geometri segi empat $PQRS$ (bagian yang diarsir), seperti pada gambar di bawah.
   a. Nyatakan luas segi empat $PQRS$ itu dalam L sebagai fungsi dari x.
   b. Tentukan $\frac{dL}{dx}$.
   c. Tentukan berapa ukuran x agar L maksimum.
   d. Tentukan L maksimum yang dapat dicapai.



Gambar 5.29

6. Segitiga OPQ dilukiskan pada bidang Cartesius seperti pada Gambar 5.30, dengan $OP = p$ cm, dan $OQ = q$ cm. Akan dibuat persegi panjang $OKLM$, dengan K pada OP, L pada PQ, dan M pada OQ. Misalkan titik L mempunyai koordinat (x, y).
   a. Nyatakan luas persegi panjang $OKLM$ sebagai fungsi dari x.
   b. Tentukan luas maksimum persegi panjang $OKLM$ itu.



Gambar 5.30

7. Biaya total yang dikeluarkan oleh sebuah perusahaan ditunjukkan oleh sebuah persamaan $C = 2Q - 24Q + 102$. Pada tingkat produksi berapa unit biaya total ini akan minimum?
8. Soal analog dengan nomor 7. Hitunglah biaya total minimum perusahaan.

Refleksi

Tentu kalian memperoleh banyak hal yang berkaitan dengan turunan. Ternyata, banyak kasus yang dapat diselesaikan dengan konsep turunan. Apakah hal ini memudahkan kalian? Berikan beberapa contoh yang berkaitan dengan nilai ekstrem dalam kehidupan di sekitarmu.

Rangkuman

1. Apabila fungsi f diferensiabel untuk setiap x dalam daerah asal D_f ($D_f \subset R$), turunan fungsi f adalah

   $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, jika limitnya ada.

   Notasi Leibniz dari $f'(x)$ adalah $\dfrac{df(x)}{dx}$ atau $\dfrac{dy}{dx}$.
2. Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik berabsis $x = a$ adalah $m = f'(a)$.
3. Persamaan garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(x_1, y_1)$ adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$, dengan $m = f'(x_1)$.
4. Misalkan u dan v adalah fungsi dalam variabel x, n bilangan rasional, dan c konstanta.
   a. Jika $f(x) = cu(x)$, nilai $f'(x) = cu'(x)$.
   b. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, nilai $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
   c. Jika $f(x) = u(x)\,v(x)$, nilai $f'(x) = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$.
   d. Jika $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, nilai $f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{(v(x))^2}$.
   e. Jika $f(x) = (u(x))^n$, nilai $f'(x) = n(u(x))^{n-1}u'(x)$.
5. Misalkan fungsi f kontinu pada interval I dan diferensiabel (dapat diturunkan) di setiap titik pada interval tersebut.
   a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x pada interval I, fungsi f dikatakan fungsi naik pada interval I.
   b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x pada interval I, fungsi f dikatakan fungsi turun pada interval I.
6. *Titik stasioner* adalah suatu titik pada kurva di mana gradien garis singgung kurva di titik tersebut bernilai nol. Nilai fungsi f di titik tersebut dinamakan nilai stasioner. Jenis-jenis titik stasioner adalah sebagai berikut.
   a. *Titik balik minimum* jika untuk $x < a$, nilai $f'(x) < 0$; untuk $x = a$, nilai $f'(a) = 0$; untuk $x > a$ nilai $f'(x) > 0$.
   b. *Titik balik maksimum* jika untuk $x < a$, nilai $f'(x) > 0$; untuk $x = a$, nilai $f'(a) = 0$; untuk $x > a$, nilai $f'(x) < 0$.
   c. *Titik belok horizontal* jika berlaku salah satu
      - untuk $x < a$, nilai $f'(x) > 0$; untuk $x = a$, nilai $f'(a) = 0$; untuk $x > a$ nilai $f'(x) > 0$,
      - untuk $x < a$, nilai $f'(x) < 0$; untuk $x = a$; nilai $f'(a) = 0$; untuk $x > a$ nilai $f'(x) < 0$.

