Sutrima

Budi Usodo

Wahana MATEMATIKA

UNTUK SMA/MAKELAS XI

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

2

PUSAT PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

Sutrima Budi Usodo Wahana MATEMATIKA Program Ilmu Pengetahuan Sosial UNTUK SMA KELAS XI

Sutrima
Budi Usodo

Wahana MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah Kelas XI

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pemdidikan Nasional

Wahana

MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Kelas XI

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Penulis : Sutrima
Budi Usodo

Editor : Giyarti

Setting/Lay-out : Endang Budi Hardiani

Desain Cover : Romiyanto

510.07
SUT SUTRIMA
m Matematika 2 : untuk SMA / MA Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Sosial/ penulis, Sutrima, Budi Usodo ; editor, Giyarti . — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009.x
ix, 288 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 279-280
Indeks
ISBN 978-979-068-854-4 (No. Jil. Lengkap)
ISBN 978-979-068-923-7

1. Matematika-Studi dan Pengajaran
I. Judul II. Budi Usodo III. Giyarti

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh : ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 9 Tahun 2009 tanggal 12 Februari 2009.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/ penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Buku pelajaran Matematika Jilid 2 ini disusun berdasarkan kurikulum yang berlaku. Buku ini digunakan sebagai buku pegangan bagi Anda yang sedang duduk di bangku Sekolah Menengah Atas (SMA) dan Madrasah Aliyah (MA) kelas XI.

Pengkajian setiap materi bahasan didasarkan kepada satu atau lebih indikator hasil belajar dalam kompetensi dasar. Meskipun, urutan pengkajian materi bahasan tidak mengikuti urutan kompetensi dasar, namun dengan memperhatikan keterkaitan antara materi bahasan yang satu dengan materi bahasan berikutnya. Dalam buku ini, Anda akan mempelajari tentang: *statistika; peluang; komposisi fungsi dan invers fungsi; limit fungsi; turunan; nilai ekstrim fungsi dan teknik membuat grafik fungsi.*

Buku ini disusun dengan harapan dapat mengembangkan keragaman potensi, minat, kecerdasan intelektual, emosional, spritual, dan kinestetik Anda secara optimal sesuai dengan tingkat perkembangan Anda. Kedua, buku ini disusun sejalan dengan perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi. Ketiga, buku ini memuat kecakapan hidup untuk membekali Anda memasuki dunia kerja sesuai dengan tingkat perkembangan Anda dan kebutuhan dunia kerja, khususnya bagi Anda yang tidak melanjutkan ke jenjang yang lebih tinggi.

Buku yang baik adalah buku yang memenuhi kaidah-kaidah tipografi, tata letak, dan pewarnaan yang memenuhi standar *"Human Computer Interactive"*. Buku ini disusun dengan tipografi, tata-letak, dan pewarnaan yang mengacu kepada standar tersebut. Dengan desain semacam ini, buku matematika ini diharapkan dapat merangsang perkembangan potensi otak Anda, yang pada akhirnya dapat membangkitkan rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika, serta dapat membangkitkan sikap gigih, ulet, dan percaya diri dalam memecahkan masalah.

Meskipun telah berusaha untuk menyajikan buku terbaik, namun penulis menyadari sepenuhnya bahwa buku ini masih jauh dari sempurna. Dengan demikian, kritik dan saran yang bersifat konstruktif dari semua pembaca sangat penulis harapkan. Kritik dan saran sekecil apapun yang bersifat konstruktif akan menyempurnakan buku ini pada edisi-edisi berikutnya.

Akhirnya, penulis berharap buku matematika ini mampu memberikan manfaat dan nilai tambah kepada setiap penggunanya.

Surakarta, April 2008

Penulis

Petunjuk Penggunaan Buku

Tujuan Pembelajaran
Tujuan pembelajaran mencakup kemampuan dasar yang diharapkan Anda miliki setelah membaca materi pada bab yang bersangkutan.

Pengantar
Pada bagian awal bab dimulai dengan pengenalan masalah nyata (*contextual proplem*) dari materi yang akan dipelajari. Hal ini dimaksudkan untuk memotivasi Anda tentang pentingnya materi yang akan dipelajari.

Materi Bahasan
Meskipun matematika sendiri bersifat deduktif, namun pembelajarannya dapat menggunakan metode induktif. Oleh karena itu agar mudah Anda ikuti, materi bahasan dideskripsikan secara induktif, diawali dari kajian hal yang konkrit ke abstrak, dari sederhana ke kompleks, dan dari mudah ke sulit. Dengan metode ini Anda diharapkan dapat menemukan sendiri konsep, sifat, aturan, atau rumus dalam matematika. Meskipun masih dimungkinkan dengan bimbingan guru.

Contoh dan Pemecahan Masalah
Untuk membantu Anda memahami konsep, sifat, aturan, dan rumus yang telah dikaji dalam materi bahasan, diperlukan contoh soal pemecahan masalah. Contoh soal pemecahan masalah dalam buku ini dibedakan menjadi dua yaitu: mencari nilai suatu besaran yang tidak diketahui yang memenuhi syarat yang ditetapkan dalam soal, dan membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan.

Soal Latihan
Sebagai evaluasi proses belajar Anda dalam menguasai materi bahasan, pada setiap akhir sub-bab diberikan latihan soal yang sajikan secara bergradasi. Latihan ini juga untuk melatih kecermatan, keakuratan dan kecepatan siswa dalam memecahkan masalah.

Soal Analisis
Soal ini bersifat masalah kontekstual yang berkaitan dengan permasalahan di dunia nyata. Hal ini bertujuan membantu Anda berpikir kritis, yang ditandai dengan keterampilan siswa memahami masalah, memilih pendekatan atau strategi pemecahan, menyelesaikan model matematika yang diperoleh, serta bagaimana menafsirkan solusi terhadap masalah semula.

Tugas Mandiri
Sesuai namanya tugas ini untuk mengevaluasi sejauh mana Anda secara mandiri dapat memecahkan masalah. Soal-soal untuk Tugas Mandiri bersifat terbuka, sehingga Anda dapat mencari jawaban atau strategi penyelesaian yang bervariasi. Tugas ini mendorong Anda untuk memperoleh informasi lebih lanjut dari berbagai sumber lain seperti internet, buku atau artikel.

Tugas Kelompok
Tugas ini diberikan dengan tujuan untuk melatih Anda berdiskusi, berkerjasama dan berkomunikasi dengan teman Anda. Tugas dapat berbentuk gagasan tertulis, dengan menggunakan narasi, tabel, dan diagram serta lisan.

Math Info
Merupakan informasi tentang matematika untuk meningkatkan cakrawala pengetahuan yang relevan dengan materi bahasan yang bersangkutan.

Rangkuman
Merupakan kumpulan konsep kunci bab yang dinyatakan dengan kalimat ringkas dan bermakna, serta memudahkan Anda untuk memahami isi bab.

Uji Kompetensi
Untuk setiap materi bahasan diakhiri dengan uji kompetensi. Uji kompetensi terdiri atas soal-soal pemecahan masalah, untuk mengevaluasi sejauh mana kompetansi siswa terhadap pemahaman konsep, penggunaan sifat, aturan dan rumus matematika dalam pemecahan masalah yang berakitan dengan materi bahasan. Selain itu soal-soal Latihan Uji Kompetensi diharapkan dapat melatih ketrampilan Anda untuk meningkatkan kemampuan dalam pemecahan masalah.

Aktivitas Proyek
Merupakan kegiatan untuk mengaktifkan serta meningkatkan kreativitas dan kemampuan motorik Anda. Sajian materi memuat tugas observasi, investigasi, eksplorasi, inkuiri atau ***hands-on activity***.

Teka-teki Matematika
Teka-teki matematika bersifat *recreational mathematics* dan bertujuan menimbulkan minat Anda untuk mengkaji lebih jauh tentang matematika.

Latihan Ulangan Umum Semester
Latihan Ulangan Umum Semester terdiri atas soal-soal pemesahan masalah yang meliputi seluruh materi bahasan dalam kurun waktu satu semester atau satu tahun. Terdapat dua jenis soal yang disajikan dalam latihan ulangan umum semester ini, yaitu soal berbentuk pilihan ganda, dan soal berbentuk uraian terstruktur. Soal-soal ini dipersiapkan untuk digunakan sebagai pelatihan Anda dalam menghadapi ulangan umum semester maupun ulangan akhir tahun.

Glosarium
Merupakan kumpulan istilah penting beserta penjelasannya yang dilengkapi dengan nomor halaman kemunculan istilah dan disajikan secara alfabetis.

Indeks
Merupakan kumpulan kata penting, antara lain objek matematika, nama tokoh atau pengarang, yang diikuti dengan nomor halaman kemunculan dan disajikan secara alfabetis.

Daftar Simbol dan Notasi

$\mathbb{N}$	:	himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	:	himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	:	himpunan bilangan bulat
$a < b$	:	a lebih kecil dari b atau b lebih besar dari a
$a \leq b$	:	a lebih kecil atau sama dengan b atau b lebih besar atau sama dengan a
$\lvert a \rvert$	:	nilai mutlak atau modulus dari bilangan a
$[\![a]\!]$	:	bilangan bulat terbesar atau sama dengan a
$\log a$	:	logaritma dari a
Δx	:	dibaca "delta x" adalah perubahan nilai dari x
$x \in A$	:	x anggota atau elemen himpunan A
$A \subseteq B$	:	A himpunan bagian dari himpunan B
$A \cup B$	:	gabungan dari himpunan A dan himpunan B
$A \cap B$	:	irisan dari himpunan A dan himpunan B
$A \times B$	:	produk Cartesius dari himpunan A dan himpunan B
$x R y$	:	x berelasi dengan y
$x \not R y$	:	x tidak berelasi dengan y
$f : A \to B$	:	fungsi f dari himpunan A ke himpunan B
D_f	:	daerah asal atau domain dari fungsi f
K_f	:	daerah kawan atau kodomain dari fungsi f
R_f	:	daerah hasil atau range dari fungsi f
$g \circ f$	:	komposisi fungsi dari fungsi f oleh fungsi g
$f(A)$	:	peta atau bayangan himpunan A oleh fungsi f
f^{-1}	:	invers dari fungsi f
x_i	:	urutan data ke-i
x_{min}	:	statistik minimum
x_{maks}	:	statistik maksimum
f_i	:	frekuensi dari data
$\sum_{i=1}^{n} x_i$	:	jumlah dari nilai kelompok data $x_1, x_2, \cdots, x_n$
$\bar{x}$	:	rataan dari kelompok data
Mo	:	modus
Me	:	median
Q_i	:	kuartil ke-i
D_i	:	desil ke-i
P_i	:	persentil ke-i
R	:	rentang atau *range*
H	:	hamparan yang besarnya adalah $Q_3 - Q_1$
Q_d	:	semi kuartil atau simpangan kuartil
RS	:	rataan simpangan
S	:	simpangan baku
S^2	:	ragam atau variansi
P_k^n	:	permutasi k unsur dari n unsur
C_k^n	:	kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda
$P(E)$	:	peluang dari kejadian E
$F_h(E)$	:	frekuensi harapan kejadian E
E^c	:	komplemen kejadian dari E
$P(B \mid A)$	:	peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi lebih dahulu adalah
m_l	:	kemiringan atau gradient dari garis l
$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$	:	nilai fungsi mendekati L ketika x mendekati c
$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$	:	nilai fungsi f mendekati L ketika x positif membesar tanpa batas
$f'(c)$	:	turunan fungsi f di bilangan c
$f^{(n)}$	:	turunan ke-n dari fungsi f
$\dfrac{d^n y}{dx^n}$	:	turunan ke-n dari fungsi y

Daftar Isi

BAB

I

STATISTIKA

Tujuan Pembelajaran

Setelah mengkaji materi dari bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. membaca dan menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram (diagram batang, diagram garis, diagram lingkaran, diagram kotak garis, diagram batang daun, dan *ogive*),
2. membaca dan menyajikan data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram,
3. menafsirkan kecenderungan data dalam bentuk tabel dan diagram,
4. menentukan ukuran pemusatan data (rataan, median, dan modus),
5. menentukan ukuran letak data (kuartil, desil, dan persentil),
6. menentukan ukuran penyebaran data (rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku),
7. memeriksa data yang tidak konsisten dalam kelompoknya,
8. memberikan penafsiran terhadap ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran.

Pengantar

Sumber: *panen_theanthonium.wordpress*

Hasil panen padi (dalam kuintal) dari Desa Simpati diberikan oleh data di bawah. Dinas Pertanian setempat akan memberikan dua paket hibah kepada petani di desa itu, yaitu berupa subsidi pupuk murah untuk petani yang penghasilannya rendah, dan paket kursus teknologi pertanian kepada petani yang penghasilannya tinggi.

Tabel 1.1

Hasil	Banyaknya
2,1 – 3,0	15
3,1 – 4,0	20
4,1 – 5,0	30
5,1 – 6,0	25
6,1 – 7,0	10

Karena terbatasnya alokasi dana, Dinas Pertanian memberikan persyaratan petani yang akan memperoleh kedua hibah itu. Hibah subsidi pupuk murah diberikan kepada petani yang hasil panennya kurang dari 3,25 kuintal, sedangkan kursus teknologi pertanian diberikan kepada 50% tertinggi petani yang hasil panennya di atas rataan. Dengan data seperti ini, berapa banyak petani yang akan mendapatkan subsidi pupuk murah tersebut? Berapa hasil panen terendah dari kelompok petani yang memperoleh hibah kursus tekonologi pertanian?

Masalah di atas adalah contoh sederhana dari suatu permasalahan statistika. Apa statistika itu? Apa pula yang dimaksud dengan statistik? Untuk menyelesaikan masalah di atas, Anda perlu mengingat kembali konsep-konsep pada aljabar himpunan dan logika matematika. Selanjutnya, silakan Anda mempelajari isi bab ini. Setelah menguasai konsep-konsep dari statistika, Anda diharapkan dapat menerapkan statistika dalam permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan statistika, termasuk dapat memecahkan masalah di atas.

1.1 Populasi, Sampel, dan Data Statistika

Populasi, sampel, dan data merupakan tiga komponen penting dalam statistika. Sebelum membahas apa arti ketiga hal tersebut, kita akan bedakan lebih dahulu tentang pengertian statistik dan statistika.

Statistik adalah himpunan angka-angka mengenai suatu masalah, sehingga memberikan gambaran tentang masalah tersebut. Biasanya himpunan angka tersebut sudah disusun dalam suatu tabel. Misalnya, statistik penduduk, statistik lulusan sekolah, statistik penderita HIV, dan lain sebagainya.

Statistik juga dapat diartikan sebagai ukuran yang dihitung dari sekelompok data dan merupakan wakil dari data tersebut. Misalnya, *rata-rata* nilai ulangan matematika adalah 7,5. Sebanyak *75%* dari siswa Kelas XI Bahasa hobinya sepak bola. Kematian di desa itu *kebanyakan* akibat demam berdarah. Dalam ketiga contoh ini, *rata-rata*, *persentase*, dan *kebanyakan* termasuk ke dalam statistik.

Statistika adalah ilmu yang mempelajari pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data, serta penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional. Aktivitas pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data disebut statistika deskriptif. Sedangkan aktivitas penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional disebut statistika inferensi.

Misalkan ada seorang peneliti ingin meneliti tentang hobi dari seluruh siswa Kelas XI Bahasa seluruh Indonesia. Seluruh siswa Kelas XI Bahasa yang akan diteliti atau keseluruhan objek penelitian ini disebut populasi. Namun demikian, dengan keterbatasan dana, tenaga dan waktu tidak mungkin meneliti satu-per satu siswa Kelas XI Bahasa se-Indonesia. Peneliti dengan cara tertentu cukup mengambil sebagian anggota dari populasi tersebut. Sebagian anggota yang diteliti itu yang disebut sampel. Teknik atau cara pengambilan sampel disebut sampling.

Dalam menyelidiki suatu masalah selalu diperlukan data. Data dapat diartikan sebagai keterangan yang diperlukan untuk memecahkan suatu masalah. Menurut sifatnya data dibagi menjadi dua, yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Data kualitatif adalah data yang berbentuk kategori atau atribut, contohnya: ”Nilai tukar rupiah hari ini mengalami penguatan”. Sedangkan data kuantitatif adalah data yang berbentuk bilangan, contohnya: ”Harga *handphone* (HP) itu adalah Rp2.500.000,00”. Namun yang akan kita pelajari dalam buku ini adalah khusus data kuantitatif. Menurut cara memperolehnya, data kuantitatif dibedakan menjadi dua macam, yaitu data cacahan dan data ukuran. Data cacahan adalah data yang diperoleh dengan cara mencacah, membilang, atau menghitung banyak objek. Sebagai contoh adalah data tentang banyak siswa suatu sekolah yang mempunyai HP. Data ukuran adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur besaran objek. Sebagai contoh adalah data tentang tinggi siswa dan data tentang berat siswa suatu sekolah. Tinggi siswa diperoleh dengan mengukur panjangnya, sedangkan berat diperoleh dengan menimbangnya.

Latihan 1.1

1. Apa yang dimaksud dengan:
   a. statistik dan statistika,
   b. data, data kualitatif, dan data kuantitatif,
   c. data cacahan dan data ukuran.
2. Manakah yang termasuk sampel dan populasi dari aktivitas-aktivitas berikut ini.
   a. Sekolah memilih 20 siswa dari seluruh siswa untuk mengikuti penyuluhan narkoba.
   b. Pembeli itu mencoba 5 *laptop* dari 50 *laptop* yang ditawarkan.
   c. Dari satu truk tangki bensin, pengecer membeli 2 dirigen.
3. Seorang peneliti ingin meneliti 10 orang kepala keluarga dari 57 kepala keluarga Desa Suka Rukun. Hasil penelitiannya dituangkan dalam Tabel 1.2 berikut.

Tabel 1.2

No. Subjek	Tanggungan Keluarga (orang)	Penghasilan/bulan (dalam rupiah)	Luas Pekarangan (dalam m^2)	Pekerjaan
1	2	500.000	100	buruhkasar
2	2	750.000	120	karyawan pabrik
3	3	1.200.000	250	wiraswasta
4	1	2.000.000	200	wiraswasta
5	4	650.000	150	buruh kasar
6	3	800.000	200	karyawan pabrik
7	5	1.500.000	250	pegawai negeri
8	2	750.000	150	karyawan kantor
9	1	1.200.000	300	pegawai negeri
10	2	2.500.000	300	pengacara

   a. Dari penjelasan di atas, manakah sampel dan manakah populasinya?
   b. Manakah yang termasuk data kualitatif dan manakah data kuantitatif?
   c. Manakah yang termasuk data cacahan dan data ukuran?
4. Dari setiap data berikut, bedakan antara data kualitatif dan data kuantitatif.
   a. pendapatan per kapita suatu kabupaten
   b. teknik pembayaran (tunai, kartu kredit, cek, transfer)
   c. jadwal penerbangan pesawat
   d. laba tahunan perusahaan
   e. klasifikasi golongan pegawai
   f. upah buruh
   g. ukuran sepatu
   h. tinggi badan
   i. curah hujan
   j. indeks harga saham

5. *Industri*

Tabel berikut menyajikan data produksi dari suatu perusahaan pakaian jadi pada tahun 2007.

Tabel 1.3

Kualitas	Jenis	Banyak (kodi)
1	baju	2.165
2	jaket	1.147
3	celana jeans	2.172

a. Manakah yang merupakan data kualitatif? Terdiri atas kategori apa?
b. Manakah yang merupakan data kuantitatif?
c. Dari jawaban (b), termasuk data cacahan atau data ukuran?

6. *Manajemen*

Dari 50 supermarket di suatu kota besar, diambil 8 supermarket untuk diteliti, diperoleh data berikut.

Tabel 1.4

Supermarket	Jumlah Karyawan	Aset (miliar rupiah)	Keuntungan (miliar rupiah)	Kategori Supermarket
Goro	190	423	2,6	besar
Matahari	120	366	2,3	besar
Luwes	85	163	1,2	sedang
Alfa	52	88	0,6	kecil
Mitra	55	84	0,5	kecil
Grand Mall	130	325	1,7	besar
Ramayana	92	156	1,0	sedang

a. Sebutkan populasi dan sampel dari data di atas?
b. Dapatkah jumlah karyawan dikelompokkan sebagai data kualitatif? Mengapa?
c. Kategori supermarket termasuk jenis data apa?
d. Manakah yang termasuk data cacahan dan manakah yang termasuk data ukuran?

1.2 Menyajikan Data dalam Bentuk Tabel dan Diagram

Data yang telah kita kumpulkan dari penelitian, baik itu data cacahan atau data ukuran, untuk keperluan atau analisis selanjutnya perlu kita sajikan dalam bentuk yang jelas dan menarik. Secara umum, terdapat dua cara penyajian data yaitu dengan tabel (daftar) dan dengan diagram (grafik).

Tabel 1.5 Perkiraan Cuaca Kota-kota Besar di Indonesia

Kota	Cuaca	Suhu (°C)	Kelembaban (%)
Ambon	Berawan	23 – 33	61 – 95
Bandung	Hujan	19 – 29	65 – 95
Denpasar	Hujan	25 – 31	73 – 96
Jakarta	Hujan	25 – 33	65 – 93
Jayapura	Hujan	24 – 33	60 – 90
Makasar	Hujan	24 – 33	66 – 90
Medan	Hujan	24 – 30	63 – 93
Palembang	Hujan	23 – 32	68 – 98
Pontianak	Hujan	24 – 33	65 – 96
Semarang	Hujan	24 – 32	58 – 92
Surabaya	Hujan	24 – 33	56 – 92
Yogyakarta	Hujan	24 – 33	58 – 93

Sumber: Seputar Indonesia, 22 Januari 2007

Untuk menyusun sekumpulan data yang urutannya belum tersusun secara teratur ke dalam bentuk yang teratur, data itu disajikan dalam sebuah tabel. Sebuah tabel umumnya terdiri dari beberapa bagian: judul tabel, judul kolom, judul baris, badan tabel, catatan, dan sumber data. Kita perhatikan contoh tabel perkiraan cuaca di atas.

Dari contoh tabel di atas, kita mempunyai:

Judul tabel : Perkiraan Cuaca Kota-kota Besar di Indonesia ...
Judul kolom : Kota, Cuaca, Suhu, dan Kelembaban
Judul baris : Ambon, Bandung, Denpasar, ...
Badan tabel : data cuaca (Berawan, Hujan), data suhu, dan data kelembaban
Sumber : Seputar Indonesia, 22 Januari 2007

Dengan menyajikan data seperti itu, kita dapat dengan mudah membaca tabel itu, sebagai contoh: pada hari Senin, 22 Januari 2007, di Kota Denpasar diperkirakan hujan, suhu 25° – 31°, dan kelembaban 73% – 96%.

Contoh 1.2.1

Diberikan data jumlah lulusan dari empat SMA berdasarkan jurusan dan jenis kelamin, yang tertuang dalam tabel berikut.

Tabel 1.6

Sekolah	IPA		IPS		Bahasa		Jumlah
	Laki	Prp	Laki	Prp	Laki	Prp	
SMA 1	15	20	10	17	10	18	90
SMA 2	10	17	14	22	18	18	99
SMA 3	12	12	12	18	18	16	88
SMA 4	18	25	15	15	16	15	104
Jumlah	55	74	51	72	62	67	381

Dari tabel tersebut:

a. Berapakah jumlah lulusan dari SMA 1?
b. Berapa persen jumlah lulusan dari SMA 3?

c. Berapakah jumlah lulusan siswa laki-laki dari Jurusan IPS?
d. Berapa persen jumlah lulusan perempuan?

Penyelesaian:

a. Pada baris pertama dari badan tabel, kita dapat membaca bahwa jumlah lulusan dari SMA 1 adalah 90 siswa.

b. Pada baris ketiga dari badan tabel, kita membaca bahwa jumlah lulusan dari SMA 3 adalah 88 siswa. Sedangkan pada baris terakhir dan kolom terakhir kita peroleh bahwa jumlah seluruh lulusan adalah 381 siswa, sehingga persentase lulusan dari SMA 3 adalah:

$$\frac{88}{381} \times 100\% = 23{,}1\%$$

c. Pada kolom ketiga dari badan tabel, kita baca bahwa jumlah lulusan siswa laki-laki dari jurusan IPS adalah 51 siswa.

d. Pada kolom ke-1, ke-3, dan ke-5 kita peroleh jumlah lulusan siswa laki-laki adalah:

$$55 + 51 + 62 = 168 \text{ siswa},$$

sehingga persentasenya adalah:

$$\frac{168}{381} \times 100\% = 44\%$$

□

Di samping dengan tabel, kelompok data juga dapat kita sajikan ke bentuk diagram atau grafik. Beberapa macam diagram yang biasa digunakan, antara lain: diagram batang, diagram lingkaran, dan diagram garis. Dengan penyajian semacam ini data akan mudah dibaca, dipahami, dan ditafsirkan.