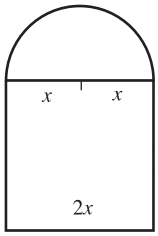
7. Nilai maksimum atau minimum suatu fungsi dalam interval tertutup dapat diperoleh dari dua kemungkinan.
   a. Nilai-nilai stasioner fungsi (nilai balik maksimum atau nilai balik minimum).
   b. Nilai-nilai fungsi pada ujung interval.
8. Misalkan fungsi f kontinu dalam interval $b < x < c$ yang memuat $x = a$. Turunan pertama dan turunan kedua fungsi f terdefinisi pada interval tersebut.
   a. Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) < 0$, titik $(a, f(a))$ adalah *titik balik maksimum*.
   b. Jika $f'(a) = 0$ dan $f''(a) > 0$, titik $(a, f(a))$ adalah *titik balik minimum*.
   c. Jika $f''(\text{a}) = 0$ dan $f''(x)$ berubah tanda di sekitar a, titik $(a, f(a))$ merupakan *titik belok horizontal*.

Latihan Ulangan Harian V

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Turunan fungsi $f(x) = (5x - 3)(2x^2 + 1)$ adalah ....
   a. $10x^2 - x - 3$
   b. $20x - 1$
   c. $30x^2 - 12x + 5$
   d. $30x - 12$
   e. $5(2x^2 + 1) + 2x(5x - 3)$
2. Turunan fungsi $f(x) = \sqrt{2x^5 - 6x + 1}$ adalah ....
   a. $\dfrac{10x^4 - 6}{\sqrt{2x^5 - 6x + 1}}$
   b. $(10x^4 - 6)\sqrt{2x^5 - 6x + 1}$
   c. $(10x^4 - 6)(2x^5 - 6x + 1)^{\frac{3}{2}}$
   d. $\dfrac{5x^4 - 3}{\sqrt{2x^5 - 6x + 1}}$
   e. $\dfrac{1}{\sqrt{10x^4 - 6}}$
3. Jika $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 1)$ maka turunannya adalah ....
   a. $x - x^2$
   b. $x + x^{-2}$
   c. $2x - x^{-2} + 1$
   d. $2x + x^{-2} + 1$
   e. $2x - x^{-2}$
4 Turunan fungsi $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5}{4x - 7}$ adalah ....
   a. $\dfrac{8x^2 - 28x + 20}{4x - 7}$
   b. $\dfrac{8x^2 - 28x + 20}{(4x - 7)^2}$
   c. $\dfrac{(4x - 7)^2}{4(2x^2 - 5)}$
   d. x
   e. $\dfrac{4x - 5}{4}$
5. Diketahui kurva $f(x) = x^3 - 2x^2 + 4$ dan $P(2, 4)$. Persamaan garis singgung di P pada kurva itu adalah ....
   a. $f(x) = 4x + 4$
   b. $f(x) = 4x - 4$
   c. $f(x) = 18 - x$
   d. $4f(x) = 18 - x$
   e. $4f(x) = x - 18$
6. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 5x - 2$ di titik yang berabsis 1 adalah ....
   a. $y = 7x + 3$
   b. $y = 7x - 3$
   c. $7x + y - 3 = 0$
   d. $3x + 7y - 3 = 0$
   e. $2x + 7y - 3 = 0$

7. Diketahui titik P terletak pada kurva $y = x^2 + x - 7$. Garis singgung pada kurva tersebut melalui titik P dan sejajar dengan garis $6x - 2y - 5 = 0$. Koordinat titik P adalah ....
   a. $(1, -5)$
   b. $(1, 5)$
   c. $(-1, 5)$
   d. $(-1, -5)$
   e. $(5, -1)$
8. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$ turun pada interval ....
   a. $x < 1$ atau $x > 2$
   b. $1 < x < 2$
   c. $x < -1$ atau $x > 2$
   d. $-2 < x < -1$
   e. $x < -1$ atau $1 < x < 2$
9. Nilai stasioner fungsi $f(x) = x^2 - 4x + 9$ adalah ....
   a. 2
   b. 9
   c. 5
   d. –5
   e. –9
10. Titik belok fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 31$ adalah ....
   a. $(3, -4)$
   b. $(-3, -4)$
   c. $(-3, 5)$
   d. $(-4, 3)$
   e. $(-4, -3)$
11. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Fungsi $f(x)$ mempunyai nilai stasioner pada $x = -2$ untuk nilai $a = ...$
   a. –2
   b. 0
   c. $\frac{1}{2}$
   d. $\frac{3}{2}$
   e. 4
12. Fungsi yang ditentukan oleh $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$ turun pada interval ....
   a. $-1 < x < 5$
   b. $-5 \leq x \leq 1$
   c. $-5 < x < 1$
   d. $x < -5$ atau $x > 1$
   e. $x \leq -5$ atau $x \geq 3$
13. Fungsi $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$ mencapai maksimum untuk nilai $x = ...$
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{3}{2}$
   c. 2
   d. $\frac{5}{2}$
   e. 3
14. Nilai maksimum fungsi $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ dalam interval $-3 \leq x \leq 2$ adalah ....
   a. 25
   b. 27
   c. 29
   d. 31
   e. 33
15. Pada daerah asal $0 \leq x \leq 2$, kurva fungsi $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ ....
   a. selalu turun
   b. selalu naik
   c. naik kemudian turun
   d. turun kemudian naik
   e. turun dan naik secara berulang
16. Jumlah dua buah bilangan sama dengan 150. Jika perkalian salah satu bilangan dengan kuadrat bilangan lainnya maksimum maka bilangan-bilangan itu adalah ....
   a. 25 dan 125
   b. 50 dan 100
   c. 75 dan 75
   d. 0 dan 150
   e. 110 dan 40

17. 

Sebuah pintu berbentuk seperti gambar di samping. Keliling pintu sama dengan K. Agar luas pintu maksimum, nilai x adalah ....

a. $\dfrac{K}{\pi}$
d. $\dfrac{K}{4} + \pi$
b. $K - \dfrac{\pi}{4}$
e. $\dfrac{K}{4\pi}$
c. $\dfrac{K}{4 + \pi}$

18. Untuk memproduksi x unit barang per hari, diperlukan biaya $x^3 - 2.000x^2 - 4.000.000x$ rupiah. Biaya produksi akan minimum jika setiap hari diproduksi sebanyak ... unit.
a. 1.000
d. 3.000
b. 1.500
e. 4.000
c. 2.000

19. Jika suatu proyek akan diselesaikan dalam x hari, maka biaya proyek per hari menjadi $(2x + \dfrac{1.000}{x} - 40)$ ribu rupiah. Biaya produksi minimum adalah ....
a. 950 ribu rupiah
b. 900 ribu rupiah
c. 880 ribu rupiah
d. 800 ribu rupiah
e. 550 ribu rupiah

20. Reaksi terhadap obat serangga t jam setelah disemprotkan pada tanaman dapat dinyatakan sebagai bilangan tak negatif yang sama dengan $15t^2 - t^3$. Reaksi maksimum dicapai pada saat ....
a. 12 jam sebelum reaksi habis
b. 10 jam sebelum reaksi habis
c. 8 jam sebelum reaksi habis
d. 6 jam sebelum reaksi habis
e. 5 jam sebelum reaksi habis

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan turunan fungsi-fungsi berikut.
   a. $f(x) = (5x^2 - 7x + 1)(2x^2 + 1)$
   b. $f(x) = \dfrac{(6x^2 - 1)}{(3x^2 + 7x + 1)}$
2. Tentukan persamaan-persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x) = x^3 + 8$ yang tegak lurus terhadap garis $2x + 12y - 2 = 0$.
3. Suatu kurva ditentukan oleh persamaan $y = \left(m + \dfrac{n}{x}\right)\sqrt{x}$. Kurva itu melalui titik $P(1, 5)$ dan gradien garis singgung kurva di titik P sama dengan $\dfrac{1}{2}$. Tentukan nilai m dan n.
4. Suatu fungsi ditentukan dengan persamaan $f(x) = 8 + 4x^2 - 2x^4$.
   a. Carilah $f'(x)$.
   b. Tentukan nilai-nilai stasionernya serta jenis-jenis nilai stasioner itu.
5. Tentukan jari-jari alas dan tinggi tabung yang dapat dibuat di dalam sebuah bola berjari-jari 10 cm agar volume tabung mencapai maksimum.
6. Jika fungsi biaya total $T = Q^3 - 4Q^2 + 20Q$, tentukan fungsi biaya marjinalnya. Tentukan jumlah unit Q agar biaya marjinalnya minimum.

Latihan Ulangan Umum Semester 2

I. Pilihlah jawaban yang tepat.

1. Diketahui $f(x) = 2x + 1$ dan $g(x) = x^2 - 2x$. Rumus fungsi $(g \circ f)(x) = ...$
   a. $x^2 - 4$
   b. $4x^2 - 1$
   c. $4x^2 - 2$
   d. $2x^2 - 4$
   e. $2x^2 + 1$

2. Diketahui fungsi $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2$, dan $h(x) = x^2$. Fungsi $(f \circ g \circ h)(x) = ...$
   a. $3x^2$
   b. x^6
   c. $3x^6$
   d. x^8
   e. $3x^8$

3. Jika fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = 2x + 1$ dan $(g \circ f)(x) = 12x^2 - 16x + 10$, dengan f dan g pada himpunan bilangan real, rumus fungsi $g(x) = ...$
   a. $12x^2 - 14x + 11$
   b. $12x^2 + 14x - 11$
   c. $3x^2 + 2x + 5$
   d. $3x^2 - 14x + 21$
   e. $3x^2 - 2x - 5$