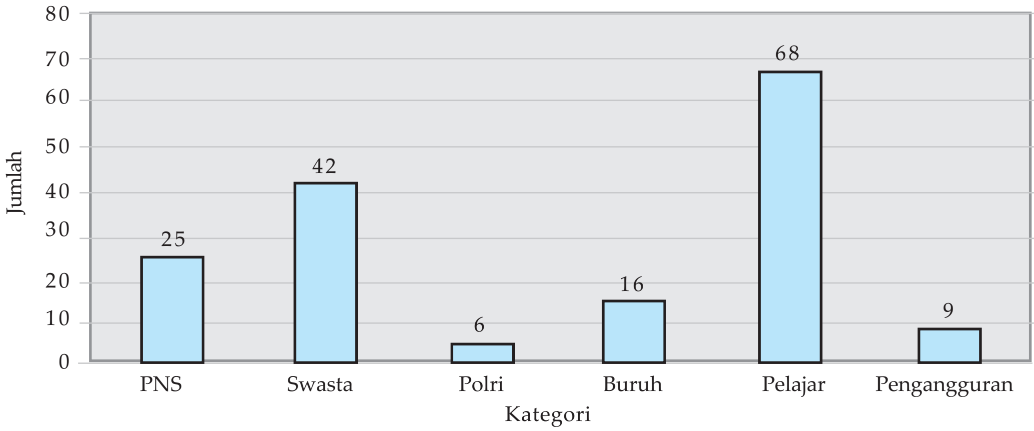
1.2.1 Diagram Batang

Diagram batang adalah diagram yang berdasarkan data kategori atau kelompok, misalnya untuk menyajikan jumlah penduduk di suatu daerah pada selang waktu tertentu, jumlah siswa di beberapa daerah pada waktu tertentu, dan sebagainya. Diagram batang dapat kita buat dengan batang vertikal ataupun batang horizontal. Langkah-langkah untuk membuat diagram batang:

- membuat sumbu mendatar dan sumbu vertikal, sumbu yang satu digunakan untuk menunjukkan jenis kategorinya, sedangkan sumbu yang lain untuk menuliskan nilai data atau frekuensinya;
- membuat batang untuk masing-masing jenis kategori dengan lebar sama dan panjang/tingginya disesuaikan dengan nilai data atau frekuensinya, jarak antara batang yang satu dengan lainnya sama;
- setiap batang diberi warna atau diarsir dengan corak yang sama, kemudian diberi nomor dan judul, sedangkan jika perlu di bawahnya diberi keterangan tentang catatan/sumbu data.

Contoh 1.2.2

Jenis profesi warga desa Bangun Nagri diberikan oleh diagram batang berikut ini.



Gambar 1.1 Diagram Batang Jenis Profesi Warga Desa Bangun Nagri

a. Berapakah jumlah warga desa Bangun Nagri yang berprofesi buruh?
b. Berapakah jumlah pelajar yang ada di Desa Bangun Nagri?
c. Berapakah jumlah warga desa Bangun Nagri?

Penyelesaian:

a. Pada sumbu kategori (mendatar) kita dapat membaca bahwa batang kategori buruh mempunyai nilai/tingginya adalah 16. Oleh karena itu, jumlah warga desa Bangun Nagri yang berprofesi buruh sebanyak 16 orang.
b. Pada batang kategori pelajar, kita dapat membaca bahwa jumlah pelajar di Desa Bangun Nagri sebanyak 68 anak.
c. Jumlah warga desa Bangun Nagri adalah jumlah semua penduduk dari semua profesi yang ada. Oleh karena itu, jumlah warga Desa Bangun Nagri adalah:

$$25 + 42 + 6 + 16 + 68 + 9 = 166 \text{ orang}$$

Contoh 1.2.3

Data jumlah siswa pada setiap tingkat sekolah pada suatu kota pada tahun 2007 diberikan oleh tabel berikut.

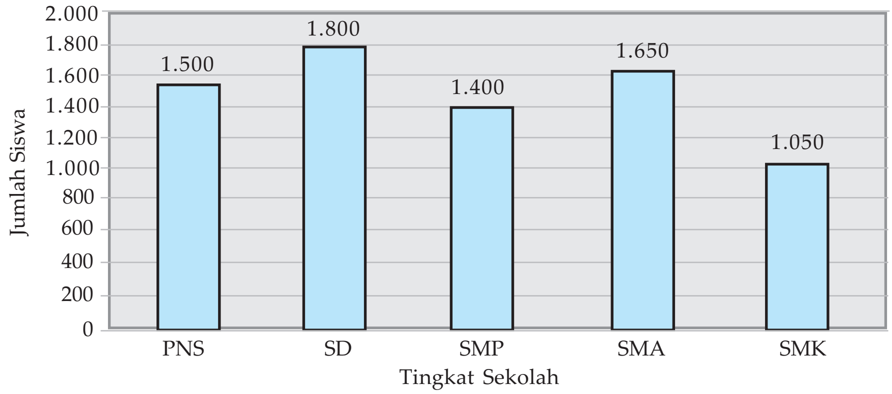
Tabel 1.7

Tingkat Sekolah	Jumlah Siswa
TK	1.500
SD	1.800
SMP	1.400
SMA	1.650
SMK	1.050

Sajikan data di atas ke dalam diagram batang.

Penyelesaian:

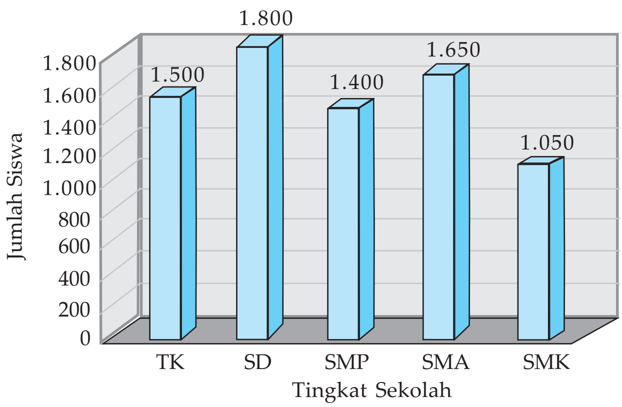
Diagram batang dari data di atas diberikan oleh Gambar 1.2 berikut ini.



Gambar 1.2 Diagram Batang Jumlah Siswa Tahun 2007

□

Dengan kemajuan teknologi, kita mempunyai perangkat komputer untuk menggambarkan grafik dengan baik dan menarik, misalnya menggunakan *Microsoft Excel*, coba kita ingat kembali pelajaran itu ketika SMP dulu. Sebagai contoh, data pada Contoh 1.3.2 dapat kita sajikan diagram batangnya dengan 3 dimensi.



Gambar 1.3 Diagram Batang 3D Jumlah Siswa Tahun 2007

1.2.2 Diagram Lingkaran

Jika bagian dari kelompok data yang satu terkait dengan bagian yang lainnya dalam satu kesatuan, maka kumpulan data itu dapat kita sajikan dalam diagram lingkaran. Misalnya, data tentang umur siswa suatu sekolah, pemakaian kendaraan menuju sekolah atau kantor, latar belakang pendidikan suatu daerah, hobi dari suatu kelompok siswa, dan lain sebagainya. Diagram lingkaran biasanya digunakan untuk tujuan perbandingan.

Telah kita ketahui bahwa besar sudut satu keliling lingkaran adalah 360°, dan luas juring lingkaran sebanding dengan sudut pusatnya. Cara membuat diagram lingkaran adalah lingkaran dibagi menjadi beberapa juring lingkaran yang luasnya proporsional terhadap setiap banyaknya data untuk setiap bagian.

Persamaan ini akan sangat membantu kita,

$$\frac{\text{sudut pusat juring}}{360^\circ} = \frac{\text{banyak data diwakili juring}}{\text{total data seluruhnya}} \quad (1.1)$$

Contoh 1.2.4

Misalkan berikut ini adalah data hobi dari 1.200 siswa dari SMA Angkasa.

Tabel 1.8

Hobi	Jumlah Siswa
Sepak bola	300
Bola basket	150
Bola voli	200
Bulu tangkis	250
Karate	100
Lain-lain	200
Jumlah	1.200

Sajikan data di atas ke dalam diagram lingkaran dan tafsirkan.

Penyelesaian:

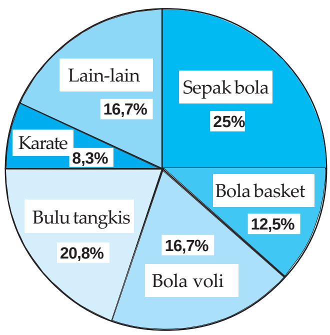
Karena luas juring lingkaran sebanding dengan sudut pusatnya, maka perlu kita tentukan besarnya sudut pusat untuk setiap kategori. Dengan persamaan (1.1), kita peroleh sudut pusat untuk kategori:

$$\text{Sepak bola} = \frac{300}{1.200}\times 360^\circ = 90^\circ \qquad \text{Bulu tangkis} = \frac{250}{1.200}\times 360^\circ = 75^\circ$$

$$\text{Bola basket} = \frac{150}{1.200}\times 360^\circ = 45^\circ \qquad \text{Karate} = \frac{100}{1.200}\times 360^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Bola voli} = \frac{200}{1.200}\times 360^\circ = 60^\circ \qquad \text{Lain-lain} = \frac{200}{1.200}\times 360^\circ = 60^\circ$$

Dengan hasil ini kita dapat menggambarkan diagram lingkarannya,



Gambar 1.4 Diagram Lingkaran Hobi Siswa SMA Angkasa

Dari diagram lingkaran ini kita dapat menyimpulkan bahwa siswa yang mempunyai hobi sepak bola paling banyak (25%) dibandingkan dengan cabang olahraga lainnya. Sedangkan cabang olahraga karate adalah olahraga yang sedikit peminatnya (8,3%).

□

1.2.3 Diagram Garis

Diagram garis merupakan salah satu cara untuk menyajikan data. Dengan diagram garis kita akan lebih mudah membaca data tersebut. Biasanya diagram garis digunakan untuk menyajikan kumpulan data yang diperoleh dari pengamatan dari waktu ke waktu yang berurutan.

Contoh 1.2.5

Dalam enam bulan pertama tahun 2007, pemakaian daya listrik dari Koperasi Sabar Jaya seperti tertuang pada tabel berikut.

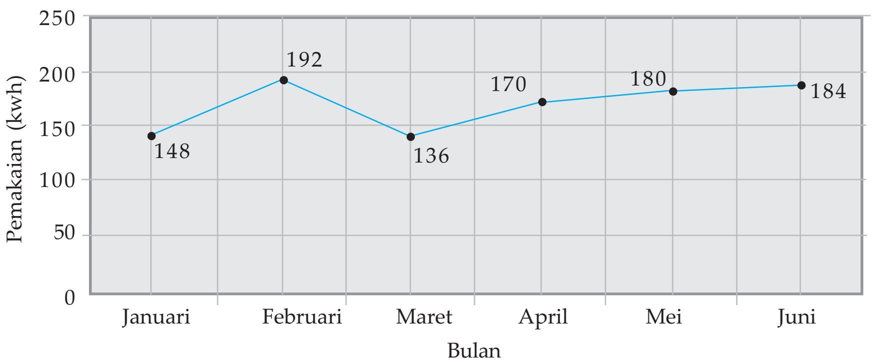
Tabel 1.9

Bulan	Pemakaian (Kwh)
Januari	148
Februari	192
Maret	136
April	170
Mei	180
Juni	184

Sajikan data di atas ke dalam diagram garis dan kemudian tafsirkan.

Penyelesaian:

Data di atas dapat disajikan dengan diagram garis seperti berikut.



Gambar 1.5 Diagram Garis Pemakaian Listrik Koperasi Sabar Jaya

□

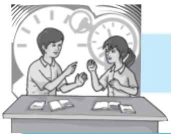
Dari diagram garis di atas dapat dibaca dan ditafsirkan, misalkan:

- Pada bulan Januari – Februari, pemakaian listrik bertambah dengan kemiringan garisnya positif.
- Pada bulan Februari – Maret, pemakaian listrik menurun dengan kemiringan garisnya negatif.

• Dari bulan Maret – Juni, pemakaian listrik semakin meningkat dengan kemiringan garisnya positif untuk setiap bulannya, meskipun kemiringan ini masih lebih kecil dibandingkan dengan periode bulan Januari – Februari.

Diagram garis dapat pula digunakan untuk memprediksi suatu nilai yang belum diketahui. Terdapat dua pendekatan untuk memprediksi nilai yang belum diketahui ini, yaitu dengan interpolasi linear dan ekstrapolasi linear. Pendekatan interpolasi linear adalah memprediksi suatu nilai data yang berada di antara dua titik yang berdekatan. Sebagai contoh, pada diagram garis Gambar 1.4, kita dapat memprediksi pemakaian listrik Koperasi Sabar Jaya pada pertengahan bulan Februari 2007. Pendekatan ekstrapolasi linear adalah memprediksi suatu nilai data yang terletak sesudah titik data terakhir yang diketahui.

Hal ini dapat kita lakukan dengan cara memperpanjang garis ke arah kanan atas atau ke kanan bawah, tergantung kepada kecenderungan nilai-nilai sebelumnya. Sebagai contoh, dapat diprediksi berapa banyak pemakaian listrik Koperasi Sabar Jaya pada bulan Juli, Agustus, dan seterusnya.



Tugas Kelompok

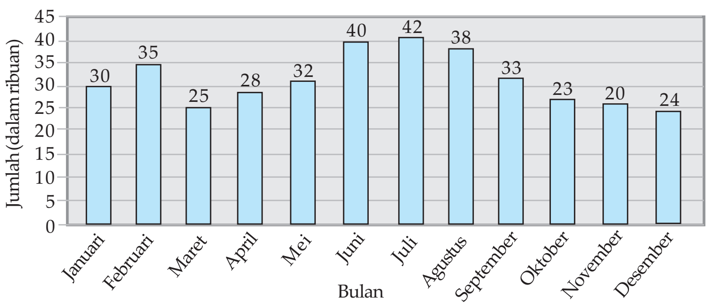
Kerjakan secara berkelompok. Carilah kelompok data tentang kegiatan-kegiatan perekonomian yang masing-masing dapat disajikan dengan diagram batang, diagram lingkaran, dan diagram garis dari koran, majalah, atau internet. Kemudian kumpulkan dalam bentuk kliping lengkap dengan judul, keterangan, dan sumber informasi. Diskusikan pada kelompok Anda dan berikan interpretasi dari setiap kelompok data yang Anda peroleh.

Latihan 1.2

Untuk soal no. 1 – 2 buatlah diagram batang dan diagram lingkaran dari data yang diberikan, kemudian interpretasikan.

1. *Managemen*

   Diagram batang berikut merupakan penyajian hasil survei lembaga konsumen untuk penjualan HP pada suatu wilayah dan untuk periode tahun 2007.

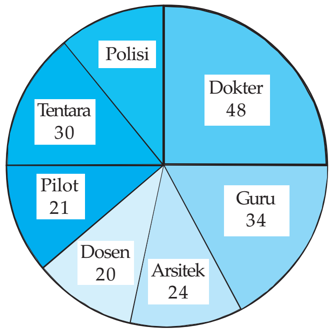


Gambar 1.6 Diagram Batang Jumlah Penjualan HP Tahun 2007

Pertanyaan:
a. Berapakah banyak penjualan HP selama bulan Oktober 2007?
b. Pada bulan apakah penjulan HP mencapai puncaknya?
c. Berapakah jumlah penjualan HP selama semester kedua tahun 2007?

2. *Sosial*

Diagram lingkaran berikut menyajikan data tentang profesi yang dicita-citakan oleh 200 siswa TK Budi Luhur untuk periode tertentu.



Gambar 1.7 Diagram Lingkaran Profesi yang Dicita-citakan Siswa TK Budi Luhur

Pertanyaan:
a. Berapakah banyak siswa TK Budi Luhur yang bercita-cita menjadi polisi?
b. Berapakah persentase siswa TK Budi Luhur yang bercita-cita menjadi dokter?
c. Profesi apakah yang kurang diidolakan siswa-siswa TK Budi Luhur?

Untuk soal no. 3 – 4, buatlah diagram batang dan diagram lingkaran dari data yang diberikan, kemudian interpretasikan.

3. *Managemen*

Hasil penjualan toko elektronik dari merk tertentu (dicatat dalam unit) selama tahun 2007 adalah:

Jenis Barang	Jumlah
Pompa air	40
Almari es	23
Televisi	38
Kipas angin	52
Seterika listrik	20
VCD	45

4. *Pertanian*

Hasil panen dari Desa Tani Makmur selama setahun diberikan oleh tabel berikut.

Jenis	Jumlah Panen (kuintal)
Padi	2.500
Jagung	1.250
Ubi	1.170
Kedelai	1.650
Kacang tanah	1.800
Semangka	2.000

Untuk soal no. 5 – 6, buatlah diagram garis dari data yang diberikan.

5. *Managemen*

Hasil penjualan toko sepeda motor dari merk tertentu (dicatat dalam unit) selama enam tahun terakhir adalah:

Tabel 1.12

Tahun	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Jumlah	252	138	228	312	120	270

6. *Kesehatan*

Data berikut adalah data hasil pemeriksaan suhu tubuh pasien selama dua puluh empat jam.

Tabel 1.13

Jam	Suhu (dalam °C)
06.00	37
09.00	39
12.00	36
15.00	40
18.00	42
21.00	37
24.00	36
03.00	35

5. *Ekonomi*

Berikut ini data perkembangan harga jagung impor Indonesia dari Amerika Serikat selama 8 bulan pada tahun 2007.

Tabel 1.14

Bulan	Harga (dolar AS/ton)
Januari	220
Februari	227
Maret	235
April	217
Mei	226
Juni	235
Juli	230
Agustus	240

Sumber: Kompas, 8 November 2007

Pertanyaan:

a. Dengan bantuan komputer, buatlah diagram garis dari tabel di atas.
b. Interpretasikan dari grafik yang telah Anda buat.
c. Prediksikan harga impor jagung pada bulan September dan Oktober, beri alasan Anda.

1.3 Menyajikan Data dalam Tabel Distribusi Frekuensi

Seringkali kita menjumpai sekumpulan data amatan dalam jumlah atau ukuran yang besar untuk dianalisis. Ukuran data yang besar ini dapat kita sederhanakan dengan cara menentukan banyak nilai amatan yang sama, atau banyak nilai amatan yang terletak pada interval tertentu. Banyak nilai amatan yang sama atau banyak nilai amatan yang terletak pada interval tertentu itu disebut frekuensi. Tabel yang memuat nilai amatan atau nilai amatan yang terletak pada interval tertentu bersama-sama frekuensinya disebut sebagai tabel distribusi frekuensi. Sebagai konsekuensi dua macam amatan ini, maka kita mempunyai dua macam tabel distribusi frekuensi tunggal dan tabel distribusi frekuensi terkelompok. Dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi, data akan lebih mudah digunakan untuk keperluan perhitungan statistik.

1.3.1 Tabel Distribusi Frekuensi Tunggal

Untuk memahami cara membuat tabel ini, kita perhatikan hasil ujian semester mata pelajaran Matematika dari 30 siswa:

80	30	50	70	70	70	40	80	90	50
80	90	70	70	60	60	60	70	50	60
60	60	70	60	60	80	80	80	60	70

Kumpulan data ini secara langsung tidak begitu bermanfaat bagi penafsiran peristiwa-peristiwa yang bersifat kuantitatif, misalnya kita kesulitan mengetahui dengan cepat berapa banyak siswa yang memperoleh nilai di atas 80. Alternatif lain agar kumpulan data di atas mudah ditafsirkan adalah dengan menyusun secara urut mulai dari nilai data terkecil (30) hingga nilai data terbesar (90). Namun cara kedua inipun tidak begitu efektif karena kita masih kesulitan untuk mengetahui dengan cepat berapa jumlah siswa yang memperoleh nilai di antara 50 hingga 90.

Dari kumpulan data di atas, kita dapat membaca bahwa:

1 siswa mendapat nilai 30
1 siswa mendapat nilai 40
3 siswa mendapat nilai 50
9 siswa mendapat nilai 60
8 siswa mendapat nilai 70
6 siswa mendapat nilai 80
2 siswa mendapat nilai 90

Keterangan-keterangan ini tentu saja akan lebih praktis apabila kita sajikan seperti dalam tabel berikut ini.

Tabel 1.15

Nilai Ujian (x_i)	Turus	Banyaknya Siswa/Frekuensi (f_i)
30	I	1
40	I	1
50	III	3
60	~~IIII~~ IIII	9
70	~~IIII~~ III	8
80	~~IIII~~ I	6
90	II	2

Tabel 1.15 seperti ini selanjutnya disebut tabel distribusi frekuensi tunggal. Dengan tabel ini kita dengan cepat mengetahui berapa banyak siswa yang memperoleh nilai 30, siswa yang memperoleh nilai 40, …, dan seterusnya.

1.3.2 Tabel Distribusi Frekuensi Terkelompok

Jika kita dihadapkan pada kelompok data amatan yang sangat besar, maka pembuatan tabel distribusi frekuensi tunggal juga kurang efektif. Untuk kasus demikian ini akan lebih baik apabila kumpulan data tersebut kita kelompokkan ke dalam beberapa kelas interval lebih dahulu, baru ditentukan frekuensinya.

Bentuk umum tabel distribusi frekuensi terkelompok adalah:

Tabel 1.16

Nilai Data	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
$a-b$	x_1	f_1
$c-d$	x_2	f_2
$e-f$	x_3	f_3
$g-h$	x_4	f_4
$i-j$	x_5	f_5
		$\sum f_i$

Beberapa istilah yang berkaitan dengan tabel distribusi frekuensi:

- Interval-interval pada kolom pertama dari Tabel 1.16 disebut kelas interval. Tabel 1.16 mempunyai 5 kelas interval, sebagai contoh, $c - d$ disebut kelas interval ke-2. Penentuan jumlah kelas hendaknya jangan terlalu besar dan jangan terlalu kecil. Jika data amatan berukuran n, dan jumlah kelas adalah k, maka Sturges menyarankan hubungan dua bilangan ini,

$$k \approx 1 + 3{,}3 \log n$$

- Bilangan *a, c, e, g,* dan *i* masing-masing disebut batas bawah kelas, sedangkan bilangan *b, d, f, h,* dan *j* masing-masing disebut batas atas kelas.
- Tepi bawah adalah batas bawah dikurangi dengan ketelitian data yang digunakan. Tepi atas adalah batas atas ditambah dengan ketelitian pengukuran. Jika data diukur dengan ketelitian sampai satuan terdekat, maka ketelitian pengukuran adalah 0,5, sehingga:

  tepi bawah = batas bawah – 0,5
  tepi atas = batas atas + 0,5

  Tepi bawah sering disebut batas bawah nyata dan tepi atas disebut batas atas nyata.
- Nilai tengah adalah nilai yang terletak di tengah-tengah antara batas bawah dan batas atas kelas interval, sehingga nilainya sama dengan ½(batas bawah + batas atas). Sebagai contoh, nilai tengah kelas interval ke-2 dari Tabel 1.16 adalah x_2 dengan $x_2 = \frac{1}{2}(c + d)$.
- Panjang kelas atau lebar kelas didefinisikan sebagai selisih antara tepi atas dengan tepi bawah, yaitu:

  panjang kelas = tepi atas – tepi bawah.

Jika panjang kelas adalah p dan jumlah kelas k, maka akan memenuhi persamaan:

$$p = \frac{\text{nilai data terbesar} - \text{nilai data terkecil}}{k}$$

Dengan memperhatikan komponen-komponen penyusunan tabel distribusi di atas, maka langkah-langkah membuat tabel distribusi frekuensi adalah:
1) Tentukan nilai data terkecil dan nilai data terbesar.
2) Tentukan jumlah kelas.
3) Tentukan panjang kelas.
4) Tentukan kelas-kelas interval dan titik tengahnya.
5) Tentukan frekuensi tiap kelas dengan sistem turus, kemudian susunlah tabel distribusi frekuensi terkelompok seperti Tabel 1.16.

Contoh 1.3.1

Misalkan diberikan 80 data amatan dari pengukuran diameter pipa (dalam mm):

70	73	93	90	43	86	65	93	38	76
79	83	68	67	85	57	68	92	83	91
35	72	48	99	78	70	86	87	72	93
63	80	71	71	98	81	75	74	49	74
88	91	73	74	89	90	76	80	88	56
70	77	92	71	63	95	82	67	79	83
84	97	63	61	80	81	72	75	70	90
66	60	88	53	91	80	74	60	82	81

Buatlah tabel distribusi frekuensi dari kelompok data ini.

Penyelesaian:

1) Nilai data terkecil adalah 35, sedangkan nilai data terbesar adalah 99.
2) Menentukan jumlah kelas interval.
   Ukuran data adalah $n = 80$,

$$k \approx 1 + 3{,}3 \log n = 1 + 3{,}3 \log 80 = 1 + 3{,}3(1{,}9) = 7{,}27$$

   Jumlah kelas yang digunakan 7 atau 8, sebagai contoh kita ambil $k = 7$.
3) Menentukan panjang kelas.

$$p = \frac{\text{nilai data terbesar} - \text{nilai data terkecil}}{k} = \frac{99 - 35}{7} = 9{,}14$$

   Panjang kelas dapat kita ambil 9 atau 10. Sebagai contoh, kita pilih $p = 10$.
4) Menentukan kelas-kelas interval dan titik tengah.
   Karena nilai data terkecil adalah 35, maka 35 kita tetapkan sebagai batas bawah kelas interval pertama (tidak harus demikian). Dengan panjang kelas adalah 10, maka diperoleh kelas-kelas interval beserta titik tengahnya sebagai berikut.

Tabel 1.17

Kelas Interval	Titik Tengah
35 – 44	39,5
45 – 54	49,5
55 – 64	59,5
65 – 74	69,5
75 – 84	79,5
85 – 94	89,5
95 – 104	99,5

5) Memasukkan frekuensi dengan sistem turus.
   Kita masukkan setiap nilai data ke kelas interval yang sesuai dengan sistem turus.

Tabel 1.18

Kelas Interval	Turus	Frekuensi
35 – 44	III	3
45 – 54	III	3
55 – 64	~~IIII~~ II	7
65 – 74	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	23
75 – 84	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	21
85 – 94	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	20
95 – 104	III	3
Jumlah		80

Dengan demikian kita peroleh tabel distribusi secara lengkap,

Tabel 1.19

Kelas Interval	Titik Tengah	Frekuensi
35 – 44	39,5	3
45 – 54	49,5	3
55 – 64	59,5	7
65 – 74	69,5	23
75 – 84	79,5	21
85 – 94	89,5	20
95 – 104	99,5	3
Jumlah		80

□

1.3.3 Tabel Distribusi Frekuensi Kumulatif

Dengan tabel distribusi frekuensi terkelompok selanjutnya kita dapat menyusun tabel distribusi frekuensi kumulatif. Terdapat dua macam tabel distribusi frekuensi kumulatif, yaitu:

- tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari,
- tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.

Frekuensi kumulatif kurang dari (f_k kurang dari) didefinisikan sebagai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang kurang dari atau sama dengan nilai tepi atas pada setiap kelas interval, dan dinotasikan dengan $f_k \leq$. Frekuensi kumulatif lebih dari (f_k lebih dari) didefinisikan sebagai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang lebih dari atau sama dengan nilai tepi bawah pada setiap kelas interval, dan dinotasikan dengan $f_k \geq$.

Sebagai ilustrasi, dari tabel distribusi frekuensi terkelompok pada Tabel 1.19 kita dapat menyusun tabel distribusi kumulatifnya. Dengan menghapus kolom titik tengah dari Tabel 1.19 dan menggantinya dengan kolom tepi bawah dan tepi atas, kita peroleh tabel berikut ini. Ingat karena ketelitian pengukuran data sampai satuan terdekat, maka *tepi bawah* = *batas bawah* – 0,5 dan *tepi atas* = *batas atas* + 0,5.

Tabel 1.20

Kelas Interval	Frekuensi	Tepi Bawah	Tepi Atas
35 – 44	3	34,5	44,5
45 – 54	3	44,5	54,5
55 – 64	7	54,5	64,5
65 – 74	23	64,5	74,5
75 – 84	21	74,5	84,5
85 – 94	20	84,5	94,5
95 – 104	3	94,5	104,5

Selanjutnya dari Tabel 1.20 ini kita memperoleh tabel distribusi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi kumulatif lebih dari berikut ini.

Tabel 1.21-a

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \leq$
$\leq$ 44,5	3
$\leq$ 54,5	6
$\leq$ 64,5	13
$\leq$ 74,5	36
$\leq$ 84,5	57
$\leq$ 94,5	77
$\leq$ 104,5	80

Tabel 1.21-b

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \geq$
$\geq$ 34,5	80
$\geq$ 44,5	77
$\geq$ 54,5	74
$\geq$ 64,5	67
$\geq$ 74,5	44
$\geq$ 84,5	23
$\geq$ 94,5	3

Dengan tabel distribusi kumulatif kurang dari pada Tabel 1.21-a, kita dapat membaca sebagai berikut.

- Ada 3 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 44,5 atau kurang.
- Ada 6 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 54,5 atau kurang.
- Ada 13 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 64,5 atau kurang, ... dan seterusnya.

Demikian pula, dengan tabel distribusi kumulatif lebih dari pada Tabel 1.21-b, kita dapat membaca sebagai berikut.

- Ada 80 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 34,5 atau lebih.
- Ada 77 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 44,5 atau lebih.
- Ada 74 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 54,5 atau lebih, ... dan seterusnya.

Di samping frekuensi kumulatif mutlak seperti di atas, kita kadang-kadang perlu menghitung nilai frekuensi kumulatif relatif dari suatu nilai amatan yang kurang dari atau lebih terhadap suatu batas nilai tertentu. Frekuensi kumulatif relatif dinyatakan dengan persen (%), dengan rumus berikut.

$$\text{Frekuensi kumulatif relatif} = \frac{\text{frekuensi kumulatif}}{\text{ukuran data}} \times 100\%$$

Sebagai contoh:

- Frekuensi kumulatif relatif kurang dari 54,5 adalah:

$$\frac{6}{80} \times 100\% = 7,5\%$$

- Frekuensi kumulatif relatif kurang dari 64,5 adalah:

$$\frac{13}{80} \times 100\% = 16,25\%$$

- Frekuensi kumulatif relatif lebih dari 74,5 adalah:

$$\frac{44}{80} \times 100\% = 55\%$$

- Frekuensi kumulatif relatif lebih dari 84,5 adalah:

$$\frac{23}{80} \times 100\% = 28{,}75\%$$

Makna dari persentase di atas adalah bahwa:
- 7,5% nilai pengukuran letaknya di bawah nilai 54,5,
- 16,25% nilai pengukuran letaknya di bawah nilai 54,5,
- 55% nilai pengukuran letaknya di atas 74,5,
- 28,75% nilai pengukuran letaknya di atas 84,5.

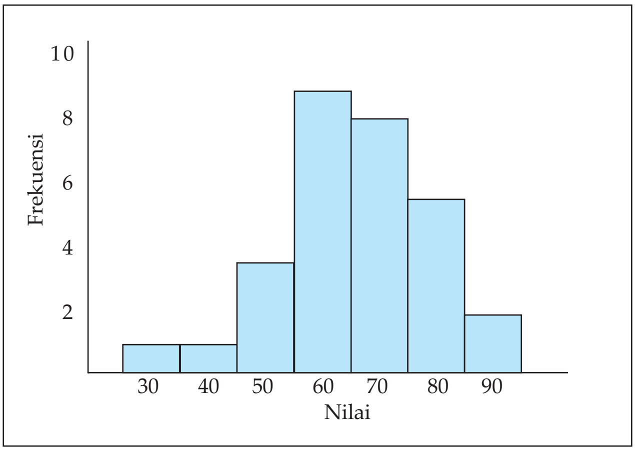
1.3.4 Histogram dan *Ogive*

Kumpulan data statistik yang telah dianalisis dan disajikan dalam tabel distribusi frekuensi atau tabel distribusi frekuensi kumulatif dapat pula kita sajikan dalam bentuk diagram. Gambar diagram dari tabel distribusi frekuensi disebut histogram, yang dapat dilanjutkan ke gambar poligon frekuensi. Sedangkan diagram dari tabel distribusi frekuensi kumulatif disebut *ogive*.

❖ Histogram

Histogram adalah salah satu cara untuk menyajikan data statistik dalam bentuk gambar. Histogram sering disebut sebagai grafik frekuensi yang bertangga, yang terdiri dari serangkaian persegi panjang yang mempunyai alas sepanjang interval antara kedua tepi kelas intervalnya dan mempunyai luas yang sebanding dengan frekuensi yang terdapat dalam kelas-kelas interval yang bersangkutan. Cara menggambarnya, antara persegi panjang yang berdekatan berimpit pada satu sisi.

Sebagai contoh, tabel distribusi frekuensi tunggal pada Tabel 1.15 dapat kita sajikan dengan histogram seperti di bawah ini.

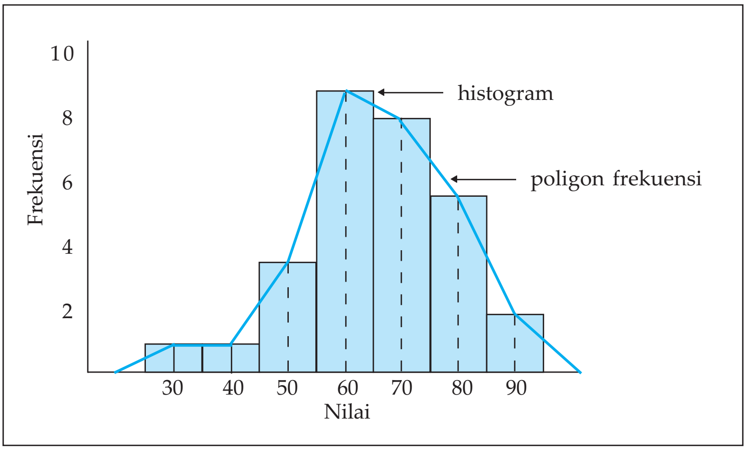


Gambar 1.8 Histogram Nilai Ujian

Setiap persegi panjang pada suatu histogram mewakili kelas tertentu, dengan pengertian:

- lebar persegi panjang menyatakan panjang kelas,
- tinggi persegi panjang menyatakan frekuensi kelas dan digambarkan secara vertikal.

Oleh karena itu, jika setiap kelas mempunyai panjang yang sama, maka luas setiap persegi panjang itu berbanding lurus dengan frekuensinya. Selanjutnya, jika setiap titik tengah dari bagian sisi atas persegi panjang pada histogram itu dihubungkan, maka kita peroleh diagram garis. Diagram garis semacam ini disebut poligon frekuensi. Poligon frekuensi Gambar 1.9 diberikan gambar berikut.



Gambar 1.9 Poligon Frekuensi Nilai Ujian

❖ *Ogive* (*Ozaiv*)

Telah disebutkan bahwa tabel distribusi frekuensi kumulatif dapat digambarkan diagramnya berupa *ogive*. Karena tabel distribusi frekuensi kumulatif ada dua macam, yaitu tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari, sebagai konsekuensinya kita mempunyai dua macam *ogive*, yaitu *ogive* positif dan *ogive* negatif. Caranya adalah dengan menempatkan nilai-nilai tepi kelas pada sumbu mendatar dan nilai-nilai frekuensi kumulatif pada sumbu tegak. Titik-titik yang diperoleh (pasangan nilai tepi kelas dengan nilai frekuensi kumulatif) dihubungkan dengan garis lurus, maka diperoleh diagram garis yang disebut poligon frekuensi kumulatif. Kurva frekuensi kumulatif inilah yang disebut *ogive*.

Sebagai contoh, kita perhatikan kembali tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari pada Tabel 1.21.

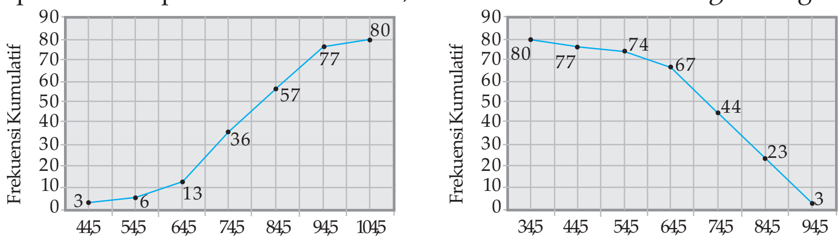
Daftar distribusi frekuensi kumulatif kurang dari

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \leq$
≤ 44,5	3
≤ 54,5	6
≤ 64,5	13
≤ 74,5	36
≤ 84,5	57
≤ 94,5	77
≤ 104,5	80

Daftar distribusi frekuensi kumulatif lebih dari

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \geq$
≥ 34,5	80
≥ 44,5	77
≥ 54,5	74
≥ 64,5	67
≥ 74,5	44
≥ 84,5	23
≥ 94,5	3

Kurva frekuensi kumulatif untuk tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari diperlihatkan pada Gambar 1.10-a, kurva ini disebut *ogive* positif. Sedangkan kurva frekuensi kumulatif untuk tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari diperlihatkan pada Gambar 1.10-b, dan kurva ini disebut *ogive* negatif.



(a) (b)

Gambar 1.10 Ogive Nilai Hasil Ujian

Latihan 1.3

1. Dari 20 orang siswa yang mengikuti ulangan sejarah diperoleh nilai sebagai berikut.

81	81	60	60	84	67	81	75	72	75
72	67	87	90	75	81	84	90	81	90

Dari kumpulan data ini,

a. Tentukan tabel distribusi frekuensi tunggalnya.
b. Berapa persen siswa yang memiliki nilai:
   (i) 70 atau kurang?
   (ii) 80 atau kurang?
c. Berapa persen siswa yang memiliki nilai:
   (i) 75 atau lebih?
   (ii) 85 atau lebih?

2. *Perikanan*

Data berikut diperoleh dari pencatatan banyak tambak yang dimiliki oleh 40 warga pada suatu kampung di daerah pesisir.

2	4	3	6	4	1	4	3	4	2
3	4	2	5	4	4	1	5	3	4
1	4	3	5	4	2	4	3	3	2
3	4	5	2	6	4	3	5	4	1

a. Buatlah tabel distribusi frekuensi tunggal untuk data di atas.
b. Berapa persen warga yang memiliki:
   (i) 2 tambak atau kurang? (ii) 3 tambak atau kurang?
c. Berapa persen warga yang memiliki:
   (i) 4 tambak atau lebih? (ii) 5 tambak atau lebih?

3. Data tinggi badan (dalam cm) pada suatu RT diberikan oleh data berikut.

Tabel 1.22

Tinggi Badan	Banyak Orang
160,0 – 162,0	8
162,1 – 164,1	11
164,2 – 166,2	15
166,3 – 168,3	12
168,4 – 170,4	10
170,5 – 172,5	6
Jumlah	60

Berdasarkan Tabel 1.22 ini,
a. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan terletak pada kelas interval ke-4?
b. Berapa banyak warga yang mempunyai tinggi badan kurang dari 166,3 cm?
c. Berapa banyak warga yang mempunyai tinggi badan paling kecil 164,2 cm?
d. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan kurang dari 168,4 cm?
e. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan paling kecil 166,3 cm?

4. Diketahui data terkelompok:

Tabel 1.23

Nilai	Frekuensi
55 – 59	8
60 – 64	14
65 – 69	35
70 – 74	29
75 – 79	9
80 – 84	5

Berdasarkan Tabel 1.23 ini,
a. Sebutkan jumlah kelas interval dan sebutkan kelas-kelas interval itu.
b. Tentukan batas bawah dan batas atas untuk setiap kelas interval.

c. Tentukan tepi bawah dan tepi atas untuk masing-masing kelas interval.
d. Tentukan panjang kelas dan titik tengah untuk setiap kelas interval.
e. Tentukan frekuensi dan frekuensi relatif untuk setiap kelas interval.
f. Tentukan kelas interval yang mempunyai frekuensi terbesar dan kelas interval yang mempunyai frekuensi terkecil.

5. *Industri*

Berikut kumpulan data hasil pengukuran diameter pipa pada suatu perusahaan pipa.

80	72	66	78	66	73	75	69	74	73
74	71	74	72	73	70	70	75	74	79
80	60	74	72	77	74	77	79	79	72
74	74	71	76	72	62	70	67	68	75

Pengukuran dalam milimeter. Dengan kumpulan data ini,

a. Urutkan kumpulan data di atas mulai dari nilai data terkecil hingga nilai data terbesar.
b. Buatlah tabel distribusi frekuensi dengan panjang kelas interval 3 mm.
c. Dari tabel jawaban b, buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif:
   (i) kurang dari
   (ii) lebih dari
d. Tentukan frekuensi kumulatif relatif kurang dari:
   (i) 70
   (ii) 76
e. Tentukan frekuensi kumulatif relatif lebih dari:
   (i) 64
   (ii) 73

6. Diketahui kumpulan data terkelompok:

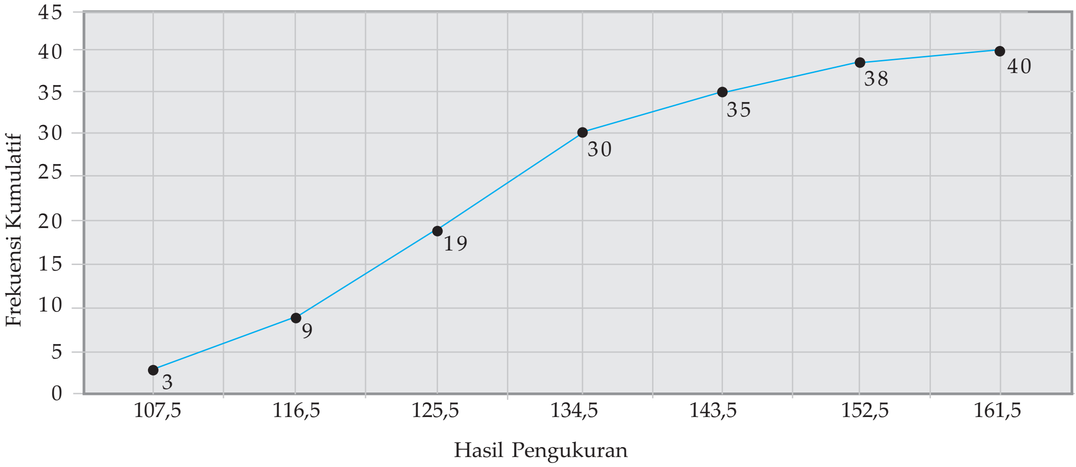
Tabel 1.24

Nilai	Frekuensi
42 – 46	1
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	8
67 – 71	4
72 – 76	2

Dari tabel ini,

a. Buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.
b. Gambarkan histogram dan poligon frekuensinya.
c. Gambarkan *ogive*nya.

7. Hasil pengukuran tinggi terhadap 40 siswa SD memberikan *ogive* positif berikut ini.



Gambar 1.11 Ogive Tinggi Siswa SD

a. Berapakah banyak siswa yang tingginya kurang atau sama dengan 134,5 cm?
b. Berapakah banyak siswa yang tingginya lebih dari 143,5 cm?

8. *Pariwisata*

Jumlah pengunjung suatu tempat pariwisata pada suatu liburan selama seminggu dicatat dalam tabel berikut.

Tabel 1.25

Hari ke-	1	2	3	4	5	6	7
Banyak Pengunjung	250	325	250	375	325	450	220

a. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.
b. Pada hari ke berapa jumlah penonton mencapai maksimum dan pada hari ke berapa jumlah penonton mencapai minimum?

1.4 Ukuran Pemusatan (Tendensi Sentral)

Misalkan diberikan data umur dari 10 siswa calon paskibraka:

18	16	15	15	17
16	16	17	18	18

Dari kumpulan data mentah di atas, kita belum dapat menafsirkan atau menyimpulkan apa-apa tentang nilai-nilai data itu. Terdapat tiga nilai statistik yang dapat dipakai untuk menjelaskan tentang kumpulan data tersebut, yaitu rataan, median, dan modus. Ketiga nilai ini adalah parameter yang dapat digunakan untuk menafsirkan suatu gejala pemusatan nilai-nilai dari kumpulan data yang diamati. Karena alasan inilah, maka ketiga nilai statistik ini selanjutnya disebut sebagai ukuran pemusatan atau ukuran tendensi sentral.

1.4.1 Rataan (Mean)

Rataan atau rataan hitung dari suatu kumpulan data didefinisikan sebagai perbandingan jumlah semua nilai data dengan banyak nilai data.

Jadi,

$$\text{rataan} = \frac{\text{jumlah semua nilai data yang diamati}}{\text{banyak data yang diambil}}$$

Untuk data umur dari 10 siswa calon paskibraka di atas, diperoleh:

$$\text{rataan} = \frac{18+16+15+15+17+16+16+17+18+18}{10} = \frac{166}{10} = 16,6$$

Secara umum, untuk kumpulan dari n data, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, rataan dinotasikan $\bar{x}$ (dibaca: x bar), diberikan oleh rumus:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad (1.2)$$

dengan:

$\bar{x}$: rataan dari kumpulan data

x_i : nilai data amatan ke-i

n : banyak data yang diamati, atau ukuran data

Notasi Σ (dibaca: sigma) menyatakan penjumlahan suku-suku.

Contoh 1.4.1

Hitunglah rataan dari kumpulan data berikut.

9, 10, 12, 9, 8, 12, 9, 11

Penyelesaian:

Banyak data yang diamati adalah $n = 8$. Dengan menggunakan rumus (1.2),

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} \\ &= \frac{9+10+12+9+8+12+9+11}{8} \\ &= \frac{80}{8} = 10\end{aligned}$$

Jadi, rataan dari kumpulan data di atas adalah $\bar{x}$ = 10.

□

Contoh 1.4.2

Rataan nilai ujian matematika dari suatu kelas adalah 6,9. Jika dua siswa baru yang nilainya 4 dan 6 digabungkan dengan kelompok tersebut, maka rataannya menjadi 6,8. Berapa banyaknya siswa kelas semula?

Penyelesaian:

Misalkan banyak siswa kelas semula adalah n, maka kita peroleh:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 6,9 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 6,9\,n$$

Simbol " $\Leftrightarrow$ " dibaca "*jika dan hanya jika*". Setelah nilai dua siswa baru digabungkan, maka jumlah siswa sekarang adalah $n + 2$ dengan nilai rataan 6,8. Dalam hal ini kita mempunyai persamaan:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 4 + 6}{n+2} = 6,8 \quad &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i + 10 = 6,8(n+2) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i + 10 = 6,8n + 13,6 \\
&\Leftrightarrow 6,9n + 10 = 6,8n + 13,6 \quad \left(\text{substitusi } \sum_{i=1}^{n} x_i = 6,9\,n\right) \\
&\Leftrightarrow 6,9n - 6,8n = 13,6 - 10 \\
&\Leftrightarrow 0,1n = 3,6 \\
&\Leftrightarrow n = \frac{3,6}{10} = 36
\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya siswa semula adalah 36.

□

Kita perhatikan kembali data umur dari 10 siswa calon paskibraka

18	16	15	15	17
16	16	17	18	18

Nilai rataan dari kumpulan data ini adalah:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{18+16+15+15+17+16+16+17+18+18}{10} \\
&= \frac{166}{10} \\
&= 16,6
\end{aligned}$$

Bagian pembilang pada perhitungan di atas dapat kita tuliskan dengan:

$$2\times 15 + 3\times 16 + 2\times 17 + 3\times 18 = 166$$

Formula ini adalah penjumlahan dari perkalian frekuensi dengan nilai data. Perhatikan Tabel 1.26 berikut.

Tabel 1.26

Nilai (x_i)	Banyak Siswa/Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
15	2	30
16	3	48
17	2	34
18	3	54
	$\sum f_i = n = 10$	$\sum f_i \cdot x_i = 166$

Oleh karena itu, rataan dari suatu tabel distribusi frekuensi (tunggal atau terkelompok) dapat ditentukan menggunakan rumus:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \tag{1.3}$$

dengan:

x_i = nilai data amatan ke-i

f_i = frekuensi untuk nilai data x_i

Contoh 1.4.3

Hitunglah nilai rataan dari data berikut.

Tabel 1.27

Nilai Ujian (x_i)	Frekuensi (f_i)
53	8
61	17
72	47
85	32
94	6

Penyelesaian:

Kita lengkapi dahulu tabel distribusi frekuensi di atas,

Tabel 1.28

Nilai Ujian (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
53	8	424
61	17	1.037
72	47	3.384
85	32	2.720
94	6	560
	$\sum f_i = n = 110$	$\sum f_i \cdot x_i = 8.129$

Dengan menggunakan rumus (1.3), kita peroleh:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{8.129}{110} = 73,9$$

Jadi, nilai rataan data di atas adalah $\bar{x}$ = 73,9.

□

Berikut ini adalah penyelesaian dari masalah yang diberikan di awal bab, yaitu menentukan petani yang memperoleh subsidi pupuk murah dan petani yang memperoleh kursus teknologi pertanian dari Desa Simpati, yang disederhanakan menjadi contoh berikut.

Contoh 1.4.4

Data berikut adalah data hasil panen padi (dalam kuintal) dari Desa Simpati. Petani yang penghasilannya rendah memperoleh subsidi pupuk murah, dan petani yang penghasilannya tinggi memperoleh paket kursus teknologi pertanian.

Tabel 1.29

Hasil	Banyaknya
2,1 – 3,0	15
3,1 – 4,0	20
4,1 – 5,0	30
5,1 – 6,0	25
6,1 – 7,0	10

a. Subsidi pupuk murah diberikan kepada petani yang hasil panennya kurang dari 3,25 kuintal. Berapa banyak petani yang akan memperoleh subsidi pupuk murah tersebut?
b. Kursus teknologi pertanian diberikan kepada 50% tertinggi petani yang hasil panennya di atas rataan. Berapa hasil panen terendah dari kelompok petani yang memperoleh hibah kursus teknologi pertanian?

Penyelesaian:

Kita lengkapi dahulu data di atas,

Tabel 1.30

Nilai	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
2,1 – 3,0	2,55	15	38,25
3,1 – 4,0	3,55	20	72
4,1 – 5,0	4,55	30	136,5
5,1 – 6,0	5,55	25	138,75
6,1 – 7,0	6,55	10	65,5
		$\sum f_i = 100$	$\sum f_i \cdot x_i = 451$

Nilai rataan adalah $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{451}{100} = 4{,}51$.

a. Dari Tabel 1.30, terlihat bahwa petani yang hasil panennya kurang dari dari 3,25 kuintal sebanyak 15 orang. Jadi, petani yang memperoleh subsidi pupuk murah sebanyak 15 orang.
b. Petani yang memperoleh hasil panen di atas 4,51 kuintal adalah 65 orang. Petani yang memperoleh hibah kursus teknologi pertanian sebanyak $65 \times 50\% = 32{,}5 \approx 33$ orang. Karena yang dipilih adalah dari hasil panen tertinggi, maka hasil panen terrendah yang memperoleh hibah kursus teknologi pertanian adalah 5,55 kuintal.

□

Menghitung rataan dengan rataan sementara

Terdapat cara lain yang lebih efektif untuk menghitung rataan untuk data terkelompok, yaitu dengan memilih rataan sementara. Dengan cara ini kita tidak perlu menghitung nilai $\sum f_i x_i$ yang pada umumnya nilainya besar. Rataan sementara yang dipilih adalah titik tengah dari sembarang kelas interval. Misalkan $\overline{x}_s$ adalah rataan sementara yang dipilih, dan d_i adalah simpangan dari setiap nilai titik tengah terhadap $\overline{x}_s$, yaitu $d_i = x_i - \overline{x}_s$. Rataan sebenarnya kita peroleh dengan menjumlahkan rataan sementara dengan simpangan rataan, yaitu:

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \tag{1.4}$$

Contoh 1.4.5

Tentukan rataan dengan rataan sementara dari data berikut ini.

Tabel 1.31

Nilai	Frekuensi (f_i)
30 – 34	2
35 – 39	4
40 – 44	10
45 – 49	16
50 – 54	8

Penyelesaian:

- Jika kita ambil rataan sementara $\overline{x}_s = 42$, maka dari data di atas diperoleh:

Tabel 1.32

Nilai	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	Simpangan (d_i)	$f_i \cdot d_i$
30 – 34	32	2	–10	–20
35 – 39	37	4	–5	–20
40 – 44	42	10	0	0
45 – 49	47	16	5	80
50 – 54	52	8	10	80
		$\sum f_i = 40$		$\sum f_i \cdot d_i = 120$

Dalam hal ini, $d_1 = 32 - 42 = -10$, $d_2 = 37 - 42 = -5$, $d_3 = 42 - 42 = 0$, dan seterusnya. Dengan demikian,

$$\overline{x} = \overline{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 42 + \frac{120}{40} = 45$$

- Misalkan jika kita ambil rataan sementara $\bar{x}_s = 37$, maka diperoleh:

Tabel 1.33

Nilai	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	Simpangan (d_i)	$f_i \cdot d_i$
30 – 34	32	2	–5	–10
35 – 39	37	4	0	0
40 – 44	42	10	5	50
45 – 49	47	16	10	160
50 – 54	52	8	15	120
		$\sum f_i = 40$		$\sum f_i \cdot d_i = 320$

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 37 + \frac{320}{40} = 45$$

Kerjakan contoh ini dengan cara sebelumnya, kemudian bandingkan hasilnya. Bagaimana hasilnya, sama?