4. Fungsi f dirumuskan dengan $f(x) = 2x^2 + 5x$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Nilai $(f \circ g)(2) = ...$
   a. 4
   b. 3
   c. 2
   d. $\dfrac{1}{2}$
   e. $\dfrac{1}{3}$

5. Fungsi invers dari $f(x) = x^3 - 2$ adalah $f^{-1}(x) = ...$
   a. $\sqrt[3]{x + 2}$
   b. $\sqrt[3]{3x + 2}$
   c. $\sqrt{x + 2}$
   d. $2\sqrt{x^3 + 2}$
   e. $x^3 + 2$

6. Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x}{1 - x}$. Rumus fungsi $f^{-1}(x) = ...$
   a. $\dfrac{x}{x + 1}$
   b. $\dfrac{x + 1}{x}$
   c. $\dfrac{x}{x - 1}$
   d. $\dfrac{x - 1}{x}$
   e. $1 - \dfrac{2}{x + 1}$

7. Jika $f(x) = \dfrac{9}{x + 3}$ dan $g(x) = x^2$, dengan $x \neq -3$, rumus $(g \circ f)^{-1}(x) = ...$
   a. $\sqrt{\dfrac{9 - 3x}{x}}$
   b. $\sqrt{\dfrac{9 - 3x}{3x}}$
   c. $\dfrac{9 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$
   d. $\dfrac{9 - 3\sqrt{x}}{\sqrt{3x}}$
   e. $\dfrac{9 + 3\sqrt{x}}{x}$

8. Fungsi invers dari $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 4}$ adalah ....
   a. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 1}{2 - 3x}$
   b. $f^{-1}(x) = \dfrac{x + 4}{2 - 3x}$
   c. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x - 3}{x - 4}$
   d. $f^{-1}(x) = \dfrac{4x + 1}{3x - 2}$
   e. $f^{-1}(x) = \dfrac{3x - 2}{4x + 1}$

9. Jika $g(x) = x^2 - 3x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 - 6x - 1$ maka $f(x) = ...$
   a. $2x + 3$
   b. $2x - 1$
   c. $2x + 1$
   d. $2x - 2$
   e. $2x - 3$

10. Jika $f(x) = 2x + 5$ dan $g(x) = 3x + 4$ maka $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = ...$
    a. $\frac{1}{6}(x-17)$
    b. $\frac{1}{6}(x+17)$
    c. $\frac{1}{6}(x-19)$
    d. $\frac{1}{6}(x+19)$
    e. $\frac{1}{3}(x-19)$

11. $\lim\limits_{x \to 8} \frac{x-2}{\sqrt[3]{x}-2} = ...$
    a. 0
    b. 1
    c. 2
    d. 8
    e. ∞

12. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x^2+x-12} = ...$
    a. 0
    b. $\frac{4}{7}$
    c. $\frac{7}{27}$
    d. $\frac{27}{7}$
    e. ∞

13. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(3x+2)^4}{(4x-3)^4} = ...$
    a. $\frac{2}{3}$
    b. $-\frac{2}{3}$
    c. $-\frac{27}{64}$
    d. $\frac{16}{81}$
    e. $\frac{81}{256}$

14. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = ...$
    a. 0
    b. 4
    c. 5
    d. 8
    e. 12

15. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-64}{x^2+8x-48} = ...$
    a. 0
    b. 1
    c. 2
    d. 3
    e. 6

16. $\lim\limits_{x \to 8} \frac{192-3x^2}{10-\sqrt{x^2+36}} = ...$
    a. 10
    b. 20
    c. 30
    d. 40
    e. 50

17. Diketahui $\lim\limits_{x \to 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3}{4}$. Nilai $a + b = ...$
    a. 3
    b. 2
    c. 1
    d. –1
    e. –2

18. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3-\sqrt{x+7}}{x^2+x-6} = ...$
    a. $\frac{1}{30}$
    b. $\frac{1}{11}$
    c. 0
    d. $-\frac{1}{11}$
    e. $-\frac{1}{30}$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^n-1}{x-1} = ...$
    a. $n^2 - 1$
    b. $n^2 - n$
    c. ∞
    d. 1
    e. n

20. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{9-3x}}{x-2} = ...$
    a. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$
    b. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
    c. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
    d. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
    e. $-\frac{4}{3}\sqrt{3}$