□

Tugas Mandiri

Dengan menggunakan rumus rataan, buktikan bahwa $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$.

1.4.2 Modus

Misalkan kita mempunyai kumpulan data:

2	3	5	4	6
4	3	4	8	10

maka nilai data 3 mempunyai frekuensi 2 dan 4 mempunyai frekuensi 3, sedangkan frekuensi yang lainnya 1. Karena 4 mempunyai frekuensi tertinggi, maka dalam statistik data 4 disebut modus dari kumpulan data di atas. Jadi, modus (disimbolkan dengan *Mo*) didefinisikan sebagai angka statistik yang mempunyai frekuensi tertinggi.

Contoh 1.4.6

Tentukan modus dari data ulangan Matematika berikut.

a. Kumpulan data:

2, 3, 7, 4, 8, 6, 12, 9

tidak mempunyai modus karena tidak satupun data yang mempunyai frekuensi tertinggi.

b. Kumpulan data:

23, 20, 25, 25, 23, 27, 26

mempunyai modus 23 dan 25.

Dari uraian dan contoh di atas kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat data statistik yang tidak mempunyai modus, ada yang mempunyai satu modus, dan ada yang mempunyai lebih dari satu modus.

Untuk data terkelompok, nilai modus ditentukan oleh rumus berikut.

$$Mo = Bb + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right) \tag{1.5}$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang mempunyai frekuensi tertinggi
b_1 : selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sebelumnya
b_2 : selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sesudahnya
p : panjang kelas interval

Contoh 1.4.7

Tentukan modus dari data terkelompok berikut.

Tabel 1.34

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)
42 – 48	3
49 – 55	10
56 – 62	20
63 – 69	13
70 – 76	4

Penyelesaian:

Dari kumpulan data di atas, kita peroleh:

$Bb = 56 - 0{,}5 = 55{,}5$ $\quad b_1 = 20 - 10 = 10$ $\quad b_2 = 20 - 13 = 7$ $\quad p = 7$

Dengan rumus (1.5), kita peroleh modusnya,

$$Mo = Bb + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right) = 55{,}5 + 7\left(\frac{10}{10 + 13}\right) = 58{,}54$$

□

1.4.3 Median

Median adalah data yang terletak di tengah setelah data itu disusun menurut urutan nilainya sehingga membagi dua sama besar. Notasi untuk ukuran pemusatan ini adalah *Me*. Nilai *Me* sering dipakai untuk menjelaskan kecenderungan pemusatan data apabila pada data tersebut ditemukan nilai-nilai yang ekstrim, sehingga tidak cukup dijelaskan melalui nilai rataannya saja.

Jika banyak data ganjil, maka *Me* merupakan nilai data yang terletak di tengah-tengah. Misalkan untuk data yang sudah terurut:

$$2,\ 3, 5,\ 8,\ 11,\ 13,\ 20$$

Me adalah 8.

Jika banyak data genap, maka setelah data diurutkan, *Me* diambil sebagai rataan dari dua data tengah. Misalkan untuk data yang sudah terurut:

$$3,\ 3, 4,\ 5,\ 5,\ 6, 7,\ 8$$

maka

$$Me = \frac{5+5}{2} = 5$$

Secara umum, jika kita mempunyai n data yang sudah terurut dari yang terkecil hingga yang terbesar,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

maka median dari kumpulan data itu ditentukan dengan cara berikut.

(a) Jika n adalah bilangan ganjil, maka median adalah nilai data ke-$\frac{n+1}{2}$, ditulis: $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$.

(b) Jika n adalah bilangan genap, maka *Me* adalah rataan dari nilai data ke-$\frac{n}{2}$ dan nilai data ke-$\frac{n}{2}+1$, ditulis: $Me = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)$. (1.6)

Contoh 1.4.8

Data penjualan suatu toko *hand phone* dalam dua minggu berturut-turut adalah:

a. Minggu pertama: 10, 8, 12, 9, 9, 12, 8, 10, 4.

b. Minggu kedua: 20, 3, 9, 11, 4, 12, 1, 10, 9, 12, 8, 10.

Berapakah median kumpulan data di atas setiap minggunya?

Penyelesaian:

a. Ukuran kumpulan data minggu pertama adalah $n = 9$ (ganjil), dan setelah diurutkan menjadi:

$$4, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 12, 12$$

Oleh karena itu, $Me = x_{\frac{n+1}{2}} = x_5 = 9$.

b. Ukuran kumpulan data minggu kedua adalah $n = 12$ (genap), dan setelah diurutkan menjadi:

$$1, 3, 4, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 20$$

Jadi, $Me = \frac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}(x_6 + x_7) = \frac{1}{2}(9+10) = 9{,}5$.

□

Untuk data terkelompok, median dapat kita hitung dengan rumus:

$$Me = Bb + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) \quad (1.7)$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang memuat Me
f_m : frekuensi kelas interval yang memuat Me
F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat Me
p : panjang kelas interval

Contoh 1.4.9

Hitunglah median untuk data terkelompok berikut.

Tabel 1.35

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frekuensi Kumulatif
42 – 48	3	3
49 – 55	10	13
56 – 62	20	33
63 – 69	13	46
70 – 76	4	50
Jumlah	50	

Penyelesaian:

Karena ukuran datanya adalah 50, maka Me terletak pada kelas interval 56 – 62, sehingga

$Bb = 56 - 0{,}5 = 55{,}5$ $\quad f_m = 20$ $\quad F = 13$ $\quad p = 7$

Oleh karena itu,

$$Me = Bb + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 55{,}5 + 7\left(\frac{\frac{50}{2} - 13}{20}\right) = 59{,}7$$

□

Latihan 1.4

1. Tentukan rataan dari setiap kelompok data berikut.
   a. 9, 7, 12, 6, 14, 8, 10, 11
   b. 15, 18, 16, 20, 17, 16, 17, 19, 16, 15

2. Tentukan median dan modus dari setiap kelompok data berikut.
   a. 8, 7, 6, 7, 5, 6, 8, 9, 8, 9
   b. 22, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 22, 23, 24, 25, 27, 25

3. Tentukan rataan dari setiap data terkelompok berikut.

a. Tabel 1.36

Nilai	Frekuensi
42 – 46	1
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	8
67 – 71	4
72 – 76	2
	40

b. Tabel 1.37

Berat	Frekuensi
61 – 65	2
66 – 70	5
71 – 75	8
76 – 80	22
81 – 85	6
86 – 90	5
91 – 95	2
	50

4. Tentukan median dan modus data pada soal no. 3.
5. Hitunglah nilai rataan data terkelompok berikut dengan dua cara.

Tabel 1.38

Kelas Interval	f_i
20 – 24	3
25 – 29	8
30 – 34	13
35 – 39	20
40 – 44	17
45 – 49	9
Jumlah	70

6. *Peternakan*

   Suatu percobaan jenis makanan yang diberikan kepada ayam pedaging memberikan kenaikan berat badan seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.39

Minggu ke-	Berat Badan (g)
1	250
2	490
3	990
4	1.890
5	3.790

   Berapakah rataan kenaikan berat badan ayam tiap minggu?

7. Nilai rataan kelas A adalah 8,5 dan nilai rataan kelas B adalah 6,5. Perbandingan jumlah siswa kelas $A : B = 5 : 4$. Berapakah nilai rataan kelas A dan B?

8. Tabel di bawah ini adalah nilai hasil ujian bahasa Inggris. Peserta dinyatakan lulus jika nilainya lebih besar 60. Berapakah banyak siswa yang lulus?

Tabel 1.40

Nilai	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	8
41 – 50	4
51 – 60	6
61 – 70	8
71 – 80	6
81 – 90	4

9. Nilai rataan ujian bahasa Indonesia dari 40 siswa SMA adalah 70. Jika seorang siswa yang nilainya 100 dan 3 orang siswa yang masing-masing nilainya 30 tidak diikutkan dalam perhitungan, berapa nilai rataannya?

10. Rataan jam belajar harian siswa laki-laki dan perempuan dari suatu sekolah masing-masing adalah 3 jam dan 7 jam. Jika rataan jam belajar harian seluruh siswa sekolah tersebut adalah 6 jam, dan jumlah siswa sekolah tersebut adalah 800 orang, berapakah jumlah siswa laki-laki?

1.5 Ukuran Letak

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari tentang median. Median adalah nilai statistik yang terletak di tengah-tengah kelompok data setelah data kita urutkan. Dengan demikian nilai ini membagi dua sama banyak kelompok data. Dengan kata lain, median adalah ukuran perduaan.

1.5.1 Kuartil

Telah kita pahami bahwa median adalah ukuran perduaan. Selanjutnya, kita mempunyai 3 buah nilai statistik yang membagi kelompok data yang terurut menjadi 4 bagian yang sama banyak. Ketiga nilai ini kita sebut sebagai kuartil,

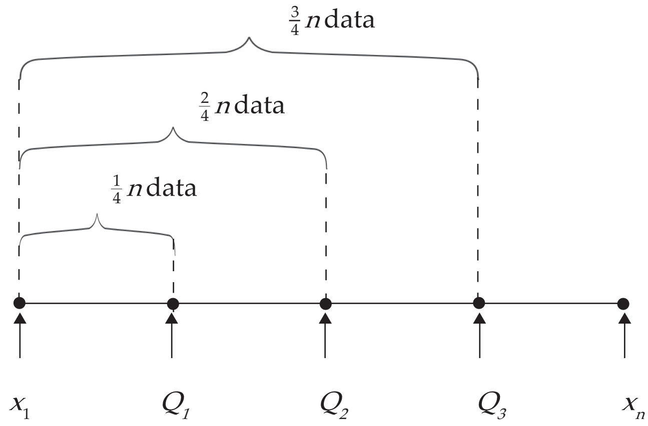
- kuartil pertama atau kuartil bawah dinotasikan dengan Q_1,
- kuartil kedua atau kuartil tengah dinotasikan dengan Q_2, dan
- kuartil ketiga atau kuartil atas dinotasikan dengan Q_3.

Oleh karena itu, *kuartil* adalah ukuran perempatan, dengan $Q_2 = Me$.

Misalkan kita mempunyai suatu kumpulan data dengan ukuran n yang telah diurutkan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Letak dari Q_1, Q_2, dan Q_3 dari kumpulan data ini dapat kita cermati ilustrasi pada Gambar 1.12 berikut.



Gambar 1.12 Letak Kuartil-kuartil

Dengan memperhatikan Gambar 1.12, maka dapat kita simpulkan bahwa:

- kuartil pertama (Q_1) terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{1}{4}(n+1)$,
- kuartil kedua (Q_2) terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{2}{4}(n+1)$,
- kuartil ketiga (Q_3) terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{3}{4}(n+1)$.

Secara umum, untuk $i = 1, 2, 3$,

letak kuartil Q_i terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{i}{4}(n+1)$

Jika nilai urutan yang kita peroleh bukan bilangan asli, maka untuk menghitung kuartil kita gunakan pendekatan interpolasi linear. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.5.1

Tentukan nilai kuartil-kuartilnya dari kelompok data:

65, 28, 90, 70, 45, 37, 45, 65, 70, 85

Penyelesaian:

Kita urutkan dahulu kelompok data tersebut,

28 37 • 45 45 65 • 65 70 70 • 85 90.

Q_1 Q_2 Q_3

Ukuran kelompok data adalah $n = 10$, maka Q_1 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{1}{4}(10+1) = 2\frac{3}{4}$. Karena nilai urutan bukan bilangan asli, maka Q_1 kita tentukan dengan interpolasi linear,

$$Q_1 = \text{nilai data ke-2} + \tfrac{3}{4}(\text{nilai data ke-3} - \text{nilai data ke-2})$$

$$= 37 + \tfrac{3}{4}(45 - 37) = 43$$

Letak kuartil kedua Q_2 pada nilai urutan yang ke-$\frac{1}{2}(10+1)=5\frac{1}{2}$ (bukan bilangan asli), sehingga:

$$Q_2 = \text{nilai data ke-5} + \tfrac{1}{2}(\text{nilai data ke-6} - \text{nilai data ke-5})$$
$$= 65+\tfrac{1}{2}(65-65)=65$$

Kuartil Q_3 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{3}{4}(10+1)=8\frac{1}{4}$ (bukan bilangan asli), sehingga:

$$Q_3 = \text{nilai data ke-8} + \tfrac{1}{4}(\text{nilai data ke-9} - \text{nilai data ke-8})$$
$$= 70+\tfrac{1}{4}(85-70)=71\tfrac{1}{4}$$

Makna dari kuartil-kuartil ini adalah bahwa terdapat 25% dari banyak data yang nilainya di bawah 43, terdapat 50% dari banyak data nilainya di bawah 65, dan 75% dari banyak data nilainya di bawah $71\frac{1}{4}$.

□

Untuk data terkelompok kita mempunyai rumus kuartil yang merupakan pengembangan dari rumus median (1.7), yaitu:

$$Q_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{4}n - F}{f_{Q_i}}\right) \qquad (1.8)$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang memuat Q_i

f_{Q_i} : frekuensi kelas interval yang memuat Q_i

F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat Q_i

p : panjang kelas interval

Contoh 1.5.2

Diketahui data terkelompok seperti tabel berikut.

Tabel 1.41

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frek. Kum. (f_k)
10 – 14	2	2
15 – 19	3	5
20 – 24	6	11
25 – 29	7	18
30 – 34	8	26
35 – 39	5	31
40 – 44	11	42
45 – 49	10	52
50 – 54	12	64
55 – 59	4	68
60 – 64	8	76
65 – 69	2	78
70 – 74	2	80
	$\sum f_i = 80$	

Tentukan Q_1 dan Q_3.

Penyelesaian:

Karena ukuran kelompok data adalah $n = 80$, maka Q_1 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{1}{4}(80+1) = 20\frac{1}{4}$ pada kolom frekuensi kumulatif, nilai ini terletak pada kelas interval 30 – 34. Dalam hal ini,

$$Bb = 29{,}5 \qquad p = 5 \qquad F = 18 \qquad f_{Q_i} = 8$$

Jadi,

$$Q_1 = Bb + p\left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f_{Q_1}}\right) = 29{,}5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}\times 80 - 18}{8}\right) = 30{,}75$$

Q_3 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{3}{4}(80+1) = 60\frac{3}{4}$ pada kolom frekuensi kumulatif, yang terletak pada kelas interval 50 – 54. Kita peroleh:

$$Q_3 = Bb + p\left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f_{Q3_1}}\right) = 49{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}\times 80 - 52}{8}\right) = 52{,}83$$

Jadi, Q_1= 30,75 dan Q_3= 52,83.

□

1.5.2 Desil dan Persentil

Jika data yang sudah terurut dibagi menjadi 10 bagian yang sama banyak, maka tiap bagian itu disebut desil, sehingga akan terdapat 9 desil, $D_1, D_2, \ldots, D_9$. Seperti halnya pada kuartil, dengan cara yang serupa kita mempunyai rumus untuk menentukan letak desil D_i, yaitu:

$$D_i \text{ terletak pada nilai urutan yang ke-}\frac{i}{10}(n+1),\ i = 1, 2, \cdots, 9$$

Seperti pada kuartil, jika nilai urutan yang kita peroleh bukan bilangan asli, maka untuk menghitung desil dan persentil kita gunakan pendekatan interpolasi linear.

Contoh 1.5.3

Diketahui kelompok data tersebar:

7, 9, 12, 12, 12, 16, 18, 21, 21, 22, 23, 23, 23,

28, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 35, 35, 35, 38, 39, 40

Tentukan D_7 dan P_{62}.

Penyelesaian:

Ukuran data adalah $n = 26$. D_7 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{7}{10}(26+1) = 18\frac{1}{5}$ (bukan bilangan asli), maka untuk menentukan desil kita gunakan pendekatan interpolasi linear,

D_7 = nilai data ke-18 + $\frac{1}{5}$ (nilai data ke-19 – nilai data ke-18)

= 33 + $\frac{1}{5}$ (34 – 33) = 33,2

P_{62} terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{62}{100}(26+1)=16\frac{37}{50}$ (bukan bilangan asli), sehingga:

P_{62} = nilai data ke-16 + $\frac{37}{50}$ (nilai data ke-17 – nilai data ke-16)

$= 29 + \frac{37}{50}(32 - 29) = 31,22$

Makna dari $D_7 = 33,2$ adalah terdapat 70% dari banyak data yang nilainya di bawah 33,2. Sedangkan $P_{62} = 31,22$ bermakna bahwa 62% dari banyak data nilainya di bawah 31,22.

□

Untuk data terkelompok nilai D_i dan P_i diberikan oleh:

$$D_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{10}n - F}{f_{D_i}}\right),\quad i = 1,2,\ldots,9 \tag{1.9}$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang memuat D_i
f_{D_i} : frekuensi kelas interval yang memuat D_i
F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat D_i
p : panjang kelas interval

dan

$$P_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{100}n - F}{f_{P_i}}\right),\quad i = 1,2,\ldots,99 \tag{1.10}$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang memuat P_i
f_{P_i} : frekuensi kelas interval yang memuat P_i
F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat P_i
p : panjang kelas interval

Contoh 1.5.4

Diketahui data terkelompok dengan tabel distribusi frekuensi seperti berikut.

Tabel 1.42

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frek. Kum. (f_k)
11 – 17	2	2
18 – 24	1	3
25 – 31	4	7
32 – 38	13	20
39 – 45	14	34
46 – 52	17	51
53 – 59	15	66
60 – 66	6	72
67 – 73	3	75
74 – 80	5	80

Hitunglah D_8 dan P_{87}.

Penyelesaian:

Ukuran data adalah n = 80. Nilai D_8 terletak pada nilai urutan yang ke-$\frac{8}{10}(80+1) = 64\frac{4}{5}$ pada kolom frekuensi kumulatif , yaitu pada kelas interval 53 – 59, sehingga:

$$Bb = 52{,}5 \qquad p = 7 \qquad F = 51 \qquad f_{D_8} = 15$$

$$D_8 = Bb + p\left(\frac{\frac{8}{10}n - F}{f_{D_8}}\right) = 52{,}5 + 7\left(\frac{64-51}{15}\right) = 58{,}56$$

Nilai P_{87} terletak pada kelas interval 60 – 66 karena nilai ini pada kolom frekuensi kumulatif pada urutan ke-$\frac{87}{100}(80+1) = 70\frac{47}{100}$. Dengan:

$$Bb = 59{,}5 \qquad p = 7 \qquad F = 66 \qquad f_{P_{87}} = 6$$

$$P_{87} = Bb + p\left(\frac{\frac{87}{100}n - F}{f_{P_{87}}}\right) = 59{,}5 + 7\left(\frac{69{,}6-66}{6}\right) = 63{,}7$$

Jadi, D_8 = 58,56 dan P_{87} = 63,7.

□

Latihan 1.5

1. Diketahui data tersebar:

   50 21 49 26 60 30 77 37 85 43 45 78
   25 69 52 59 29 65 21 72 40 33 77 45

   Tentukan Q_3, D_5, dan P_{72}.

2. Nilai ulangan Geografi dari 15 orang murid disajikan dalam data berikut.

   7 9 7 5 8 9 5 4 6 6 7 8 7 8 6

   a. Tentukan rataan dan mediannya.
   b. Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3.
   c. Bandingkan nilai rataan terhadap median. Apa yang dapat Anda simpulkan?

3. Jelaskan arti dari $Q_3 = 16$, $D_6 = 63$, dan $P_{78} = 32$.

4. Suatu bilangan terdiri dari 15 unsur. Tentukan pada unsur ke berapa letak Q_3, D_6, dan P_{81}.

5. Diketahui tabel distribusi berikut ini.

   Tabel 1.43

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)
30 – 39	2
40 – 49	12
50 – 59	22
60 – 69	20
70 – 79	14
80 – 89	4
90 – 99	1

   Hitunglah nilai dari Q_3, D_6, dan P_{81}.

6. Hasil tes dari 100 orang pelamar pekerjaan diberikan oleh tabel berikut.

   Tabel 1.44

Nilai Tes	53	61	72	85	94
Frekuensi	12	22	25	32	9

   Pelamar yang diterima 45%, berapakah nilai seseorang agar diterima?

7. *Ekonomi*

   Berikut ini adalah data besar pengeluaran (dalam ribuan rupiah) untuk internet dalam satu minggu dari 30 orang siswa suatu SMA.

30	40	35	25	35	50	40	45	40	20
20	35	45	25	40	30	45	45	25	33
20	20	20	45	35	34	15	30	25	40

   a. Tentukan kuartil bawah, kuartil tengah, dan kuartil atas.
   b. Tentukan desil ke-3 dan desil ke-8.

8. *Perdagangan*

Nilai ekspor-impor (dalam milyar dollar AS) Indonesia melalui Tanjung Priok untuk periode tahun 2001 – 2006 diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1.45

Tahun	Ekspor	Impor
2001	17,5	15
2002	17,5	15
2003	18	15
2004	22	22
2005	24	24
2006	26	24

Sumber: Badan Pusat Statistik (BPS), dikutipdari Kompas, 19 Maret 2008

a. Tentukan rataan, Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data ekspor-impor di atas.
b. Berdasarkan jawaban (a), bandingkan statistik dari kedua kumpulan data tersebut.

1.6 Ukuran Penyebaran (Dispersi)

Sebagaimana telah kita pelajari pada bagian sebelumnya, nilai rataan merupakan salah satu dari kecenderungan memusat yang banyak dipakai. Meskipun ia adalah wakil dari semua nilai data, tetapi ketepatan nilai itu masih dipertanyakan. Sebagai pelengkap informasi data itu perlu pertimbangan nilai penyimpangan, yaitu besarnya penyimpangan-penyimpangan antara nilai data dengan nilai rataan.

1.6.1 Rentang dan Simpangan Kuartil

Pada data kuantitatif terdapat nilai data terkecil dan nilai data terbesar, kedua nilai masing-masing disebut sebagai statistik minimum (x_{min}) dan statistik maksimum (x_{maks}). Jarak antara kedua nilai itu disebut rentang atau *range* yang diberi simbol "R". Nilai R inilah yang disebut penyebaran dengan rentang,

$$R = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} \tag{1.11}$$

Selain rentang antara kedua nilai ekstrim dalam suatu kelompok data dikenal juga rentang antar-kuartil. Rentang antar-kuartil disebut hamparan (disimbolkan dengan H) didefinisikan sebagai selisih antara nilai Q_3 dengan nilai Q_1.

$$H = Q_3 - Q_1 \tag{1.12}$$

Selain hamparan terdapat nilai penyebaran lain, yaitu semikuartil atau simpangan kuartil, disimbolkan dengan Q_d, yang didefinisikan sebagai

$$Q_d = \tfrac{1}{2}H = \tfrac{1}{2}(Q_3 - Q_1) \tag{1.13}$$

Dengan Q_d ini kita dapat menjustifikasi suatu data, termasuk data yang konsisten (data normal) atau tidak dalam kelompoknya. Setiap nilai data yang terletak di dalam interval $[Q_1 - 3Q_d, Q_3 + 3Q_d]$ dikatakan konsisten atau data normal. Nilai data dalam interval ini memiliki informasi yang relatif sama dengan data-data lainnya dalam kelompok tersebut. Setiap nilai data yang terletak di luar interval $[Q_1 - 3Q_d, Q_3 + 3Q_d]$ kita katakan tidak konsisten atau data pencilan. Tidak selamanya data yang tidak konsiten dalam kelompoknya itu jelek, justru barangkali data tersebut memberikan informasi yang sangat kita perlukan.

Terdapat beberapa kemungkinan penyebab munculnya data pencilan dalam suatu kelompok data, antara lain:

- Terjadinya kesalahan ketika mencatat data.
- Terjadinya kesalahan ketika melakukan pengukuran, kesalahan membaca alat ukur, atau kesalahan menggunakan alat ukur.
- Terjadi memang karena data itu diperoleh dari objek yang menyimpang atau aneh (anomali).

Contoh 1.6.1

Panitia penerimaan tentara menimbang 14 calon yang masing-masing beratnya (dalam kg):

70	56	61	72	69	67	54
60	65	57	66	62	63	59

Untuk kumpulan data ini,

a. Tentukan rentang, hamparan, dan simpangan kuartilnya.

b. Jika salah satu panitia menimbang dua orang calon masing-masing beratnya 45 kg dan 81 kg, apakah kedua nilai data ini konsisten dalam kumpulan data yang diperoleh terdahulu?

Penyelesaian:

Dari kelompok data ini kita peroleh (coba Anda hitung sendiri):

$Q_1 = 59{,}5$ $\quad Q_2 = 62{,}5$ $\quad Q_3 = 67{,}5$ $\quad x_{\text{min}} = 54$ $\quad x_{\text{maks}} = 72$

Berdasarkan hasil ini, maka kita peroleh:

a. Rentang, $R = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} = 72 - 54 = 18$

Hamparan, $H = Q_3 - Q_1 = 67{,}5 - 59{,}5 = 8$

Simpangan kuartil, $Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

b. Kita tentukan dahulu interval kekonsistenan dari kelompok data ini,

$$Q_1 - 3Q_d = 59{,}5 - 12 = 47{,}5 \quad \text{dan} \quad Q_3 + 3Q_d = 67{,}5 + 12 = 79{,}5$$

Jadi, interval kekonsistenan adalah [47,5 , 79,5]. Karena nilai data 45 dan 81 di luar interval ini, maka kedua nilai data tidak konsisten.

□

1.6.2 Diagram Kotak-Garis

Untuk menjelaskan letak relatif ukuran pemusatan median dan ukuran letak dari data dapat ditunjukkan dengan diagram kotak-garis. Diberi nama diagram kotak-garis karena diagram ini tersusun atas sebuah kotak persegi panjang dalam arah horizontal dan garis yang berupa ekor ke kiri dan ke kanan, yang digambarkan di atas garis berskala.

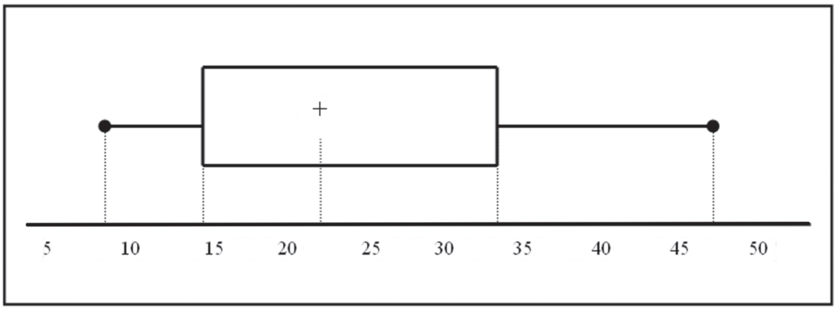
Panjang kotak sama dengan rentang antar-kuartil atau hamparan, $H = Q_3 - Q_1$. Sisi tegak bagian kiri kotak menandakan letak dari Q_1 dan sisi tegak bagian kanan menandakan letak kuartil ketiga (Q_3). Kuartil kedua atau median (Q_2) berada di dalam kotak yang diberi tanda plus (+).

Batas ujung ekor kiri dari garis mendatar arah ke kiri tepat berada pada nilai data terkecil, dan batas ujung kanan dari garis mendatar ke kanan tepat berada pada nilai data terbesar. Ketentuan ini berlaku apabila semua nilai data yang normal (bukan pencilan). Jika kelompok data memuat pencilan, maka pencilan itu berada di luar kedua garis dan diberi tanda asteris (*).

Untuk memahami penyusunan diagram kotak-garis, kita perhatikan contoh berikut ini. Misalkan diketahui kelompok data tersebar yang berukuran $n = 20$:

9	9	10	13	14	17	19	19	21	22
23	25	25	29	33	35	35	39	43	47

Dari kelompok data ini kita peroleh nilai $Q_1 = 14\frac{3}{4}$, $Me = Q_2 = 22\frac{1}{2}$, dan $Q_3 = 34\frac{1}{2}$. Diagram kotak-garis diperlihatkan pada Gambar 1.13.



Gambar 1.13 Diagram Kotak-Garis

Sisi kiri dari kotak menandakan letak dari $Q_1 = 14\frac{3}{4}$, tanda (+) menandakan letak $Me = Q_2 = 22\frac{1}{2}$, dan sisi kanan kotak menandakan letak dari $Q_3 = 34\frac{1}{2}$.

Ekor ke kanan lebih panjang menyatakan bahwa nilai-nilai di atas Q_3 lebih beragam. Sedangkan ekor lebih pendek menggambarkan bahwa nilai-nilai di bawah Q_1 mengumpul di sekitar data terkecil dan Q_1.

Diagram kotak-garis dapat digambarkan secara bertingkat untuk menjelaskan dua kelompok data sekaligus pada garis skala yang sama.

Contoh 1.6.2

Berikut ini adalah kumpulan data yang diperoleh dari hasil penimbangan berat badan terhadap 30 calon tentara, yang dilakukan oleh dua orang panitia penerimaan tentara.

Hasil penimbangan Panitia A (dalam kg):

70	56	61	72	69	67	54	45
60	65	57	66	62	63	59	

Hasil penimbangan Panitia B (dalam kg):

60	56	61	58	46	67	54	65
65	60	64	57	62	63	59.	

Penyelesaian:

Kelompok data dari Panitia A mempunyai:

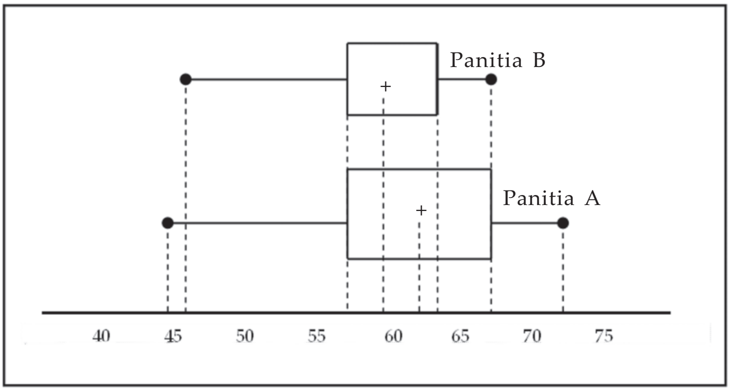
$Q_1 = 57$; $Q_2 = 62$; $Q_3 = 67$; $Q_d = 5$; $x_{min} = 45$; dan $x_{maks} = 72$.

Semua nilai data konsisten, kenapa?

Kelompok data dari Panitia B mempunyai:

$Q_1 = 57$; $Q_2 = 60$; $Q_3 = 64$; $Q_d = 3$; $x_{min} = 46$; dan $x_{maks} = 67$.

Nilai data 46 tidak konsisten, sehingga nilai ini adalah data pencilan, kenapa?

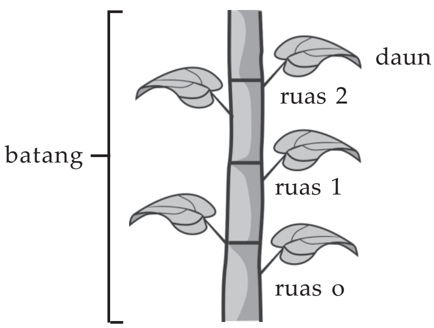


Gambar 1.14 Diagram Kotak-Garis Bersama

□

1.6.3 Diagram Batang-daun

Terdapat metode lain selain dengan diagram kotak garis untuk melihat ukuran pemusatan dan ukuran letak data, yaitu dengan diagram batang-daun. Disebut diagram batang-daun karena diagram ini menggunakan analogi antara hubungan batang dengan daun pada tumbuhan. Umumnya batang tumbuhan terbagi atas ruas-ruas, dan dari ruas-ruas ini tumbuh daun, meskipun ada ruas yang tidak berdaun.



Gambar 1.15 Batang dan Daun

Untuk memahami bagaimana cara menyajikan suatu kumpulan data dengan diagram batang-daun, misalkan diberikan kumpulan data yang berukuran $n = 24$ berikut ini.

6	7	16	20	25	25	28	29	32	35
36	38	39	45	45	51	52	53	53	53
54	56	57	60						

Langkah pertama adalah mengurutkan data mulai nilai data terkecil hingga nilai data terbesar. Kebetulan data di atas sudah urut, dengan nilai data terkecil adalah 6 dan nilai data terbesar adalah 60. Kemudian data kita kelompokkan ke dalam interval-interval, misalnya interval-interval adalah: 0 – 9, 10 – 19, 20 – 29, 30 – 39, 40 – 49, 50 – 59, 60 – 69.

Kolom Batang

Interval 0 – 9, 10 – 19, 20 – 29, 30 – 39, 40 – 49, 50 – 59, dan 60 – 69 dalam diagram batang berperan sebagai ruas-ruas dari suatu batang. Pada kolom batang, ruas-ruas itu hanya dituliskan angka puluhan saja. Misalnya:

- interval 0 – 9, angka yang ditulis pada kolom batang adalah 0,
- interval 10 – 19, angka yang ditulis pada kolom batang adalah 1, ..., dan seterusnya
- interval 60 – 69, angka yang ditulis pada kolom batang adalah 6.

Kolom Daun

Angka satuan pada nilai data dalam diagram batang-daun berperan sebagai daun. Penempatan nilai satuan pada kolom daun disesuaikan dengan nilai puluhannya atau nilai ruas pada kolom batang. Misalnya:

- nilai data 6 pada diagram batang-daun ditulis angka 0 pada kolom batang dan angka 6 pada kolom daun,
- nilai data 25 pada diagram batang-daun ditulis angka 2 pada kolom batang dan angka 5 pada kolom daun,
- nilai 53 pada diagram batang-daun ditulis angka 5 pada kolom batang dan angka 3 pada kolom daun, ..., dan seterusnya.

Kolom Frekuensi

Dalam diagram batang-daun, selain kolom batang dan kolom daun juga ada kolom frekuensi dan kolom frekuensi kumulatif. Pada kolom frekuensi dituliskan bilangan yang menyatakan banyak nilai data yang ada dalam interval yang bersangkutan. Sedangkan pada kolom frekuensi kumulatif dituliskan bilangan yang menyatakan banyak nilai data yang ada dalam interval yang bersangkutan ditambah dengan banyak nilai data yang ada dalam interval sebelumnya.

Dengan menggunakan istilah-istilah yang telah diuraikan di atas, maka diagram batang-daun dari kumpulan 24 nilai data tersebut seperti tampak pada Gambar 1.16.

Batang	Daun	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
0	67	2	2
1	6	1	3
2	05589	5	8
3	25689	5	13
4	55	2	15
5	12333467	8	23
6	0	1	24

Gambar 1.16 Diagram Batang-Daun

Dengan diagram batang-daun di atas, kita dengan mudah menentukan nilai median, kuartil bawah, dan kuartil atasnya. Untuk data di atas dengan $n = 24$, maka pada kolom frekuensi kumulatif tampak bahwa median terletak pada nilai urutan ke-$\frac{2}{4}(24+1)=12\frac{1}{2}$ (ruas batang 3). Karena nilai data pada urutan ke-12 adalah 38, maka dengan metode interpolasi diperoleh:

$$Me = Q_2 = 38 + \tfrac{1}{2}(39-38) = 38\tfrac{1}{2}$$

Q_1 terletak pada urutan ke-$\frac{1}{4}(24+1)=6\frac{1}{4}$ (ruas batang 2). Nilai data pada urutan ke-6 adalah 25, dengan interpolasi kita peroleh:

$$Q_1 = 25 + \tfrac{1}{4}(28-25) = 25\tfrac{3}{4}$$

Dengan cara yang serupa kita peroleh:

$$Q_3 = 53 + \tfrac{3}{4}(53-53) = 53$$

Diagram batang-daun dapat pula untuk membandingkan sifat-sifat yang melekat pada dua kelompok data. Dalam hal ini kita gunakan kolom batang bersama.

Contoh 1.6.3

Berikut ini kumpulan data nilai ujian 20 orang siswa kelas A dan 19 orang kelas B.

Nilai ujian 20 orang siswa kelas A:

85	54	78	57	88	98	66	69	75	70
78	56	82	46	60	88	60	92	96	89

Nilai ujian 19 orang siswa kelas B:

79	77	75	58	79	85	94	68	63	88
72	55	45	40	69	65	86	70	66	

a. Gambarlah diagram batang-daun bersama untuk kedua kelompok data di atas.
b. Tentukan median untuk masing-masing kumpulan data itu.
c. Tentukan nilai minimum dan nilai maksimum untuk masing-masing kumpulan data itu.
d. Berapa banyak siswa kelas A yang mempunyai nilai tidak kurang dari 80 dan berapa banyak untuk siswa kelas B?

Penyelesaian:

a. Diagram batang-daun bersama untuk kedua kumpulan data di atas diperlihatkan pada Gambar 1.17.

Kelas *A* Kelas *B*

Frekuensi Kumulatif	Daun	Frekuensi	Batang Bersama	Daun	Frekuensi	Frekuensi Kumulatif
1	6	1	4	04	2	2
4	764	3	5	58	2	4
8	9600	4	6	35689	5	9
12	8850	4	7	025799	6	15
17	98852	5	8	568	3	18
20	862	3	9	4	1	19

Gambar 1.17 Diagram Batang-Daun Bersama

b. Dengan memperhatikan pada masing-masing kolom frekuensi kumulatif kedua kelas, maka:
   - median kelas *A* terletak di antara data ke-10 dan ke-11, nilainya adalah:

$$\frac{1}{2}(75+78)=76\frac{1}{2}$$

   - median kelas *B* terletak pada urutan data ke 10, yang nilainya adalah 70.

c. Nilai minimum untuk kelas *A* adalah pada batang 4 dengan daun 6, yaitu 46, sedangkan nilai minimum untuk kelas *B* adalah pada batang 4 dengan daun 0, yaitu 40.
   Nilai maksimum untuk kelas *A* adalah pada batang 9 dengan daun 8, yaitu 98, sedangkan nilai maksimum untuk kelas *B* adalah pada batang 9 dengan daun 4, yaitu 94.

d. Banyak siswa yang mendapat nilai tidak kurang dari 80:
   Untuk kelas *A* adalah 8 orang, sedangkan untuk kelas *B* adalah 4 orang.

□

1.6.3 Rataan Simpangan, Ragam, dan Simpangan Baku

Jika kita mempunyai data, x_1, x_2, ..., x_n dengan rataan $\bar{x}$, maka kita dapat menentukan selisih dari setiap data dengan $\bar{x}$, sehingga diperoleh urutan data baru:

$$(x_1-\bar{x}),(x_2-\bar{x}),\ldots,(x_n-\bar{x})$$

Urutan data itu tentu ada yang positif atau negatif. Karena jarak atau selisih tidak membedakan nilai yang bertanda positif atau negatif, maka nilai data itu dapat kita ambil harga mutlaknya,

$$|x_1-\bar{x}|,|x_2-\bar{x}|,\ldots,|x_n-\bar{x}|$$

Jika urutan data di atas kita jumlahkan kemudian kita bagi dengan ukuran data (n), akan kita peroleh apa yang disebut rataan simpangan (RS),

$$RS=\frac{\sum|x_i-\bar{x}|}{n} \qquad (1.14)$$

dengan:

RS : rataan simpangan

$\bar{x}$: rataan

x_i : nilai data amatan ke-i

n : ukuran data.

Untuk data terkelompok rataan simpangan dirumuskan dengan:

$$RS = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} \tag{1.15}$$

dengan:

RS : rataan simpangan

$\bar{x}$: rataan

x_i : titik tengah kelas interval ke-i

f_i : frekuensi dari kelas interval ke-i

Kelemahan dari nilai rataan simpangan adalah kita bekerja dengan bilangan harga mutlak, sehingga kita tidak dapat membedakan data yang mempunyai rentang yang lebih besar dengan rentang yang kecil meskipun mempunyai rataan simpangan yang sama. Sebagai contoh,

$$\frac{|-2| + |7| + |4|}{3} = \frac{13}{3}$$

rentang data adalah 11. Tetapi lain halnya,

$$\frac{2 + 7 + 4}{3} = \frac{13}{3}$$

yang mempunyai rentang 5.

Untuk mengatasi kelemahan rataan simpangan, kita menggunakan simpangan baku, yang dinotasikan dengan S. Kuadrat dari simpangan baku disebut ragam atau variansi.

Misalkan $\bar{x}$ adalah rataan dari kelompok data, $x_1, x_2, ..., x_n$, maka ragam atau variansi dari kumpulan data itu ditentukan oleh rumus:

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \tag{1.16}$$

dengan:

S^2 : ragam atau variansi

$\bar{x}$: rataan

x_i : nilai data amatan ke-i

n : ukuran data

Sedangkan simpangan baku atau deviasi baku didefinisikan sebagai akar dari ragam, sehingga:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad (1.17)$$

Untuk data terkelompok simpangan baku diberikan oleh:

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n}} \qquad (1.18)$$

dengan:

S : simpangan baku
$\bar{x}$: rataan
x_i : titik tengah kelas interval ke-i
f_i : frekuensi kelas interval ke-i

Contoh 1.6.1

Misalkan diketahui data tersebar:

35, 47, 39, 45, 40, 32, 42

Tentukan rataan simpangan, ragam, dan simpangan bakunya.

Penyelesaian:

Dengan rumus (1.14), kita memperoleh rataan simpangan:

$$RS = \frac{|32-40| + |35-40| + |39-40| + |40-40| + |42-40| + |45-40| + |47-40|}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

Sedangkan ragam yang dapat kita peroleh dari rumus (1.16) adalah:

$$S^2 = \frac{(32-40)^2 + (35-40)^2 + (39-40)^2 + (40-40)^2 + (42-40)^2 + (45-40)^2 + (47-40)^2}{7} = \frac{168}{7} = 24$$

Jadi, simpangan bakunya adalah $s = \sqrt{24} = 4{,}9$.

□

Contoh 1.6.2

Hitung rataan simpangan dari kelompok data berikut.

Tabel 1. 46

Kelas Interval	f_i
30 – 34	2
35 – 39	6
40 – 44	10
45 – 49	16
50 – 54	6
	$\sum f_i = 40$

Penyelesaian:

Kita gunakan rumus (1.15) ,

Tabel 1.47

Kelas Interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
30 – 34	2	32	64	–12,25	12,25	24,5
35 – 39	6	37	222	–7,25	7,25	43,5
40 – 44	10	42	420	–2,25	2,25	22,5
45 – 49	16	47	752	2,75	2,75	44
50 – 54	6	52	312	7,75	7,75	46,5
Jumlah	40		1.770			181

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1.770}{40} = 44,25 \qquad RS = \frac{\sum f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{\sum f_i} = \frac{181}{40} = 4,525$$

Jadi, rataan simpangan adalah 4,525.

□

Contoh 1.6.3

Tentukan ragam dan simpangan baku dari kelompok data pada Contoh 1.6.2.

Penyelesaian:

Untuk menghitung ragam dan simpangan baku, kita gunakan rumus (1.18) ,

Tabel 1.48

Kelas Interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
30 – 34	2	32	64	–12,25	150,06	300,12
35 – 39	6	37	222	–7,25	52,56	315,36
40 – 44	10	42	420	–2,25	5,06	50,6
45 – 49	16	47	752	2,75	7,56	120,96
50 – 54	6	52	312	7,75	60,06	360,36
Jumlah	40		1.770			1.147,4

Kita peroleh,

$$S^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1.147,4}{40} = 28,685 \text{ dan } S = 5,36.$$

Jadi, ragam (S^2) = 28,685 dan simpangan baku (S) = 5,36.

□

Seperti pada perhitungan rataan yang dapat kita lakukan dengan menentukan lebih dahulu rataan sementara, simpangan baku dapat pula kita hitung dengan cara ini. Dengan metode ini, kita gunakan rumus

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n} \right)^2} \qquad (1.19)$$

dengan:

S : simpangan baku

f_i : frekuensi kelas interval ke-i

d_i : $x_i - \bar{x}$

Contoh 1.6.4

Tentukan simpangan baku dari data pada Contoh 1.6.3 dengan rataan sementara 42.

Penyelesaian:

Kita gunakan rumus (1.19),

Tabel 1.49

Kelas Interval	f_i	x_i	d_i	$f_i \cdot d_i$	$f_i \cdot d_i^2$
30 – 34	2	32	–10	–20	200
35 – 39	6	37	–5	–30	150
40 – 44	10	42	0	0	0
45 – 49	16	47	5	80	400
50 – 54	6	52	10	60	600
Jumlah	40			90	1.350

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{1350}{40} - \left(\frac{90}{40}\right)^2} = 5{,}36$$

Jadi, simpangan bakunya adalah S = 5,36, yang sama seperti pada Contoh 1.6.3

□

Tugas Mandiri

Untuk menambah wawasan Anda tentang statistika lebih lanjut, kunjungilah: http://id.wikipedia.org/wiki/statistic

Latihan 1.6

1. Hitung rentang, simpangan kuartil, rataan simpangan, dan simpangan baku dari kelompok data berikut.

Tabel 1.50

a.

Nilai	3	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	1	3	4	5	3	3	1

Tabel 1.51

b.

Tinggi	60	65	70	75	80	85	90
Banyak Anak	1	2	8	6	3	3	7

2. Hitung rataan simpangan dan simpangan baku dari data terkelompok berikut.

a. Tabel 1.52

Tinggi	f_i
151 – 155	5
156 – 160	8
161 – 165	22
166 – 170	12
171 – 175	3

b. Tabel 1.53

Kelas Interval	f_i
51 – 55	2
56 – 60	5
61 – 65	9
66 – 70	6
71 – 75	3

3. Hitung simpangan baku dari data-data pada soal no.2 dengan memakai rataan sementara.
4. Panjang papan diukur lima kali pengukuran dengan hasil pengukuran berbeda-beda, yaitu: 12,01 m, 11,97 m, 12,14 m, 11,97 m, 12,00 m. Tentukan interval yang memuat panjang papan sebenarnya.
5. Tentukan nilai data yang tidak konsisten dalam kelompoknya, dari kelompok data berikut ini.
   a. 4, 5, 5, 7, 8, 4, 6, 6, 9, 3, 9, 12, 20, 10
   b. 20, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 33, 32, 28, 29, 30, 30, 30
6. Tentukan nilai data yang tidak konsisten dalam kelompoknya, dari data pada soal no. 2.
7. Diberikan kelompok data berikut ini.

   71 66 77 63 69 63 52 84 73 64 56 61 59

   Buatlah diagram batang-daun untuk data di atas yang dilengkapi dengan kolom frekuensi dan kolom frekuensi kumulatif.
8. Tabel 1.54-a menyajikan data nilai Ujian Kursus Bahasa Inggris dari 10 orang peserta pada Lembaga Kursus Pioner. Tabel 1.54-b adalah data nilai Ujian Kursus Bahasa Inggris dari 15 orang peserta pada Lembaga Kursus Pelopor.

Tabel 1.54-a

No.	Writing	Reading	Listening
1.	63	45	36
2.	68	56	46
3.	55	63	60
4.	61	50	47
5.	66	51	53
6.	45	44	50
7.	55	42	35
8.	55	34	52
9.	46	58	41
10.	48	46	61

Tabel 1.54-b

No.	Writing	Reading	Listening
1.	79	70	78
2.	80	65	70
3.	77	78	75
4.	80	71	80
5.	72	68	60
6.	70	60	65
7.	83	70	71
8.	78	68	76
9.	72	73	86
10.	78	70	75
11.	72	63	70
12.	76	68	65
13.	72	65	60
14.	69	60	70
15.	62	56	85

a. Buatlah diagram batang-daun bersama untuk setiap kategori ujian Writing yang dicapai peserta kursus pada Lembaga Kursus Pioner dan peserta pada Lembaga Kursus Pelopor.
b. Ulangi pertanyaan pada soal (a), untuk nilai Reading.
c. Ulangi pertanyaan pada soal (a), untuk nilai Listening.
d. Dengan menggunakan diagram batang-daun yang Anda peroleh pada soal (a), (b), dan (c) di atas, hitunglah median-mediannya.
e. Seorang peserta dikatakan lulus kursus Bahasa Inggris apabila nilai untuk setiap kategori ujian nilainya tidak kurang dari 45. Berdasarkan ketentuan ini,
   1) Berapa persen peserta dari Lembaga Kursus Pioner yang tidak lulus?
   2) Adakah peserta dari Lembaga Kursus Pioner tidak lulus itu disebabkan oleh nilai Writing?
   3) Berapa peserta Lembaga Kursus Pioner yang tidak lulus akibat nilai Listening?
   4) Dari 15 peserta pada Lembaga Kursus Pelopor, adakah yang tidak lulus?
f. Berapakah nilai tertinggi yang dicapai untuk setiap kategori ujian untuk peserta pada Lembaga Kursus Pioner?
g. Ulangi pertanyaan (f) untuk peserta kursus pada Lembaga Kursus Pelopor.
h. Berapakah nilai terendah yang dicapai untuk setiap kategori ujian untuk peserta pada Lembaga Kursus Pioner?
i. Ulangi pertanyaan (h) untuk peserta pada Lembaga Kursus Pelopor.

9. *Entertainment*

Berikut ini adalah data rating acara sinetron laga (dalam ribuan) dari stasiun TV Merpati dan TV Rajawali selama tahun 2007.

Tabel 1.55

Bulan	TV Merpati	TV Rajawali
Januari	100	95
Februari	102	98
Maret	102	99
April	105	103
Mei	106	105
Juni	107	106
Juli	107	106
Agustus	108	108
September	110	109
Oktober	115	110
november	116	111
Desember	116	115

a. Buatlah diagram kotak-garis bersama dari dua kelompok data tersebut.
b. Bandingkan karakteristik dari kelompok data tersebut.

Rangkuman

1. Statistika adalah metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data, serta penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional.
2. Statistika dibedakan menjadi dua, yaitu statistika deskriptif dan statistika inferensi.
3. Populasi adalah keseluruhan anggota objek penelitian. Sampel adalah wakil dari anggota populasi yang diteliti langsung. Sampling adalah teknik atau cara pengambilan sampel.
4. Menurut sifatnya data dibedakan menjadi dua, yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Data kuantitatif dibedakan menjadi dua, yaitu data cacahan dan data ukuran.
5. Data dapat diasjikan dalam tabel atau diagram. Macam diagram: diagram batang, lingkaran, garis, diagram batang daun, digram kotak-garis, histogram, dan *ogive*.
6. Ukuran pemusatan (tendensi sentral) adalah rataan atau mean ($\bar{x}$), median (*Me*), dan modus (*Mo*). Rataan adalah jumlah semua nilai data yang diamati dibagi oleh ukuran data. Median adalah titik tengah data setelah data diurutkan. Modus adalah data yang sering muncul.
7. Termasuk ukuran letak adalah kuartil, desil, dan persentil. Kuartil adalah ukuran perduaan, desil adalah ukuran persepuluhan, dan persentil adalah ukuran perseratusan.
8. Termasuk ukuran penyebaran (dispersi) adalah rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku.

Math Info


Sumber: www.homeoint.org

Gambar 1.18
Gottfried Achenwall


Sumber: www.walter-scott.lib.ed.ac.uk

Gambar 1.19
Sir John Sinclair


Sumber: www.biometrica.tomsk.ru

Gambar 1.20
Ronald Fisher


Sumber: en.wikipedia.org

Gambar 1.21
Karl Pearson


Sumber: isi.cbs.nl

Gambar 1.22
William Sealey Gosset

Statistika

Penggunaan istilah statistika berakar dari istilah-istilah dalam bahasa Latin modern, *statisticum collegium* ("dewan negara") dan bahasa Italia, *statista* ("negarawan" atau "politikus").