21. Diketahui $f(x) = \frac{4x-3}{-x-1}$. Rumus $f'(x) = ...$
    a. $\frac{1}{(-x-1)^2}$
    b. $\frac{-7}{(-x-1)^2}$
    c. $\frac{7}{(-x-1)^2}$
    d. $\frac{1}{(4x-3)^2}$
    e. $\frac{7}{(4x-3)^2}$

22. Turunan fungsi $f(x) = 5x^5 - 6x^4 + 3x^2 - 5$ adalah ....
a. $5x^4 - 6x^3 + 3x$
b. $20x^4 - 24x^3 + 6x - 5$
c. $20x^4 - 24x^3 + 6x$
d. $25x^4 - 24x^3 + 6x$
e. $25x^4 - 18x^3 + 9x$

23. Turunan fungsi $f(x) = (x + 5)(3x^2 + 1)$ adalah ....
a. $9x^2 + 3x + 1$
b. $3x^2 + 9x + 10$
c. $9x^2 + 30x + 1$
d. $x^2 + 30x + 1$
e. $9x^2 + x + 30$

24. Turunan fungsi $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{2x - 3}$ adalah ....
a. $\dfrac{6x^2 - 18x - 10}{2x - 3}$
b. $\dfrac{6x^2 - 18x - 10}{(2x - 3)^2}$
c. $\dfrac{(2x - 3)^2}{6x^2 - 18x - 10}$
d. $\dfrac{18x^2 - 18x + 10}{(2x - 3)^2}$
e. $\dfrac{18x^2 + 18x - 10}{(2x - 3)^2}$

25. Diketahui titik P terletak pada kurva $y = x^2 + 3x - 10$. Garis singgung pada kurva tersebut melalui titik P dan tegak lurus dengan garis $x + 3y - 1 = 0$. Koordinat titik P adalah ....
a. $(0, -10)$
b. $(0, 10)$
c. $(10, 0)$
d. $(-10, 0)$
e. $(-1, 10)$

26. Fungsi $f(x) = x^2 - 2x$ naik pada interval ....
a. $0 < x < 1$
b. $x < 0$
c. $x > 1$
d. $-1 < x < 1$
e. $-1 < x < 0$

27. Fungsi $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12$ turun pada interval ....
a. $x < 0$ atau $x > 3$
b. $0 < x < 3$
c. $x < -1$ atau $x > 2$
d. $-3 < x < 0$
e. $x < 0$ atau $1 < x < 3$

28. Nilai stasioner fungsi $f(x) = x^2 - 6x + 15$ adalah ....
a. 6
b. 5
c. 2
d. –5
e. –6

29. Titik belok fungsi $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 23$ adalah ....
a. $(3, -4)$
b. $(3, 7)$
c. $(3, 4)$
d. $(-3, 4)$
e. $(-3, -4)$

30. Fungsi $f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$ mencapai maksimum untuk nilai $x =$ ....
a. $\dfrac{1}{2}$
b. $\dfrac{3}{2}$
c. 2
d. $\dfrac{5}{2}$
e. 3

31. Garis singgung pada kurva $y = x^2 + 5$ sejajar dengan garis $12x - y = 17$ menyinggung kurva di titik ....
a. $(6, 41)$
b. $(5, 30)$
c. $(7, 40)$
d. $(3, 45)$
e. $(2, 26)$

32. Jumlah dua buah bilangan sama dengan 450. Jika perkalian salah satu bilangan dengan kuadrat bilangan lainnya maksimum, bilangan-bilangan itu adalah ....
a. 100 dan 350
b. 150 dan 300
c. 200 dan 250
d. 0 dan 450
e. 50 dan 400

33. Biaya total untuk memproduksi x unit mainan per hari adalah $0{,}25x^2 + 35x + 25$ (dalam ribuan rupiah) dan harga jual per unit $50 - 0{,}5x$ (dalam ribuan rupiah). Produksi tiap hari agar diperoleh keuntungan maksimum seharusnya ....
a. 6 unit
b. 8 unit
c. 10 unit
d. 12 unit
e. 15 unit

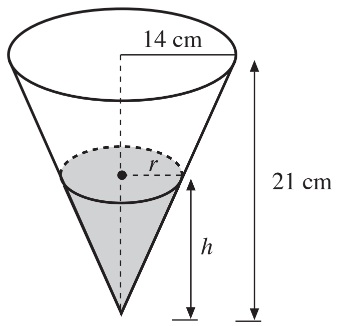
34. Untuk memproduksi x unit barang per hari, diperlukan biaya $x^3 - 4.000x^2 - 3.000.000x$ rupiah. Biaya produksi akan minimum jika setiap hari diproduksi sebanyak ... unit.
    a. 1.000
    b. 1.500
    c. 2.000
    d. 3.000
    e. 4.000