Gottfried Achenwall (1749) menggunakan statistik dalam bahasa Jerman untuk pertama kalinya sebagai nama bagi kegiatan analisis data kenegaraan, dengan mengartikannya sebagai "ilmu tentang negara (*state*)". Pada awal abad ke-19 telah terjadi pergeseran arti menjadi "ilmu mengenai pengumpulan dan klasifikasi data". Sir John Sinclair memperkenalkan nama (*statistics*) dan pengertian ini ke dalam bahasa Inggris. Jadi, statistika secara prinsip mula-mula hanya mengurus data yang dipakai lembaga-lembaga administratif dan pemerintahan. Pengumpulan data terus berlanjut, khususnya melalui sensus yang dilakukan secara teratur untuk memberi informasi kependudukan yang berubah setiap saat.

Pada abad ke-19 dan awal abad ke-20, statistika mulai banyak menggunakan bidang-bidang dalam matematika, terutama probabilitas. Cabang statistika yang pada saat ini sangat luas digunakan untuk mendukung metode ilmiah, statistika inferensi, dikembangkan pada paruh kedua abad ke-19 dan awal abad ke-20 oleh Ronald Fisher (peletak dasar statistika inferensi), Karl Pearson (metode regresi linear), dan William Sealey Gosset (meneliti problem sampel berukuran kecil). Penggunaan statistika pada masa sekarang dapat dikatakan telah menyentuh semua bidang ilmu pengetahuan, mulai dari astronomi hingga linguistika. Bidang-bidang ekonomi, biologi dan cabang-cabang terapannya, serta psikologi banyak dipengaruhi oleh statistika dalam metodologinya. Akibatnya lahirlah ilmu-ilmu gabungan, seperti ekonometrika, bio-metrika (atau biostatistika), dan psikometrika.

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Dari rataan, median, modus, dan kuartil, yang merupakan ukuran pemusatan adalah ... .
   A. rataan, median, dan modus
   B. rataan, median, dan kuartil
   C. rataan, modus, dan kuartil
   D. median, modus, dan kuartil
   E. rataan, median, modus, dan kuartil

2. Simpangan kuartil dari data:

   5 6 a 3 7 8

   adalah $1\frac{1}{2}$. Jika median data $5\frac{1}{2}$, maka rataan data adalah ... .
   A. 4
   B. $5\frac{1}{2}$
   C. 5
   D. $4\frac{1}{2}$
   E. 6

3. Rata-rata penghasilan setiap hari dari penduduk di Desa Ramah Hati adalah Rp25.000,00. Yang dimaksud dengan kata rata-rata dalam kalimat ini adalah ... .
   A. median
   B. modus
   C. rataan
   D. kuartil
   E. jangkauan

4. Jika diberikan data statistik dengan median = 76 dan modus = 73, maka ... .
   A. 50% data bernilai 76 dan 50% lagi bernilai 73
   B. Umumnya data bernilai 73, sedangkan nilainya 50% saja yang bernilai 76
   C. 50% data bernilai di atas 76 dan 50% lagi bernilai di bawah 73
   D. Umumnya data bernilai 76, sedangkan nilainya 50% saja yang bernilai 73
   E. 50% data bernilai di atas 76 dan 50% lagi bernilai di bawahnya, tetapi pada umunya bernilai 73

5. Rataan nilai dari 20 bilangan adalah 14,2. Jika rataan dari 12 bilangan pertama adalah 12,6 dan rataan dari 6 bilangan berikutnya adalah 18,2, maka rataan 2 bilangan terakhir adalah ... .
   A. 10,4
   B. 11,8
   C. 12,2
   D. 12,8
   E. 13,4

6. Pada ulangan matematika, rataan kelas adalah 58. Jika rataan nilai matematika untuk siswa pria adalah 65 sedang untuk siswa wanita rataannya 54, maka perbandingan jumlah siswa pria dan wanita pada kelas itu adalah ... .
   A. 11 : 7
   B. 4 : 7
   C. 11 : 4
   D. 7 : 15
   E. 9 : 12

7. Dari 45 siswa kelas XI IPS, 18 siswa mengambil ekstrakurikuler komputer, 12 siswa memilih ekstrakurikuler bahasa Inggris, dan 15 siswa mengambil ekstrakurikuler bola basket. Jika data di atas dinyatakan dalam diagram lingkaran, maka kelas komputer adalah ... .
   A. 30°
   B. 40°
   C. 56°
   D. 96°
   E. 144°

8. Tahun yang lalu gaji permulaan 5 orang karyawan dalam ribuan rupiah adalah:

   480 360 650 700 260

   Tahun ini gaji mereka naik 15% bagi yang sebelumnya bergaji kurang dari Rp500.000,00 dan 10% untuk yang sebelumnya bergaji lebih dari Rp500.000,00. Rataan besarnya kenaikan gaji mereka per bulan adalah ... .
   A. Rp60.000,00
   B. Rp64.000,00
   C. Rp62.000,00
   D. Rp65.000,00
   E. Rp563.000,00

9. Dalam suatu kelas terdapat 22 siswa. Nilai rataan matematikanya 5 dan jangkauan 4. Jika seorang siswa yang nilainya terendah dan seorang siswa yang nilainya tertinggi tidak disertakan, maka rataannya berubah menjadi 4,9. Nilai siswa yang paling rendah adalah ... .
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4
   E. 5

10. Modus dari data dalam tabel berikut adalah ... .

Tabel 1.56

Interval	Frekuensi
61 – 65	8
66 – 70	12
71 – 75	18
76 – 80	14

   A. 72,5
   B. 72,75
   C. 73,5
   D. 73,75
   E. 74,5

11. Diketahui data:

    2 3,5 5 7 7,5

    Rataan simpangan data di atas adalah ... .

    A. 0
    B. 1,0
    C. 1,8
    D. 2,6
    E. 5

12. Dari hasil nilai ujian 50 siswa, diperoleh nilai rataan 54 dan jangkauan 70. Karena nilai rataannya terlalu rendah, maka setiap nilai dikali 2 kali dan dikurangi 32. Nilai baru mempunyai ... .

    a. rataan 76, jangkauan 108
    b. rataan 76, jangkauan 140
    c. rataan 76, jangkauan 36
    d. rataan 108, jangkauan 140
    e. rataan 108, jangkauan 108

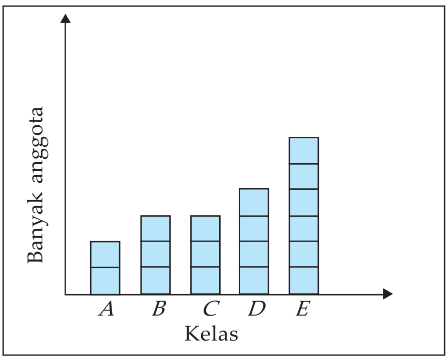
13. Sekumpulan data mempunyai rataan 12 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikurangi dengan a kemudian hasilnya dibagi dengan b, ternyata menghasilkan data baru dengan rataan 2 dan jangkauan 3, maka nilai a dan b masing-masing adalah ... .

    A. 10 dan 2
    B. 8 dan 2
    C. 8 dan 4
    D. 6 dan 4
    E. 4 dan 4

14. Jika suatu bilangan terdiri dari 11 unsur, maka letak nilai Q_2 dan Q_3 pada unsur ke- ... .

    A. 6 dan ke 8
    B. 6 dan ke 8,5
    C. 6 dan ke 9
    D. 5,5 dan ke 8,5
    E. 5,5 dan ke 9

15. Diagram batang di bawah menunjukkan banyak siswa kelas XI IPS suatu SMA yang terdiri dari 5 kelas, yaitu *A, B, C, D,* dan *E.*



    Jika kelas B terdiri dari 48 orang siswa, maka banyak anggota kelas E adalah ... .

    A. 64
    B. 96
    C. 98
    D. 112
    E. 124

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Data di bawah ini menunjukkan hasil panen jagung di Desa Makmur Sentosa.

Tabel 1.57

Berat (kuintal)	Frekuensi
70 – 79	8
80 – 89	12
90 – 99	18
100 – 109	21
110 – 119	16
120 – 129	15

Petani yang memperoleh hasil panen kurang dari 95 kuintal akan mendapat subsidi bibit jagung. Berapa banyak petani yang akan memperoleh subsidi tersebut?

17. Suatu keluarga mempunyai 5 orang anak. Anak bungsu berumur $\frac{1}{2}$ dari umur anak sulung, sedangkan 3 anak lainnya masing-masing berumur lebih 2 tahun dari anak bungsu, lebih 4 tahun dari anak bungsu, dan kurang dari 3 tahun dari anak sulung. Jika rataan umur mereka adalah 16, berapa tahun umur anak bungsu?

18. Rataan nilai ulangan Sejarah 10 siswa adalah 6,25. Jika nilai Sani ditambahkan, rataannya menjadi 6,4. Berapakah nilai Sani?

19. Hasil menimbang sebuah benda dengan 5 kali penimbangan menghasilkan hasil yang berbeda-beda: 57,87 kg, 58,09 kg, 58,17 kg, 57,96 kg, dan 57, 89 kg. Tentukan interval yang memuat berat benda sebenarnya.

20. Data di bawah ini menunjukkan banyak penggunaan air bersih dalam sebulan dari RT 04/05 Kelurahan Rukun Kompak.

Tabel 1.58

Penggunaan (m^3)	Frekuensi
21 – 25	6
26 – 30	14
31 – 35	13
36 – 40	7

Tentukan mean, median, modus, simpangan kuartil, rataan simpangan, dan simpangan baku dari data tersebut.

Soal Analisis

1. Sebuah keluarga mempunyai 5 orang anak. Anak yang bungsu berumur x tahun dan yang sulung berumur $2x$ tahun. Tiga anak yang lain masing-masing berumur $(x + 2)$ tahun, $(x + 4)$ tahun, dan $(2x - 1)$ tahun. Rataan umur dari kelima anak itu adalah 11,5 tahun.
   a. Berapa umur anak bungsu dan anak sulung?
   b. Urutkan data umur kelima anak itu, kemudian tentukan mediannya.
   c. Bandingkan nilai median yang Anda peroleh pada soal b) dengan nilai rataannya. Apa yang dapat Anda simpulkan?
   d. Apakah kumpulan data umur kelima anak itu mempunyai modus? Jika ada, tentukan modusnya.
2. Nilai ujian dari peserta seleksi pegawai di suatu instansi diberikan pada tabel di bawah.

Tabel 1.59

Interval	Frekuensi
21 – 30	2
31 – 40	4
41 – 50	6
51 – 60	20
61 – 70	10
71 – 80	5
81 – 90	2
91 – 100	1

   a. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.
   b. Hitunglah rataannya dengan menggunakan rataan sementara.
   c. Hitunglah simpangan bakunya.
   d. Seorang calon dikatakan lulus, apabila nilainya sama dengan atau di atas rataan. Berapa banyak calon yang lulus?
   e. Adakah nilai data pencilan?
3. Rataan pendapatan karyawan suatu perusahaan Rp300.000,00 per bulan. Jika rataan pendapatan karyawan pria Rp320.000,00 dan karyawan wanita Rp285.000,00, berapakah perbandingan jumlah karyawan pria dengan wanita?
4. Suatu percobaan jenis makanan yang diberikan kepada ayam pedaging memberikan kenaikan berat badan sebagai berikut.

Tabel 1.60

Minggu ke-	Berat Badan (dalam gram)
1	250
2	490
3	990
4	1.890
5	3.790

   Berapakah kira-kira rataan kenaikan berat badan ayam pedaging itu tiap minggunya?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ………………..
Kelas : XI
Kelompok : ………………..
Kegiatan : Survei data pemanfaatan waktu di luar sekolah
Tujuan : Menentukan nilai-nilai statistik

Tanggal : …………..
Materi Pokok : Statistika
Semester : 1 (satu)

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Alat tulis
2. Buku catatan
3. Daftar isian
4. Wilayah yang disurvei

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 atau 5 siswa.
2. Ambillah wilayah survei sekolah Anda. Lakukan survei terhadap minimal 40 siswa di sekolah Anda (tidak boleh teman satu kelas), tentang penggunaan waktu (dalam jam) di luar jam sekolah dalam satu hari.
3. Lakukan isian seperti tabel berikut.

No.	Nama	Belajar	Membantu Keluarga	Olahraga
1.				
2.				
3.				
4.				

4. Berdasarkan data yang Anda peroleh tentang belajar dan olahraga, tentukan:
   a. rerata, median, dan modus,
   b. statistik minimum dan statistik maksimum,
   c. kuartil dan simpangan baku.
5. Berdasarkan data tentang membantu keluarga, tentukan:
   a. persentase siswa yang rajin (minimal 3 jam) membantu keluarga.
   b. persentase siswa yang malas membantu keluarga.
6. Buatlah tabel distribusi frekuensi dan tabel distribusi frekuensi kumulatif data.
7. Dengan bantuan komputer, gambarkan histogram dan poligon frekuensinya.

C. Analisis

Berdasarkan data yang telah Anda olah tadi, buatlah analisis tentang setiap kategori aktivitas siswa.

BAB II

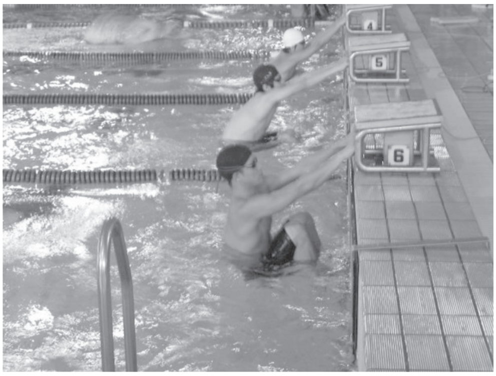
PELUANG

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. merumuskan dan menenerapkan aturan perkalian,
2. merumuskan dan menerapkan aturan permutasi,
3. merumuskan dan menerapkan aturan kombinasi,
4. menentukan ruang sampel suatu percobaan acak,
5. menentukan dan menafsirkan peluang kejadian untuk berbagai situasi,
6. merumuskan dan menerapkan aturan penjumlahan pada kejadian majemuk,
7. merumuskan dan menggunakan aturan perkalian pada kejadian majemuk.

Pengantar



Sumber: *www.nda-cadets-indonesia.org*

Gambar 2.1 Lomba renang

Untuk menghadapi lomba renang tingkat SMA sekabupaten, panitia suatu SMA telah memperoleh 10 calon. Dari sejumlah itu, 6 siswa pandai gaya bebas dan 4 siswa pandai gaya kupu-kupu. Kemudian panitia akan membentuk anggota tim renang yang terdiri dari 3 siswa. Jika panitia bermaksud membentuk tim yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu, berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk? Pertanyaan selanjutnya, jika panitia memilih 3 siswa tersebut secara acak, berapa besar peluang terbentuk tim dengan susunan seperti itu?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda perlu terlebih dahulu mengingat kembali konsep-konsep dari himpunan semesta, operasi himpunan, dan diagram Venn. Selanjutnya, silakan Anda mempelajari isi bab ini. Setelah selesai diharapkan Anda dapat menerapkan hitung peluang untuk menyelesaikan masalah terkait dalam kehidupan sehari-hari.

"Berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk" adalah salah satu contoh kaidah pencacahan, dan "berapa besar kemungkinan" adalah contoh tentang tingkat keyakinan dari kejadian yang belum pasti terjadi. Untuk mempelajari kaidah pencacahan dan mengukur tingkat keyakinan tentang kepastian akan muncul atau tidak munculnya suatu kejadian dipelajari dalam cabang matematika Ilmu Hitung Peluang. Asal mula ilmu ini adalah dari pertanyaan seorang penjudi Chevalier de Mere kepada Blaise Pascal (1623 – 1662) mengenai suatu masalah pembagian uang taruhan pada suatu perjudian, apabila permainan itu terpaksa dihentikan sebelum selesai karena sesuatu hal. Dari kejadian ini Pascal dan Fermat (1601 – 1665) saling berdiskusi yang akhirnya memunculkan cabang matematika Ilmu Hitung Peluang.

Kehadiran Ilmu Hitung peluang disambut baik oleh para ahli matematika maupun ahli-ahli ilmu lain, seperti fisika dan ekonomi, karena kontribusinya yang cukup besar terhadap ilmu-ilmu tersebut.

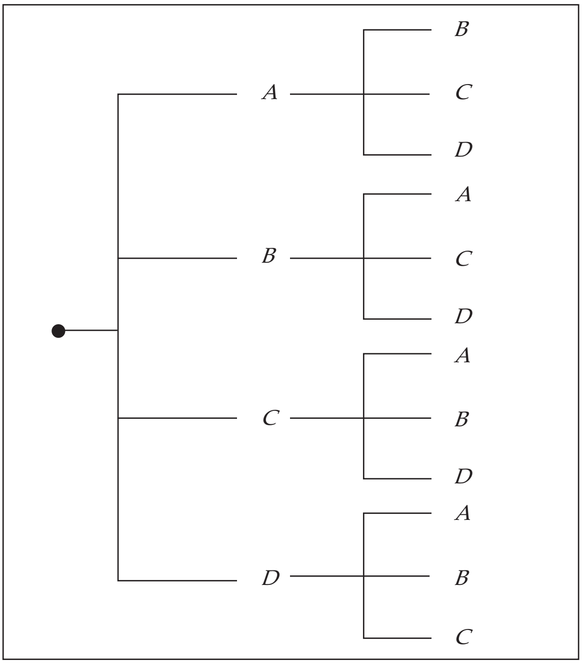
Sebagai dasar dalam mengkaji hitung peluang adalah aturan pencacahan. Oleh karena itu, akan kita kaji lebih dahulu tentang aturan pencacahan ini.

2.1 Aturan Pencacahan

Dalam pengukuran ketidakpastian, ketidakpastian muncul dapat disebabkan karena suatu tindakan atau karena sebagai akibat yang lain. Sebagai contoh, jika sebuah uang logam dilemparkan, maka sebagai akibatnya akan muncul sisi angka atau sisi gambar. Sisi mana yang akan muncul, tidak dapat kita katakan secara pasti. Kegiatan melempar uang logam ini disebut tindakan. Tindakan itu dapat diulang beberapa kali dan rangkian tindakan itu disebut percobaan.

Banyaknya hasil yang mungkin muncul pada berbagai macam percobaan akan ditelusuri dalam kaidah-kaidah pencacahan. Misalnya, pada pemilihan pengurus OSIS terdapat empat anak yang lolos untuk putaran terakhir, yaitu Anwar (*A*), Badu (*B*), Cindy (*C*), dan Dana (*D*). Pada putaran terakhir akan dipilih dua anak untuk menduduki posisi ketua dan sekretaris. Pertanyaan yang muncul adalah berapa macam susunan pengurus yang akan menang?

Jawaban atas pertanyaan di atas dapat kita ikuti pada uraian berikut ini. Pada putaran akhir ada 4 kemungkinan pengisian posisi ketua, yaitu *A, B, C,* dan *D*. Setelah satu dari mereka terpilih sebagai ketua, posisi sekretaris adalah satu dari tiga anak yang tidak terpilih sebagai ketua. Kemungkinan susunan posisi ketua dan sekretaris dapat dibentuk diagram pohon berikut.



Gambar 2.2 Diagram Pohon Penentuan Ketua dan Sekretaris OSIS

Dari diagram ini diperoleh 4 × (4 – 1) = 12 susunan pasangan yang mungkin, yaitu *AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB,* dan *DC*.

Tidak ada aturan yang pasti untuk menjawab pertanyaan berapa banyak hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan. Secara umum, untuk menentukan berapa macam hasil yang mungkin muncul biasanya menggunakan salah satu atau gabungan dari pendekatan-pendekatan: pengisian tempat yang tersedia, permutasi, dan kombinasi.

2.1.1 Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia

Misalkan di pasaran tersedia 4 merk TV. Masing-masing merk menyediakan 3 jenis ukuran layar. Masing-masing TV dikeluarkan dengan 2 macam kualitas suara, *stereo* dan *mono*. Jika seorang pembeli akan membeli TV baru, berapa macam pilihan yang dapat dilakukan olehnya?

Untuk menjawab pertanyaan di atas pembeli menggunakan alur pemikiran berikut ini.

Pertama, ketika memilih merk, terdapat 4 cara untuk memilih merk.

Kedua, ketika memillih ukuran layar, terdapat 3 cara untuk memilih ukuran layar.

Ketiga, ketika memilih kualitas suara, terdapat 2 cara untuk memilih kualitas suara.

Jadi, seluruhnya terdapat 4 × 3 × 2 = 24 cara untuk memilih pasangan merk, ukuran layar, dan kualitas suara. Tanpa menyadari, pembeli itu sebenarnya telah menggunakan teknik mencacah dengan aturan perkalian.

Aturan Perkalian

Jika terdapat n buah tempat tersedia, dengan:

k_1 adalah banyak cara mengisi tempat pertama,

k_2 adalah banyak cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi, ... dan seterusnya,

k_n adalah banyak cara mengisi tempat ke-n setelah $(n - 1)$ tempat-tempat sebelumnya terisi,

maka banyak cara mengisi n tempat yang tersedia itu secara keseluruhan adalah:

$$k_1 \times k_2 \times k_3 \times \ldots \times k_n$$

Jika kita perhatikan aturan perkalian di atas, dalam menentukan banyak cara untuk mengisi k tempat yang tersedia menggunakan operasi perkalian dalam aljabar biasa. Untuk lebih memahami aturan ini kita ikuti contoh aplikasi berikut ini.

Contoh 2.1.1

Ucok ingin bepergian dari kota P ke kota R. Dari kota P ke kota Q dapat ditempuh melalui 3 jalan, sedangkan dari kota Q ke kota R dapat ditempuh melalui 2 jalan. Berapa banyak cara yang dapat ditempuh Ucok, jika ingin bepergian dari kota P ke kota R melalui kota Q?

Penyelesaian:

Dari kota P ke kota Q, terdapat 3 cara.
Dari kota Q ke kota R, terdapat 2 cara.
Dari kota P ke kota R melalui kota Q, terdapat 3 × 2 = 6 cara.
Jadi, banyak cara yang dapat dipilih Ucok untuk bepergian dari kota P ke kota R melalui kota Q adalah 6 cara.

□

Contoh 2.1.2

Dari huruf S, O, P, A, dan N akan dibentuk susunan huruf sehingga dalam susunan tersebut tidak ada huruf yang sama. Berapa banyak cara untuk menyusun huruf-huruf itu, apabila:

a. huruf dimulai dengan huruf vokal?
b. huruf pertama dimulai dengan huruf konsonan?

Penyelesaian:

a. Huruf pertama dimulai dengan huruf vokal.
   Huruf pertama dapat dipilih dengan 2 cara, yaitu huruf O dan A.
   Huruf kedua dapat dipilih dengan 4 cara. Misalnya, jika huruf pertama kita pilih O, maka huruf kedua dapat kita pilih S, P, A, dan N.
   Huruf ketiga dapat kita pilih dengan 3 cara.
   Huruf keempat dapat kita pilih dengan 2 cara.
   Huruf kelima dapat kita pilih dengan 1 cara.

Seluruhnya terdapat $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun huruf *S, O, P, A*, dan *N* dengan huruf pertama dimulai huruf vokal seluruhnya ada 48 cara.

b. Huruf pertama dimulai dengan huruf konsonan.
Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf *S, P*, dan *N*.
Huruf kedua dapat dipilih dengan 4 cara. Misalnya, jika huruf pertama kita pilih *S*, maka huruf kedua dapat kita pilih *O, P, A*, dan *N*.
Huruf ketiga dapat kita pilih dengan 3 cara.
Huruf keempat dapat kita pilih dengan 2 cara.
Huruf kelima dapat kita pilih dengan 1 cara.
Seluruhnya terdapat $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun huruf-huruf *S, O, P, A*, dan *N* dengan huruf pertama dimulai huruf konsonan seluruhnya ada 72 cara.

□

Contoh 2.1.3

Panitia penerimaan siswa baru suatu sekolah akan membuat nomor ujian peserta yang terdiri dari 4 angka, dari angka yang tersedia 1, 2, 3, 4, dan 5. Tetapi panitia menginginkan bahwa nomor ujian tidak diawali dengan angka 1. Berapa banyak cara untuk menyusun nomor ujian itu menjadi 4 angka, apabila:

a. nomor ujian itu boleh mempunyai angka yang sama?
b. nomor ujian itu tidak boleh mempunyai angka yang sama?

Penyelesaian:

a. Nomor ujian itu boleh mempunyai angka yang sama
Angka pertama (sebagai ribuan) dapat dipilih dengan 4 cara, yaitu angka 2, 3, 4, dan 5 karena disyaratkan angka pertama tidak boleh angka 1.
Karena nomor diperbolehkan mempunyai angka yang sama, maka:
angka kedua (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 5 cara,
angka ketiga (sebagai puluhan) dapat dipilih dengan 5 cara,
angka keempat (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 5 cara.
Dengan aturan perkalian, seluruhnya terdapat $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun angka 1, 2, 3, 4, dan 5 menjadi 4 angka dengan angka pertama bukan angka 1 adalah 500 cara.

b. Nomor ujian itu tidak boleh mempunyai angka yang sama
Angka pertama (sebagai ribuan) dapat dipilih dengan 4 cara, lihat jawaban sebelumnya.
Angka kedua (sebagai ratusan) hanya dapat dipilih dengan 4 cara karena nomor tidak diperbolehkan mempunyai angka yang sama. Misalnya setelah dipilih angka pertama 2, maka angka kedua yang dapat dipilih tinggal 4 angka, yaitu 1, 3, 4, dan 5.
Angka ketiga (sebagai puluhan) dapat dipilih dengan 3 cara.
Angka keempat (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 2 cara.
Menurut aturan perkalian, seluruhnya terdapat $4 \times 4 \times 3 \times 2 = 96$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun angka 1, 2, 3, 4, dan 5 menjadi 4 angka dengan angka pertama bukan angka 1 dan tidak boleh ada angka yang sama adalah 96 cara.

□

Contoh 2.1.4

Diberikan lima buah angka: 0, 1, 2, 3, dan 4, akan disusun bilangan-bilangan genap yang terdiri dari tiga angka. Berapa banyak cara untuk menyusun bilangan-bilangan genap yang terdiri tiga angka, apabila:

a. bilangan-bilangan genap itu boleh mempunyai angka yang sama?
b. bilangan-bilangan genap tidak boleh mempunyai angka yang sama?

Penyelesaian:

Bilangan genap adalah bilangan yang pada posisi satuan adalah bilangan genap. Dalam hal ini haruslah 0, 2, atau 4.

a. Bilangan-bilangan genap boleh mempunyai angka yang sama
   Angka pertama (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 4 cara. Angka 0 tidak dapat dipilih sebagai angka pertama karena 012 sebagai contoh, bukan bilangan yang terdiri dari tiga angka.
   Angka kedua (sebagai puluhan) dapat dipilih dengan 5 cara.
   Angka ketiga (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 3 cara. Angka ketiga yang dapat dipilih adalah 0, 2, dan 4.
   Angka keempat (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 5 cara.
   Dengan aturan perkalian, seluruhnya terdapat $4 \times 5 \times 3 = 60$ cara.
   Jadi, banyak cara untuk menyusun angka 0, 1, 2, 3, dan 4 menjadi bilangan genap yang terdiri 3 angka dengan bilangan-bilangan itu boleh mempunyai angka yang sama adalah 60 cara.

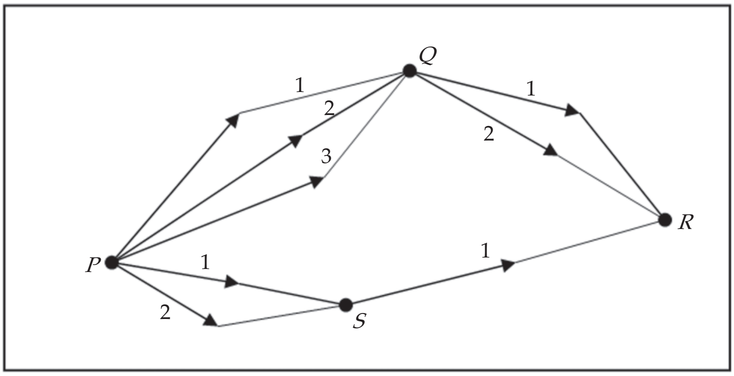
b. Bilangan-bilangan genap tidak boleh mempunyai angka yang sama
   Angka pertama (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 4 cara.
   Angka kedua (sebagai puluhan) hanya dapat dipilih dengan 4 cara karena bilangan tidak boleh mempunyai angka yang sama.
   Angka ketiga (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 3 cara.
   Seluruhnya terdapat $4 \times 4 \times 3 = 48$ cara.
   Jadi, banyak cara untuk menyusun angka 0, 1, 2, 3, dan 4 menjadi bilangan genap yang terdiri 3 angka dengan bilangan-bilangan itu tidak boleh mempunyai angka yang sama adalah 48 cara.

□

Misalkan, untuk bepergian dari kota P ke kota R kita dapat melewati kota Q atau melewati kota S dengan berbagai alternatif jalur. Misalkan kita pergi dari kota P ke kota Q mempunyai 3 jalur pilihan, kemudian dari kota Q ke kota R tersedia 2 jalur pilihan, maka menurut aturan perkalian untuk bepergian dari kota P ke kota R melewati kota Q kita mempunyai 3×2 jalur.

Selanjutnya, misalkan kita pergi dari kota P ke kota S tersedia 2 jalur pilihan, kemudian dari kota S kita hanya mempunyai 1 jalur untuk sampai di kota R, maka banyaknya jalur yang tersedia bagi kita untuk bepergian dari kota P ke kota R melewati kota S adalah 2×1 jalur.

Lihat Gambar 2.3.



Gambar 2.3 Diagram Pohon Jalur Perjalanan Dari Kota P ke Kota R

Dari uraian di atas dapat kita simpulkan bahwa untuk bepergian dari kota P ke kota R kita mempunyai (3×2) + (2×1) = 8 jalur pilihan. Dalam pencacahan ini kita menggunakan apa yang disebut aturan penjumlahan. Aturan penjumlahan kita gunakan untuk melengkapi aturan perkalian, apabila cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi tidak dapat kita lakukan menggunakan sesuatu yang sudah digunakan sebagai pilihan untuk mengisi tempat pertama. Secara umum kita mempunyai aturan penjumlahan berikut ini.

Aturan Penjumlahan

Jika terdapat n peristiwa yang saling lepas, dengan:

c_1 adalah banyak cara pada peristiwa pertama,

c_2 adalah banyak cara pada peristiwa kedua, ... dan seterusnya,

c_n adalah banyak cara pada pada peristiwa ke-n,

maka banyak cara untuk n buah peristiwa secara keseluruhan:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$$

2.1.2 Permutasi

Permutasi dibedakan menjadi 4 macam, yaitu *permutasi dari unsur-unsur yang berbeda*, *permutasi yang memuat beberapa unsur sama*, *permutasi siklis*, dan *permutasi berulang*.

1. *Permutasi dari Unsur-Unsur yang Berbeda*

   Pada putaran akhir pemilihan pengurus OSIS seperti telah dibahas pada awal bab, ada 2 tempat yang tersedia untuk diisi oleh 2 anak dari 4 anak (A, B, C, dan D). Posisi ketua dapat diisi dengan 4 cara. Karena tidak mungkin ketua merangkap sekretaris, maka posisi sekretaris dapat diisi dengan (4 – 1) = 3 cara. Secara keseluruhan untuk memilih pasangan ketua-sekretaris ada 4 × 3 = 12 cara. Pada contoh itu, anak yang telah terpilih sebagai ketua tidak dapat dipilih kembali untuk menduduki posisi sekretaris. Pemilihan seperti itu kita sebut pemilihan tanpa pemulihan.

Secara umum, banyak cara menempatkan n buah unsur ke dalam k tempat yang tersedia itu disebut permutasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan dengan P_k^n, yang diberikan sebagai:

$$P_k^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$$

dengan $k \le n$. Beberapa buku menggunakan notasi ${}^nP_k$, ${}_nP_k$ atau $P(n,k)$ untuk P_k^n.

Dengan notasi ini, pada masalah penentuan ketua dan sekretaris dari 4 anak di atas, merupakan permutasi $k = 2$ unsur dari $n = 4$ unsur, sehingga banyak cara menentukan ketua dan sekretaris sama dengan $P_2^4 = 4 \times (4-2+1) = 4 \times 3 = 12$.

Jika pada putaran akhir pemilihan pengurus OSIS di atas dari keempat calon akan ditentukan ketua, sekretaris, bendahara, dan pembantu umum, ada berapa macam susunan pengurus yang mungkin timbul?

Masalah ini adalah pengisian tempat tanpa pemulihan dari 4 unsur ke dalam 4 tempat yang tersedia. Posisi ketua adalah salah satu dari empat anak itu. Yang menjadi sekretaris adalah salah satu dari 3 orang yang tersisa, yang menjadi bendahara adalah salah satu dari 2 orang yang tersisa. Akhirnya posisi pembantu umum hanya dapat ditempati satu anak. Dalam hal ini adalah kasus permutasi dari $n = 4$ anak ke dalam $k = 4$ tempat yang tersedia. Sehingga, banyaknya susunan pengurus adalah $P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$.

Secara umum, jika $k = n$, maka permutasi n unsur dari n unsur yang tersedia disebut permutasi n, yang diberikan oleh:

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

Bagaimana hubungan P_k^n dan P_n^n? Untuk menjawab pertanyaan ini, terlebih dahulu kita bahas pengertian faktorial dari bilangan asli.

Faktorial dari suatu bilangan asli didefinisikan berikut ini.

Untuk sembarang bilangan asli n, didefinisikan

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$$

Notasi $n!$ dibaca "n faktorial". Didefinisikan pula bahwa $0! = 1$ dan $1! = 1$.

Sebagai contoh,

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 362.880$, ... , dan seterusnya.

Dengan pengertian faktorial, kita dapat menuliskan permutasi sebagai:

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1 = n! \qquad (2.1)$$

Lebih lanjut, karena $P_k^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$, maka

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times3\times2\times1$$

$$n! = P_k^n(n-k)!$$

Jadi, kita memperoleh hubungan:

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!},\ n\geq k \qquad (2.2)$$

Contoh 2.1.5

Tunjukkan bahwa $n! = n\times(n-1)!$.

Penyelesaian:

Dari definisi n faktorial,

$$n! = n\times((n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1) = n\times(n-1)!$$

□

Contoh 2.1.6

Hitunglah nilai dari setiap permutasi berikut.

a. P_2^5 b. P_4^6 c. P_5^{10} d. P_8^8

Penyelesaian:

Dengan persamaan (2.1) dan (2.2), kita peroleh:

a. $P_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 5\times4 = 20$

b. $P_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 6\times5\times4\times3 = 360$

c. $P_4^{10} = \dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10!}{6!}$
$= \dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$
$= 10\times9\times8\times7 = 5020$

d. $P_8^8 = 8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40.320$

□

Tugas Mandiri

Dengan hasil (2.1) dan (2.2), buktikan: $(n-k)!\,P_k^n = k!\,P_{n-k}^n = P_n^n$.

Contoh 2.1.7

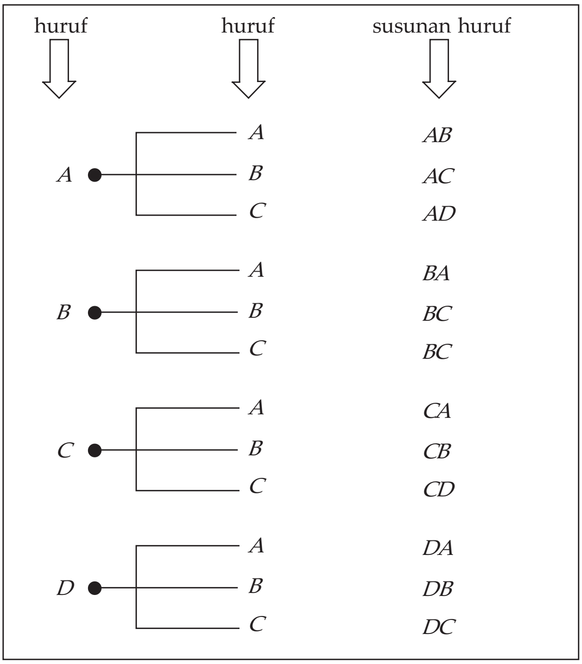
Berapakah banyak permutasi dari 2 huruf yang diambil dari 4 huruf: *A, B, C,* dan *D*.

Penyelesaian:

Hal ini merupakan permutasi dari 4 unsur ke dalam 2 unsur, sehingga menurut persamaan (2.2) banyak permutasi adalah:

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

Susunan huruf yang mungkin terlihat pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4 Permutasi 2 Huruf dari 4 Huruf

□

2. *Permutasi yang Memuat Beberapa Unsur Sama*

Pada bagian sebelumnya telah kita bahas permutasi dari n unsur berbeda, bagaimana jika dari n unsur itu terdapat beberapa unsur yang sama. Untuk menjawab pertanyaan ini coba kita ikuti ilustrasi pada contoh berikut ini.

Contoh 2.1.8

Berapa banyak permutasi 3 huruf yang diambil dari huruf P, Q, dan Q?

Penyelesaian:

Unsur yang tersedia ada 3, yaitu P, Q, dan Q. Dari ketiga unsur ini ada dua unsur yang sama, yaitu huruf Q. Akan kita gunakan pendekatan permutasi dengan 3 unsur yang berbeda untuk menentukan banyak permutasi dari 3 unsur yang memuat 2 unsur sama. Pertama, anggap 2 unsur yang sama yaitu Q sebagai dua unsur yang berbeda dengan memberinya indeks Q_1 dan Q_2.
Banyak permutasi 3 unsur yang berbeda P, Q_1, dan Q_2 adalah 3! = 6, yaitu permutasi-permutasi:

$$PQ_1Q_2,\ PQ_2Q_1,\ Q_1PQ_2,\ Q_1Q_2P,\ Q_2PQ_1,\ Q_2Q_1P$$

Dengan menghapus indeks-indeksnya, permutasi di atas dapat kita kelompokkan ke dalam permutasi yang sama. Misalnya,

- Kelompok PQ_1Q_2 dan PQ_2Q_1, jika indeksnya dihapuskan, maka diperoleh permutasi PQQ.
- Kelompok Q_1PQ_2 dan Q_2PQ_1, jika indeksnya dihapuskan, maka diperoleh permutasi QPQ.
- Kelompok Q_1Q_2P dan Q_2Q_1P, jika indeknya dihapuskan, maka diperoleh permutasi QQP.

Tampak bahwa jika indeksnya dihapuskan, maka setiap kelompok yang terdiri dari 2! = 2 permutasi, berubah menjadi 1 permutasi. Oleh karena itu, banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur sama adalah 3, yang dapat kita nyatakan sebagai:

$$P = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times 2\times 1}{2\times 1} = 3$$

dengan permutasinya adalah PQQ, QPQ, dan QQP.

□

Berdasarkan contoh di atas, secara umum kita mempunyai aturan berikut ini.

1. Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k unsur yang sama dengan $k \le n$, maka banyak permutasi dari n unsur adalah:

$$P = \frac{n!}{k!} \tag{2.3}$$

2. Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k unsur yang sama, l unsur yang sama, dan m unsur yang sama dengan $k + l + m \le n$, maka banyak permutasi dari n unsur itu adalah:

$$P = \frac{n!}{k!\,l!\,m!} \tag{2.4}$$

Contoh 2.1.9

Misalkan terdapat 7 buah foto, 4 buah foto dengan bingkai berbentuk persegi dan 3 buah foto dengan bingkai berbentuk oval. Berapa banyak cara untuk menyusun 7 buah foto itu secara berdampingan?

Penyelesaian:

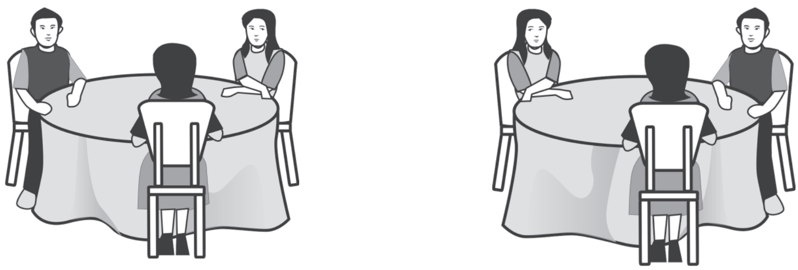
Banyak unsur: $n = 7$, banyak unsur yang sama: $k = 4$ (untuk foto dengan bingkai persegi) dan $l = 3$ (untuk foto dengan bingkai oval). Jadi, banyak cara untuk menyusun 7 buah foto itu secara berdampingan adalah

$$P = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)} = 7\times5 = 35$$

□

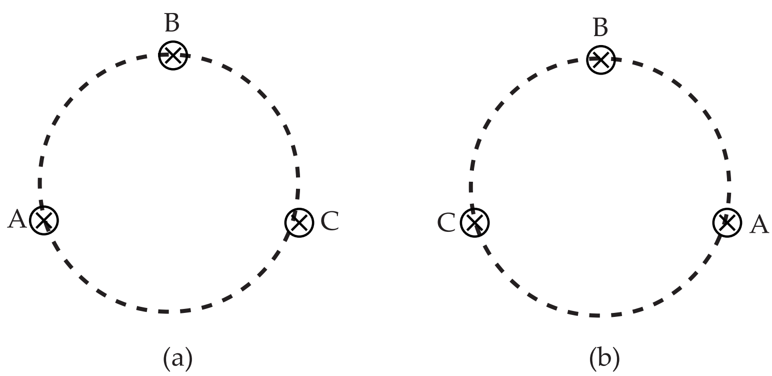
3. *Permutasi Siklis*

Misalkan Awan (A), Beti (B), dan Cinta (C) pergi ke restoran, mereka duduk mengelilingi meja berbentuk lingkaran. Posisi duduk mereka hanya dua kemungkinan seperti diperlihatkan oleh gambar berikut ini.



Gambar 2.5 Posisi Duduk 3 Orang Melingkar

Dalam bentuk bagan, Gambar 2.5 dapat kita sederhanakan menjadi Gambar 2.6.



Gambar 2.6 Bagan Posisi Duduk 3 Orang Melingkar

Dari Gambar 2.6 (a) jika dibaca searah dengan arah putaran jarum jam, kita peroleh 3 susunan yang mungkin, yaitu:

$$ABC, BCA, \text{ dan } CAB$$

Tetapi ketiga susunan ini sebenarnya memberikan sebuah susunan yang sama, yaitu susunan yang diperlihatkan oleh Gambar 2.6 (a).
Seperti susunan Gambar 2.6 (a), susunan Gambar 2.6 (b) jika dibaca searah dengan arah putaran jarum jam, kita peroleh 3 susunan yang mungkin, yaitu:

$$ACB, CBA, \text{ dan } BAC$$

Ketiga susunan ini memberikan sebuah susunan yang sama, yaitu susunan yang diperlihatkan oleh Gambar 2.6 (b).

Dari kedua ilustrasi ini, dapat kita simpulkan bahwa *banyak susunan* dari huruf A, B, dan C yang ditempatkan pada kurva tertutup berbentuk lingkaran adalah 2! = 2 macam, yaitu susunan yang diberikan oleh Gambar 2.6. Penempatan unsur-unsur dengan cara inilah yang disebut permutasi siklis atau permutasi sirkuler (*circular permutation*). Secara umum kita mempunyai aturan berikut ini.

> Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyak permutasi siklisnya adalah
>
> $$P_{\text{siklis}} = (n-1)! \qquad (2.5)$$

Untuk memahami tentang permutasi siklis ini, kita ikuti contoh berikut.

Contoh 2.1.10

Berapa cara yang mungkin dapat dibuat, jika dalam suatu pesta makan terdapat 7 orang yang duduk dalam:
a. berjajar dalam satu baris,
b. meja makan bundar.

Penyelesaian:

a. Posisi duduk berjajar dalam satu baris merupakan permutasi 7 unsur dari 7 unsur, sehingga menurut persamaan (2.1),

$$P_7^7 = 7! = 5.040 \text{ cara}$$

Jadi, jika 7 orang tersebut duduk berjajar dalam satu baris, maka banyak cara mereka duduk ada 5.040 cara.

b. Posisi duduk mengelilingi meja makan bundar merupakan permutasi siklis dari 7 unsur, sehingga menurut persamaan (2.5),

$$P_{\text{siklis}} = (7-1) = 6! = 720 \text{ cara}$$

Jadi, jika 7 orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka banyak cara mereka duduk ada 720 cara.

□

4. *Permutasi Berulang*

Kita ingat kembali bahwa permutasi dari 3 huruf, P, Q dan R, adalah susunan-susunan yang berbentuk:

$$PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ, RQP$$

Dalam susunan ini, unsur-unsur yang tersedia tidak boleh berulang. Jika unsur-unsur yang tersedia boleh berulang, misalkan

$$PPP, PPQ, PPR, ..., QQP, QQR...., \text{ dan seterusnya}$$

maka permutasi semacam ini disebut permutasi berulang (*repeated permutation*).

Dengan memperhatikan permutasi di atas, maka banyaknya permutasi berulang dari huruf P, Q, dan R ditentukan sebagai berikut.

- Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf P, Q, dan R.
- Huruf kedua dan huruf ketiga dapat dipilih masing-masing dengan 3 cara karena huruf-hurufnya boleh berulang

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyak permutasi seluruhnya adalah:

$$3\times3\times3 = 3^3 = 27$$

Jika dari 3 huruf, P, Q, dan R, akan disusun 2 huruf dengan huruf-huruf boleh berulang, maka banyak permutasi berulang dua huruf yang diambil dari 3 huruf yang tersedia ditentukan sebagai berikut.

- Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf P, Q, dan R.
- Huruf kedua dapat dipilih dengan 3 cara karena huruf-hurufnya boleh berulang.

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyak permutasi seluruhnya adalah:

$$3\times3 = 3^2 = 9$$

Dari dua ilustrasi di atas, maka secara umum kita mempunyai aturan berikut ini.

Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyak permutasi berulang k unsur yang diambil dari n unsur $(k \leq n)$ adalah:

$$P_{\text{berulang}} = n^k \tag{2.6}$$

Contoh 2.1.11

Diberikan angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, akan dibentuk bilangan-bilangan yang terdiri dari 4 angka dengan angka-angka boleh berulang. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk?

Penyelesaian:

Banyak unsur yang tersedia adalah $n = 6$, yaitu angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Dibentuk bilangan yang terdiri dari 4 angka, kita ambil $k = 4$. Karena angka-angka boleh berulang, maka bilangan yang tersusun merupakan permutasi berulang, dengan $k = 4$, sehingga dengan persamaan (2.6) kita peroleh

$$P_{\text{berulang}} = 6^4 = 1.296$$

Jadi, banyak bilangan yang dapat dibentuk seluruhnya ada 1.296 macam.

□

2.1.3 Kombinasi

Sekolah akan mengikuti perlombaan paduan suara yang tiap regunya terdiri dari 2 anak. Dari hasil seleksi diperoleh 4 anak, A, B, C dan D, yang memenuhi kriteria yang telah ditentukan. Pertanyaannya adalah berapa regu yang dapat dipilih dari empat anak tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan ini, perhatikan kembali banyaknya cara keempat anak, A, B, C, dan D, dapat menempati tempat pertama dan kedua. Kemungkinan-kemungkinannya adalah:

$$\{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$$

Kita tahu bahwa susunan AB dan susunan BA menentukan satu regu yang sama karena tidak memperhatikan urutan. Demikian pula halnya susunan $AC = CA$, $AD = DA$, $BC = CB$, $BD = DB$, dan $CD = DC$. Jadi, ada $12/2 = 6$ cara untuk menyusun regu paduan suara yang terdiri atas 2 anak dari 4 anak yang tersedia,

$$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

Banyak cara memilih 2 unsur dari 4 unsur yang tersedia disebut kombinasi 2 unsur dari 4 unsur. Secara umum kita mempunyai definisi berikut ini.

> Definisi:
>
> Kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah suatu pilihan dari k unsur tanpa memperhatikan urutannya $(k \leq n)$, dinotasikan dengan C_k^n.

Dengan kata lain, banyak kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia adalah banyak cara memilih k unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia tanpa memperhatikan urutannya.

Kita masih ingat bahwa banyaknya cara memilih 2 anak dari 4 anak untuk ditempatkan dalam dua kedudukan yang berbeda adalah permutasi 2 unsur dari 4 unsur yang tersedia, yaitu $P_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$. Untuk kombinasi AB yang tata letak unsur-unsur A dan B-nya tidak diperhatikan, dapat diturunkan $2! = 2$ permutasi karena setiap kombinasi memberikan 2 permutasi. Jadi, kita peroleh hubungan:

$$2C_2^4 = P_2^4 \quad \text{atau} \quad C_2^4 = \frac{P_2^4}{2}$$

Secara umum, untuk setiap kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, kita dapat membentuk $P_k^k = k!$ permutasi. Oleh karena itu, terdapat hubungan antara kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, yaitu C_k^n, dengan permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia, yaitu P_k^n adalah:

$$C_k^n = \frac{P_k^n}{P_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (2.7)$$

Contoh 2.1.12

Hitunglah nilai dari setiap kombinasi berikut.

a. C_2^5 b. C_4^6 c. C_5^{10} d. C_3^7

Penyelesaian:

Langsung kita gunakan rumus pada persamaan (2.7), diperoleh:

a. $C_2^5 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)(3\times2\times1)} = 5\times2 = 10$

b. $C_4^6 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)} = 5$

c. $C_5^{10} = \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = \dfrac{10!}{5!5!}$

$= \dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(5\times4\times3\times2\times1)} = 2\times9\times2\times7 = 252$

d. $C_3^7 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(4\times3\times2\times1)} = 7\times5 = 35$

□

Contoh 2.1.13

Berapakah kemungkinan jumlah kombinasi yang dapat dibuat dari 4 orang, *A, B, C,* dan *D,* yang ingin membuat suatu panitia yang terdiri 3 orang?

Penyelesaian:

Masalah ini adalah kombinasi 3 unsur dari 4 unsur yang tersedia, sehingga dari persamaan (2.7) diperoleh:

$$C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = \frac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times1} = 4$$

Jadi, terdapat 4 kemungkinan panitia yang terdiri dari 3 orang yang dapat dibentuk dari 4 orang, yaitu *ABC, ABD, ACD,* dan *BCD.*

□

Contoh 2.1.14

Hitunglah nilai n, apabila $C_2^n = 4n+5$.

Penyelesaian:

Dari rumus pada persamaan (2.7) kita peroleh:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1}{(2\times1)((n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1)} = \frac{n\times(n-1)}{2}$$

Di pihak lain, diketahui bahwa $C_2^n = 4n+5$, sehingga diperoleh hubungan:

$$\frac{n\times(n-1)}{2} = 4n+5 \Leftrightarrow n^2 - n = 8n+10$$
$$\Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0$$
$$\Leftrightarrow (n-10)(n+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow n = 10 \text{ atau } n = -1$$

Karena n harus bilangan asli, maka n yang memenuhi adalah $n = 10$.

□

Pada bagian akhir ini, kita akan menyelesaikan masalah pembentukan tim lomba renang yang diungkapkan pada awal bab.

Contoh 2.1.15

Tersedia 10 siswa yang memenuhi syarat menjadi tim lomba renang dari suatu SMA. Dari sejumlah siswa itu, 6 siswa pandai gaya bebas dan 4 siswa pandai gaya kupu-kupu. Tim yang dibentuk beranggotakan 3 siswa, yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu. Berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk?

Penyelesaian:

Dua siswa dipilih dari 6 siswa yang pandai gaya bebas, sehingga kombinasinya adalah $C_2^6 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$ cara. Seorang anggota dipilih dari 4 siswa yang pandai gaya kupu-kupu, sehingga kombinasinya $C_1^4 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$ cara. Dengan menggunakan aturan perkalian, banyak susunan tim lomba renang yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu adalah:

$$C_2^6 \times C_1^4 = 15 \times 4 = 60$$

Jadi, banyak susunan tim lomba renang yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu yang dipilih dari 6 siswa pandai gaya bebas dan 4 siswa pandai gaya kupu-kupu adalah 60 susunan.