35. Luas suatu segi empat adalah 40 cm^2. Agar keliling segi empat tersebut maksimum, panjang sisi dan lebar sisinya adalah ....
    a. $2\sqrt{5}$ cm dan $2\sqrt{5}$ cm
    b. 4 cm dan 10 cm
    c. 8 cm dan 5 cm
    d. 20 cm dan 2 cm
    e. $\sqrt{5}$ cm dan $8\sqrt{5}$ cm

II. Jawablah pertanyaan-pertanyaan berikut dengan benar.

1. Tentukan rumus fungsi $f(x)$ jika diketahui
    a. $(g \circ f)(x) = 8x^2 - 11$ dan $g(x) = 4x + 1$;
    b. $(g \circ f)(x) = -4x^2 - 12x - 8$ dan $g(x) = -x^2 + 1$.
2. Tentukan nilai limit berikut.
    a. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$
    b. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5^x - 5^{-x}}{5^x + 5^{-x}}$
    c. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4!(x+2)!}{3x(x+1)!}$
3. Diketahui $f(x) = 5 + 3x + 4x^2 - x^3$. Tentukan interval x agar fungsi tersebut
    a. naik;
    b. turun.
4. Jumlah dua bilangan adalah 64.

    Misal bilangan pertama x dan bilangan kedua y. Jika diharapkan hasil dari xy^2 maksimum, berapakah nilai x dan y?
5. Sebuah kerucut lingkaran tegak dengan jari-jari bidang 14 cm dan tingginya 21 cm. Kerucut itu dibalik, kemudian dituangi air sehingga jari-jari permukaan air sama dengan r cm dan tingginya h cm. Perhatikan gambar berikut.



    a. Tentukan volume air V sebagai fungsi dari h.
    b. Tentukan laju perubahan volume air terhadap ketinggian, ketika kerucut itu dituangi air pada ketinggian 14 cm.

Daftar Pustaka

____. 1997. *Geometri II*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Anton, Howard dan kolman, Bernard. 1982. *Mathematics with Application for the Management, Life, and social Sciences, 2nd ed*. New York: Academic Press.

Bartle, Robert G. 1994. *Introduction to Real Analysis*. New York: John Willey and Sons.

Berry, John, etc. 2003. *A-Z Mathematics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Budhi, Wono Setya. 2003. *Model Buku Pelajaran Matematika Sekolah Menengah Atas*. Jakarta: Pusat Perbukuan Depdiknas.

Earl, B. 2002. *IGCSE Chemistry*. London: John Murray, Ltd.

Howard, R.D. 1993. *Mathematics in Actions*. London: Nelson Blackie, Ltd.

Isabelle van Welleghem. 2007. *Ensiklopedia Pengetahuan*. Solo: Tiga Serangkai.

Junaedi, Dedi, dkk. 1998. *Intisari Matematika Dasar SMU*. Bandung: Pustaka Setia.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Kerami, Djati dkk. 2002. *Kamus Matematika*. Jakarta: Balai Pustaka.

Koesmartono dkk. 1983. *Matematika Pendahuluan*. Bandung: Penerbit ITB.

Kreyszig, E. 1988. *Advanced Enginering Mathematics*. New York: John Wiley & Son.

Murray, Spiegel. 1972. *Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 1981. *Vector Analysis*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Murray, Spiegel. 2000. *Probability and Statistics*. New York: McGraw-Hill, Inc.

Negoro, S.T. dkk. 2007. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Neswan, Oki dan Setya Budi, W. 2003. *Matematika 1–3 untuk SMA*. Bandung: Penerbit ITB.

Pimentall, Ric and Wall, T. 2002. *IGCSE Mathematics*. London: John Murray.

Purcell, Edwin J. 1987. *Calculus with Analitic Geometry*. London: Prentice-Hall International, Inc.

Sembiring, Suwah. 2002. *Olimpiade Matematika untuk SMU*. Bandung: Yrama Widya.

Siswanto. 1997. *Geometri I*. Surakarta: Universitas Sebelas Maret Press.

Steffenson dan Johnson. 1992. *Essential Mathematics for Colledge Students*. New York: Harper Collins Publishers.

Sukirman. 1996. *Geometri Analitik Bidang dan Ruang*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan, Direktorat Jenderal Pendidikan Dasar dan Menengah, UT.

Sullivan, M. 1999. *Precalculus*. Upper Saddle River: Prentice-Hall.

Susianto, Bambang. 2004. *Olimpiade dengan Proses Berpikir*. Jakarta: Grasindo.

Glosarium

Data adalah kumpulan datum, 4
Datum adalah keterangan yang diperoleh dari pengamatan, 4
Desil adalah sembilan nilai yang membagi data menjadi sepuluh bagian sama banyak, 16, 60
Diferensiabel adalah fungsi yang dapat diturunkan, 220
Diferensial adalah turunan suatu fungsi, 220
Domain adalah daerah asal fungsi, 150, 156
Frekuensi harapan adalah kemungkinan banyaknya muncul suatu kejadian dari beberapa kali percobaan, 116
Fungsi bijektif adalah fungsi korespondensi satu-satu, 154
Fungsi identitas adalah fungsi yang memetakan pada dirinya sendiri, 149
Fungsi invers adalah fungsi balikan, 153
Fungsi naik adalah fungsi yang jika nilai variabelnya kamin besar maka nilainya juga makin besar, 219
Fungsi turun adalah fungsi yang jika nilai variabelnya makin besar maka nilainya makin kecil, 219
Gabungan kejadian *A* dan *B* adalah himpunan semua titik sampel yang terdapat pada kejadian *A* atau kejadian *B* atau kedua-duanya, 118
Gradien adalah kemiringan suatu kurva, 217
Irisan kejadian *A* dan *B* adalah himpunan semua titik sampel yang terdapat pada kejadian *A* dan kejadian *B*, 118
Jangkauan adalah selisih antara statistik maksimum dan minimum, 19
Kejadian adalah himpunan bagian dari ruang sampel, 108
Kejadian bersyarat adalah kejadian munculnya suatu kejadian dengan syarat kejadian lain-lain telah terjadi terlebih dahulu, 125
Kejadian saling bebas stokastik adalah kejadian yang terjadi atau tidaknya tidak dipengaruhi oleh terjadi atau tidaknya kejadian lain, 121
Kejadian saling lepas adalah dua atau lebih kejadian yang tidak terdapat irisan di antara kejadian-kejadian tersebut, 120
Kodomain adalah daerah kawan dari suatu fungsi, 150, 156
Kombinasi adalah suatu susunan unsur-unsur dari sekumpulan unsur tanpa memerhatikan urutannya, 100
Kuartil adalah tiga nilai yang membagi data menjadi empat bagian sama banyak, 13, 18
Limit adalah nilai pendekatan (bukan nilai tepat), 174
Limit tak tentu adalah suatu bentuk limit yang jika diselesaikan dengan cara substitusi akan memiliki bentuk khusus (bentuk tak tentu), 190
Mean adalah jumlah semua datum dibagi dengan banyaknya datum, 8
Median adalah nilai yang membagi suatu data menjadi dua bagian sama banyak, 9
Modus adalah nilai datum yang paling sering muncul, 11, 55
Nilai ekstrem adalah nilai maksimum atau minimum dari suatu fungsi, 233
Nilai stasioner adalah nilai suatu fungsi di titik tertentu yang mengakibatkan fungsi itu tidak naik dan tidak turun (stasioner), 221
Peluang adalah suatu nilai yang menyatakan kemungkinan terjadinya suatu kejadian dan diperoleh dari banyaknya anggota suatu kejadian dibagi dengan banyaknya anggota dari ruang sampel, 83, 107
Percobaan adalah suatu tindakan yang dapat diulang dengan keadaan yang sama untuk memperoleh hasil tertentu, 108
Permutasi adalah suatu susunan unsur-unsur dari sekumpulan unsur dengan memerhatikan urutannya, 89
Peta adalah bayangan, 155

Populasi adalah keseluruhan objek yang akan diteliti, 108

Range adalah daerah hasil fungsi, 150

Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan, sedangkan anggota-anggotanya disebut titik sampel, 108

Sampel adalah sebagian atau keseluruhan yang dianggap mewakili populasi, 108

Simpangan rata-rata adalah ukuran penyebaran data yang mencerminkan penyebaran data terhadap nilai meannya, 64

Standar deviasi adalah salah satu ukuran penyebaran yang nilainya merupakan akar kuadrat varians, 67

Statistik adalah kumpulan informasi yang berupa angka-angka yang disusun, ditabulasi, dan dikelompok-kelompokkan sehingga dapat memberikan informasi mengenai suatu masalah, 4

Statistik lima serangkai adalah salah satu ukuran pemusatan data yang terdiri dari statistik minimum, statistik maksimum, kuartil bawah, median, dan kuartil atas, 18

Statistika adalah ilmu yang mempelajari tentang statistik, 4

Varians adalah salah satu ukuran penyebaran yang lebih baik dari simpangan rata-rata, 66

Indeks Subjek

Kunci Soal-Soal Terpilih

Bab I Statistika

Uji Kompetensi 5

1. c. 10% e. 35 orang
   d. 15 orang
2. a. 8 kelas
   d. panjang kelas 50
3. x_{min} = 11; Q_1 = 17; Q_2 = 20,5; Q_3 = 25; x_{maks} = 30
5. a. 13–16 tahun e. 5–8 tahun
   b. 1–4 tahun
6. a. 30 orang c. 18 orang
   b. 60 orang d. 87 orang

Uji Kompetensi 8

1. $S_R = 0{,}8$; $S^2 = 1{,}2$; $S = 1{,}095$
2. $S_R = 2{,}36$; $S^2 = 7{,}35$; $S = 2{,}71$
3. $S_R = 2{,}15$; $S^2 = 7{,}23$; $S = 2{,}69$
4. $S_R = 20$; $S^2 = 537{,}5$; $S = 23{,}18$

Bab II Peluang

Uji Kompetensi 3

2. a. 24 b. 60
4. a. $n = 3$ b. $n = 3$
5. 210
6. 1.320

Uji Kompetensi 5

1. 5.040
2. 120
3. 3.628.800
4. 24
5. 40.320

Uji Kompetensi 7

3. a. $\frac{1}{6}$ c. 0
   b. $\frac{1}{36}$
4. a. $\frac{3}{11}$ b. $\frac{1}{22}$
   c. $\frac{3}{44}$ d. $\frac{3}{11}$

Bab III Fungsi Komposisi dan Fungsi Invers

Uji Kompetensi 3

2. a. $f^{-1}(x) = x - 1$; $g^{-1}(x) = x$; $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$
   b. $f^{-1}(2) = 2$; $g^{-1}(5) = 5$; $h^{-1}(4) = 2$
4. a. $f^{-1}(7) = 2$
   b. $g^{-1}(9) = 3$
   c. $(f^{-1} \circ g^{-1})(x) = \sqrt[3]{\frac{x+7}{4}}$
   d. $(f^{-1} \circ g^{-1})(3) = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$

Bab IV Limit Fungsi

Uji Kompetensi 4

1. a. 3
   b. 0
   c. 1
2. a. 8
   b. $\frac{1}{2}$

Bab V Turunan

Uji Kompetensi 10

1. a. $x + y = 16$; $p = xy$
   b. $p = x(16 - x)$
   c. 8 dan 8
2. a. $t = \frac{3}{2}$ detik
   b. 36 m
3. 1.024 cm^3

Matematika Inovatif

Konsep dan Aplikasinya

Dewasa ini, ilmu pengetahuan dan teknologi berkembang sangat cepat. Hal itu merupakan rangkaian panjang yang berpangkal dari perkembangan ilmu-ilmu dasar (*basic sciences*), di antaranya matematika. Oleh karena itu, kita perlu menguasai matematika agar dapat memahami perkembangan dunia yang terjadi di sekitarnya dan tetap *survive* di tengah pesatnya kemajuan teknologi dan peradaban dunia.

Buku Matematika Inovatif Konsep dan Aplikasinya ini disusun dengan penyajian yang menekankan pada penalaran dan daya kreatifitas sehingga mampu melahirkan generasi yang kompeten dalam hal-hal berikut.

1. Memahami dan menguasai konsep, operasi, dan relasi matematis.
2. Lancar dalam berprosedur.
3. Mampu merumuskan, menyajikan, dan menyelesaikan problem matematis.
4. Berpikir kritis, logis, melakukan refleksi, serta memberikan alasan yang kuat.
5. Berkarakter produktif.

Sekilas Info Buku

1. Bahasa yang digunakan komunikatif sehingga mudah dipahami.
2. Penyampaian materi cukup representatif, contoh-contoh dan soal-soal uji kompetensi memiliki gradasi naik.
3. Dilengkapi dengan soal-soal latihan ulangan harian dan semester.
4. Pemilihan jenis dan ukuran huruf cukup cermat didukung dengan tata letak dan ilustrasi yang menarik sehingga tidak membosankan untuk dibaca.

Dengan beberapa kelebihan di atas, diharapkan buku ini mampu merangsang minat dan prestasi siswa dalam mempelajari matematika.

ISBN 978-979-068-864-3 (no. jilid lengkap)
ISBN 978-979-068-866-7

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks palajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 81 Tahun 2008 Tanggal 11 Desember 2008 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp12.976,--