□

Latihan 2.1

Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia

1. Suatu kelompok penari latar mempunyai:
   baju berwarna: merah, pink, biru, kuning, dan hijau,
   rok pendek berwarna: putih, ungu, dan cokelat,
   sepatu berwarna: merah dan hitam.

a. Gambarkan diagram pohon yang menghubungkan warna baju, warana rok pendek, dan warna sepatu.
b. Berapa banyak pasangan warna seragam yang dapat disusun ?

2. Suatu apartemen terdiri dari empat lantai, masing-masing lantai berturut-turut dihuni 12 orang, 8 orang, 6 orang, dan 5 orang. Dari setiap lantai akan dipilih seorang wakil untuk dibentuk sebagai pengurus apartemen. Berapa cara susunan pengurus dapat dibentuk?
3. Perjalanan dari Jakarta ke Bandung dapat melalui 4 jalur, dari Bandung ke Yogyakarta dapat melalui 2 jalur, dan dari Yogyakarta ke Surabaya melalui 3 jalur. Berapa banyak jalur perjalanan yang dapat dipilih dari perjalanan-perjalanan berikut ini.
   a. Dari Jakarta ke Yogyakarta melalui Bandung.
   b. Dari Surabaya ke Jakarta melalui Yogyakarta.
   c. Dari Jakarta ke Surabaya melalui Bandung dan Yogyakarta.
4. *Bahasa*

   Diberikan 11 huruf masing-masing *H, I, D, U, P, C, E, R, D, A,* dan *S*. Berapa banyak cara menyusun huruf itu, apabila disyaratkan:
   a. huruf pertamanya huruf vokal?
   b. huruf pertamanya huruf konsonan?
5. Dari lima buah angka, 0, 1, 2, 3, dan 4, akan disusun bilangan-bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapa banyak cara untuk menyusun bilangan-bilangan itu, apabila:
   a. bilangan-bilangan boleh mempunyai angka yang sama?
   b. bilangan-bilangan tidak boleh mempunyai angka yang sama?
6. Dari empat buah angka, 1, 2, 3, dan 4, akan disusun bilangan-bilangan yang terdiri dari 3 angka dengan tidak ada angka yang sama. Berapa banyak bilangan-bilangan yang dapat disusun yang lebih dari 312, apabila:
   a. bilangan-bilangan boleh mempunyai angka yang sama?
   b. bilangan-bilangan tidak boleh mempunyai angka yang sama?

Permutasi

1. Hitunglah:
   a. $8! - 3!$ dan $(8 - 3)!$
   b. $6!\times 3!$ dan $(6\times 3)!$
   c. Apakah $8! - 3!$ dan $(8 - 3)!$ sama, dan $6!\times 3!$ dan $(6\times 3)!$ sama?
2. Tunjukkan bahwa:
   a. $\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} = \frac{11}{4!}$
   b. $\frac{3}{4!} + \frac{10}{5!} = \frac{5}{4!}$
   c. $\frac{3}{8!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{6!} = \frac{43}{8!}$
3. Buktikan bahwa untuk $n \geq 1$ berlaku $n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$.
4. Tentukan nilai-nilai permutasi berikut.

   a. P_3^5 b. P_5^{12} c. $3!\,P_2^7$

5. Berapa banyak bilangan yang terdiri dari 3 angka yang dibentuk dari angka-angka berikut ini.
   a. 1, 2, dan 3
   b. 0, 2, 4, dan 6
   c. 2, 5, 6, 7, 8, dan 9
6. *Bahasa*

   Berapa banyak susunan huruf yang terdiri dari:
   a. 2 huruf yang diambil dari $C, E, R, M, A,$ dan T
   b. 3 huruf yang diambil dari $A, N, G, K, U,$ dan H
   c. 4 huruf yang diambil dari $P, L, A, T, I, N, U,$ dan M
7. Dalam suatu kelas yang terdiri dari 40 siswa akan dipilih ketua, sekretaris, dan bendahara. Berapa banyak susunan yang dapat dipilih?
8. *Bahasa*

   Berapa banyak susunan huruf yang dapat disusun dari huruf-huruf berikut ini secara berdampingan.
   a. $R, U, K, U,$ dan N
   b. $K, E, R, J, A, S, A, M,$ dan A
   c. $S, T, A, T, I, S, T, I,$ dan K
9. Dalam kotak ada 5 balon yang dapat diambil satu per satu secara berurutan (tanpa pengembalian). Berapa banyak pasangan warna yang dapat terjadi, apabila yang terambil:
   a. 2 balon merah dan 3 balon putih?
   b. 2 balon merah, 2 balon pink, dan 1 balon putih?
   c. 1 balon merah, 1 balon pink, dan 3 balon putih?
10. Hitunglah banyak permutasi siklis, jika unsur-unsur yang tersedia adalah:
    a. 5 unsur yang berlainan
    b. 8 unsur yang berlainan
11. Sebuah gelang memiliki 6 buah permata berlian dengan bentuk yang berbeda-beda. Keenam permata berlian itu ditempatkan pada keliling gelang. Berapa banyak susunan permata berlian yang terjadi?
12. Dari angka-angka berikut ini akan dibentuk bilangan-bilangan yang terdiri atas 3 angka dengan angka-angka boleh berulang. Berapa banyak susunan bilangan yang dapat dibentuk?
    a. 4, 5, dan 6
    b. 4, 5, 6, dan 7
    c. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7
13. *Bahasa*

    Hitunglah banyak susunan huruf (boleh berulang), jika diketahui:
    a. 3 huruf diambil dari huruf $H, E, M, A,$ dan T
    b. 4 huruf diambil dari huruf $A, D, I,$ dan L
    c. 5 huruf diambil dari huruf $C, E, R, M, A,$ dan T

Kombinasi

1. Hitunglah nilai dari kombonasi-kombinasi berikut.

   a. C_3^5 b. C_5^{12} c. $3!C_2^7$
2. Buktikan bahwa:

   a. $C_3^{10} = C_7^{10}$ b. $C_4^{12} = C_8^{10}$ c. $C_k^n = C_{n-k}^n$

3. Hitunglah nilai n pada persamaan berikut.

   a. $C_4^{n+1} = C_3^n$ b. $C_3^{n+1} = 4C_2^n$ c. $C_2^n = 4n + 5$

4. Misalkan A adalah himpunan bilangan bulat yang terdiri dari 8 anggota. Hitunglah banyak himpunan bagian dari A yang teridiri dari:

   a. 2 anggota b. 4 anggota c. 6 anggota

5. Dalam suatu pertemuan terdapat 5 orang yang belum saling kenal. Apabila mereka ingin berkenalan dengan saling berjabat tangan sekali, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
6. Untuk mengelola warnet diperlukan 5 staf pengurus, sedangkan tersedia 9 calon. Berapa banyak susunan staf pengurus yang mungkin?
7. Jumlah peserta ujian SIM kendaraan bermotor 50 orang. Dari 10 soal yang disediakan, setiap peserta hanya diminta mengerjakan 5 soal yang terdiri dari 2 soal nomor ganjil dan 3 soal nomor genap. Ada berapa cara yang dapat ditempuh oleh setiap peserta, jika setiap peserta tidak ada satupun yang mempunyai jawaban yang sama?
8. Tersedia 6 siswa laki-laki dan 4 siswa perempuan. Dibentuk regu P3K, dengan syarat satu regu terdiri dari 5 orang siswa yang sekurang-kurangnya beranggotakan 2 siswa perempuan. Berapa banyak cara pembentukan regu itu?
9. *Industri*

   Sebuah pabrik tekstil akan membuat warna campuran yang terbentuk dari 3 warna dasar. Jika tersedia 6 warna dasar yang berlainan, berapa banyak warna campuran yang dapat dibuat?

10. *Olahraga*

    Dalam pelatnas bulu tangkis ada 8 orang pemain putra dan 6 orang pemain putri. Berapa banyak pasangan ganda yang dapat dibentuk, untuk:

    a. ganda putra?
    b. ganda putri?
    c. ganda campuran?

2.2 Ruang Sampel dan Kejadian

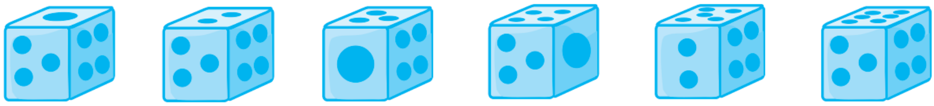
Sebagaimana telah disebutkan pada bagian awal, bahwa teori peluang bermula dari permainan judi. Dalam pembahasannya sering juga menggunakan alat peraga judi, misalnya kartu, dadu, dan mata uang logam. Hal ini hanya untuk memperjelas konsep semata, bukan bertujuan agar siswa pandai judi.

Misalkan kita melemparkan sekeping mata uang logam atau sebuah dadu sisi enam. Kegiatan melempar itu (satu kali atau beberapa kali) disebut percobaan. Hasil percobaan melempar sekeping mata uang logam adalah munculnya sisi gambar (G) atau munculnya sisi angka (A). Lihat Gambar 2.7.

Sumber: *www.bi.go.id*

Gambar 2.7 Hasil Percobaan Melempar Sekeping Mata Uang Logam

Hasil percobaan melempar sebuah dadu sisi enam adalah salah satu dari enam sisi, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, terlihat pada Gambar 2.8.



Gambar 2.8 Hasil Percobaan Melempar Sebuah Dadu Sisi Enam

Meskipun dua contoh di atas tampaknya tidak serupa, tetapi sebenarnya pada setiap percobaan di atas memiliki 2 sifat dasar yang sama, yaitu:

1. Setiap jenis percobaan memiliki beberapa kemungkinan hasil yang disebut kejadian atau peristiwa. Kejadian dibedakan menjadi dua, yaitu kejadian sederhana dan kejadian majemuk.
2. Secara pasti kita sangat sulit menentukan kemungkinan hasil apa yang akan terjadi pada setiap percobaan, misalnya dalam pelemparan sekeping mata uang logam, maka sulit bagi kita untuk menentukan secara pasti apakah dalam pelemparan tersebut akan keluar G atau A. Demikian pula pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam.

Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan disebut ruang sampel atau ruang contoh, yang biasanya disimbolkan dengan S. Dalam percobaan pelemparan sekeping mata uang logam kita peroleh ruang sampel $S = \{ G, A \}$, sedangkan pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam ruang sampelnya adalah $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Anggota-anggota ruang sampel disebut titik sampel atau titik contoh. Ruang sampel pada percobaan pelemparan sekeping mata uang logam mempunyai 2 titik sampel, yaitu G dan A. Sedangkan pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam mempunyai titik sampel 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

1.1.1 Kejadian Sederhana

Kejadian sederhana adalah suatu kejadian yang hanya mempunyai satu titik sampel. Pada hasil percobaan pelemparan sekeping mata uang logam, kejadian-kejadian sederhana adalah:

- $\{G\}$ yaitu kejadian muncul sisi gambar,
- $\{A\}$ yaitu kejadian muncul sisi angka.

Sedangkan pada hasil percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam, kejadian-kejadian adalah:

- {1} yaitu kejadian muncul mata dadu 1,
- {2} yaitu kejadian muncul mata dadu 2,
- {3} yaitu kejadian muncul mata dadu 3,
- {4} yaitu kejadian muncul mata dadu 4,
- {5} yaitu kejadian muncul mata dadu 5,
- {6} yaitu kejadian muncul mata dadu 6.

Contoh 1.2.1

Tentukan ruang sampel dari percobaan sekali pelemparan 2 keping mata uang logam.

Penyelesaian:

Dengan membuat daftar hasil percobaan pelemparan 2 keping mata uang logam.

Tabel 2.1 Hasil percobaan pelemparan 2 mata uang logam

		Mata Uang 2	
		A	G
Mata Uang 1	A	(A, A)	(A, G)
	G	(G, A)	(G, G)

Kita peroleh ruang sampelnya adalah $S = \{(A,A), (G,A), (A,G), (A,A)\}$.

□

2.2.2 Kejadian Majemuk

Hasil dari melempar sebuah dadu sisi enam tidak harus selalu merupakan kejadian sederhana. Dimungkinkan kejadian-kejadian itu tersusun atas gabungan beberapa kejadian sederhana. Dengan kata lain, kejadian-kejadian itu terdiri dari lebih dari satu titik sampel, kejadian semacam ini disebut kejadian majemuk. Misalnya kejadian:

- {1, 3, 5} yaitu kejadian munculnya mata dadu ganjil,
- {2, 4, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu genap,
- {4, 5, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu lebih dari 3,
- {1, 3, 4, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu bukan 5 atau 2,
- {1,6} yaitu kejadian munculnya mata dadu paling kecil dan paling besar.

Dengan pengertian kejadian majemuk di atas, maka ruang sampel adalah kasus khusus kejadian majemuk. Lebih lanjut, jika kita buat analogi dengan konsep himpunan, maka kejadian sederhana merupakan himpunan dari kejadian majemuk. Lebih luas lagi, kita dapat membuat padanan antara himpunan dan kejadian, seperti pada Tabel 2.2.

Tabel 2.2 Korespendensi antara himpunan dan kejadian

Teori Himpunan	Kejadian
Himpunan semesta	Ruang sampel S
Anggota himpunan	Titik sampel
Himpunan bagian	Kejadian
Himpunan bagian yang hanya mempunyai 1 anggota	Kejadian sederhana
Himpunan bagian yang mempunyai lebih dari 1 anggota	Kejadian majemuk

Latihan 2.2

1. Dalam suatu keluarga memiliki 3 orang anak, dua di antaranya adalah perempuan. Tentukan ruang sampelnya.
2. Suatu keluarga dengan tiga orang anak, dapat mempunyai 3 anak lelaki, 2 anak lelaki dan 1 anak perempuan, 1 anak lelaki dan 2 anak perempuan, atau 3 anak perempuan. Misalkan bahwa (*LLL*) menotasikan keluarga dengan tiga anak lelaki, (*LPP*) keluarga dengan anak pertama lelaki dan kedua anak lainnya perempuan, dan (*PLP*) keluarga dengan anak perempuan sebagai anak pertama dan ketiga dan anak lelaki sebagai anak kedua.
   a. Tulislah ruang sampel susunan tiga bersaudara yang mungkin ditemukan.
   b. Apa yang dimaksudkan dengan kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai 2 anak perempuan dan 1 anak lelaki?
   c. Bagaimana mencatat kejadian bahwa suatu keluarga dengan tiga anak mempunyai sekurang-kurangnya seorang anak lelaki?
3. Dua buah dadu sisi enam dilempar bersama. Tentukan ruang sampelnya. Jika A adalah kejadian keluar jumlah mata dadu 9, B adalah kejadian keluar mata dadu pertama tidak lebih dari mata dadu kedua, dan C adalah kejadian keluar perkalian mata dadu adalah bilangan kuadrat, tulislah A, B, dan C sebagai notasi himpunan.
4. Misalkan tiga buah dadu sisi enam dilempar sekaligus, berapa jumlah anggota ruang sampelnya? Misalkan A adalah kejadian keluar mata dadu berjumlah 7, tentukan A, dan tersusun atas berapa kejadian sederhana kejadian A?
5. Sekeping mata uang logam dan sebuah dadu sisi enam dilemparkan secara bersamaan. Hasil yang mungkin muncul pada percobaan ini dapat ditulis dalam bentuk pasangan berurutan. Misalnya:
   - (A, 5) adalah kejadian munculnya sisi angka untuk mata uang logam dan mata dadu 5.
   - (G, 3) adalah kejadian munculnya sisi gambar untuk mata uang logam dan mata dadu 3, ... dan seterusnya.

   a. Berapa banyak titik sampel pada percobaan itu? Tulislah ruang sampelnya.
   b. Tulislah kejadian-kejadian berikut ini dengan notasi himpunan.
      - Kejadian munculnya sisi angka untuk mata uang dan sembarang angka untuk dadu.
      - Kejadian munculnya sembarang sisi untuk mata uang dan angka prima untuk dadu.
      - Kejadian munculnya sisi gambar untuk mata uang dan angka komposit untuk dadu.

2.3 Peluang Suatu Kejadian

Pada aktivitas sehari-hari kita sering melihat kejadian-kejadian yang mengandung makna kemungkinan, sebagai contoh, "Berapa besar kemungkinan terbentuk Tim Olimpiade Matematika dengan susunan tertentu?". "Berapa besar kemungkinan" adalah suatu contoh tentang kejadian yang belum tentu akan terjadi. Anto bersin-bersin *kemungkinan*nya terserang flu. Terserangnya flu juga contoh tentang kejadian yang belum tentu akan terjadi.

Kata-kata kemungkinan dan peluang juga banyak kita jumpai dalam permainan, misalnya percobaan pelemparan sekeping mata uang logam, percobaan pelemparan dadu sisi enam, dan percobaan pemgambilan satu kartu dari tumpukan kartu remi (*bridge*). Dalam matematika, teori yang mempelajari cara-cara perhitungan derajat keyakinan seseorang untuk menentukan terjadi atau tidak terjadinya suatu kejadian dipelajari dalam ilmu hitung peluang (*theory of probability*).

Terdapat beberapa pendekatan untuk menghitung peluang kejadian antara lain dengan *pendekatan frekuensi nisbi atau relatif, pendekatan definisi peluang klasik*, dan *pendekatan dengan menggunakan ruang sampel*. Dua pendekatan pertama telah kita pelajari bersama ketika SMP dulu. Oleh karena itu dalam buku ini akan kita pelajari pendekatan dengan menggunakan ruang sampel. Akan tetapi pendekatan yang terakhir ini sebenarnya tidak terpisahkan dengan pendekatan definisi klasik. Oleh karena itu tidak ada jeleknya kita ingat kembali pengertian ini dan beberapa contoh terkait.

Pendekatan Definisi Peluang Klasik

Kita kembali pada percobaan pelemparan sekeping mata uang logam, bahwa kejadian munculnya sisi angka dan sisi gambar mempunyai *kesempatan yang sama*. Karena mata uang logam hanya mempunyai 2 sisi, yaitu sisi angka dan sisi gambar, maka kita tuliskan dengan:

$$P(A) = P(G) = \frac{1}{2}$$

Demikian pula pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam, bahwa kejadian munculnya setiap mata dadu mempunyai *kesempatan yang sama*, dan kita tuliskan dengan:

$$P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$$

Bertolak dari pengertian "*kesempatan yang sama*" pada dua percobaan di atas, kita mendefinisikan peluang klasik berikut ini.

Definisi: Peluang Klasik

Misalkan dalam suatu percobaan mengakibatkan munculnya n hasil yang mungkin dengan masing-masing hasil mempunyai kesempatan yang sama. Jika kejadian E dapat muncul sebanyak k kali ($k \leq n$), maka peluang kejadian E diberikan oleh:

$$P(E) = \frac{k}{n} \qquad (2.8)$$

Sebagai akibat definisi ini, maka peluang kejadian munculnya sisi angka dan peluang munculnya kejadian sisi gambar masing-masing adalah:

$$P(A) = \frac{1}{2} \text{ dan } P(G) = \frac{1}{2}$$

Dengan alasan yang sama, maka peluang kejadian munculnya setiap mata dadu adalah sama, yaitu $\frac{1}{6}$.

Contoh 2.3.1

Pada percobaan melempar sebuah dadu sisi enam, hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.

a. Kejadian munculnya mata dadu dengan angka kurang dari 3.
b. Kejadian munculnya mata dadu mata ganjil.
c. Kejadian munculnya mata dadu 2 atau 5.

Penyelesaian:

Pada percobaan melempar dadu sisi enam ada 6 hasil yang mungkin muncul, yaitu mata dadu dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, atau 6, dan masing-masing hasil itu mempunyai kesempatan sama. Dengan demikian, $n = 6$.

a. Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu dengan angka kurang dari 3. Angka-angka itu adalah 1 dan 2, sehingga $k = 2$.

   Jadi, peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. Misalkan B adalah kejadian munculnya mata dadu dengan angka ganjil. Angka-angka itu adalah 1, 3, dan 5, sehingga $k = 3$.

   Jadi, peluang kejadian B adalah $P(B) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c. Misalkan C adalah kejadian munculnya mata dadu 2 atau 5, sehingga $k = 2$.

   Jadi, peluang kejadian C adalah $P(C) = \frac{k}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

□

Contoh 2.3.2

Dalam sebuah kotak berisi 9 kelereng putih dan 6 kelereng hitam. Jika dari kotak diambil sebuah kelereng secara acak, berapa nilai peluang yang terambil itu:

a. sebuah kelereng putih,
b. sebuah kelereng hitam.

Penyelesaian:

Dalam kotak seluruhnya terdapat 9 + 6 = 15 buah kelereng, sehingga $n = 15$.

a. Kelereng putih ada 9, sehingga $k = 9$. Jadi, peluang yang terambil itu kelereng putih adalah:

$$P(1 \text{ kelereng putih}) = \frac{9}{15} = 0,6$$

b. Kelereng hitam ada 6, sehingga $k = 6$. Jadi, peluang yang terambil itu kelereng hitam adalah:

$$P(1 \text{ kelereng hitam}) = \frac{6}{15} = 0,4$$

□

Contoh 2.3.3

Dalam sebuah kotak berisi 6 bola berwarna merah dan 4 bola berwarna biru. Dari kotak itu diambil 3 buah bola secara acak. Berapa peluang kejadian munculnya, jika yang terambil itu:

a. semuanya merah?
b. semuanya biru?
c. 2 bola merah dan 1 bola biru?
d. 1 bola merah dan 2 bola biru?

Penyelesaian:

Kita akan memanfaatkan aturan kombinasi untuk menyelesaikan masalah ini. Dari 10 bola diambil 3 buah bola, seluruhnya ada:

$$n = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ cara}$$

a. 3 bola merah diambil dari 6 bola merah, seluruhnya ada:

$$k = C_3^6 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{10!}{3!3!} = 20 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil ketiga-tiganya bola merah adalah:

$$P(3 \text{ bola merah}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

b. 3 bola biru diambil dari 4 bola biru, seluruhnya ada:

$$k = C_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!1!} = 4 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil ketiga-tiganya bola biru adalah:

$$P(3 \text{ bola biru}) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$$

c. 2 bola merah dan 1 biru, seluruhnya ada:

$$k = C_2^6 \times C_1^4 = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{1!3!} = 15 \times 4 = 60 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil 2 bola merah dan 1 biru adalah:

$$P(2 \text{ bola merah dan 1 bola biru}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

d. 1 bola merah dan 2 biru, seluruhnya ada:

$$k = C_1^6 \times C_2^4 = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{4!}{2!2!} = 6 \times 6 = 36 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil 1 bola merah dan 2 biru adalah:

$$P(1 \text{ bola merah dan 2 bola biru}) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

□

Kita kembali masalah penentuan anggota tim lomba renang pada awal bab, yang banyak susunan tim yang mungkin terjadi telah dijelaskan pada Contoh 2.1.15.

Contoh 2.3.4

Tersedia 10 siswa yang memenuhi syarat menjadi tim lomba renang dari suatu SMA. Dari sejumlah siswa itu, 6 siswa pandai gaya bebas dan 4 siswa pandai gaya kupu-kupu. Tim yang dibentuk beranggotakan 3 siswa, yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu. Berapa peluang untuk memperoleh susunan tim seperti ini?

Penyelesaian:

Dengan aturan kombinasi, dari 10 siswa dipilih 3 siswa, hasil yang mungkin seluruhnya ada:

$$n = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ cara}$$

Dari Contoh 2.1.15, susunan tim yang mungkin yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu adalah sebanyak 60 cara.

Jadi, peluang untuk memperoleh tim renang yang terdiri dari 2 siswa pandai gaya bebas dan 1 siswa pandai gaya kupu-kupu adalah:

$$P(2 \text{ siswa gaya bebas dan 1 siswa gaya kupu-kupu}) = 60/120 = 1/2\,.$$

□

Pendekatan dengan Menggunakan Ruang Sampel

Pendekatan peluang yang ditentukan dengan pendekatan definisi peluang klasik yang rumusnya diberikan oleh persamaan (2.8) dapat pula ditentukan dengan menggunakan pengertian ruang sampel.

Definisi: Peluang dengan Menggunakan Ruang Sampel

Misalkan S adalah ruang sampel suatu percobaan yang setiap anggota dari S mempunyai kesempatan sama untuk muncul. Jika E adalah suatu kejadian dengan $E \subseteq S$, maka peluang kejadian E diberikan oleh:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \tag{2.9}$$

dengan: $n(E)$ adalah cacah anggota dalam himpunan kejadian E

$n(S)$ adalah cacah anggota dalam himpunan ruang sampel S

Dengan rumus pada persamaan (2.9) ini kita dapat menentukan kisaran besarnya peluang suatu kejadian. Kita ingat kembali dari teori himpunan bahwa himpunan kosong $(\varnothing)$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan. Oleh karena itu kita mempunyai hubungan:

$$\varnothing \subseteq E \subseteq S$$

Akibatnya, karena $n(\varnothing) = 0$, maka:

$$0 = n(\varnothing) \le n(E) \le n(S)$$

Jika ketaksamaan terakhir ini kita bagi dengan $n(S)$, maka:

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{atau} \quad 0 \le P(E) \le 1$$

Dari hasil ini, kita dapat menyimpulkan bahwa kisaran peluang kejadian E mempunyai batas dari 0 sampai dengan 1. Dalam hal $P(E) = 0$ kita sebut kejadian E sebagai kejadian yang mustahil terjadi, sedangkan dalam hal $P(E) = 1$ kita sebut kejadian E sebagai kejadian yang pasti terjadi.

Misalkan ditanyakan berapa peluang kejadian munculnya mata dadu 7 dari hasil pelemparan sebuah dadu sisi enam. Berapa kalipun dadu dilempar, mata dadu 7 tidak akan pernah muncul. Kejadian ini adalah contoh kejadian yang mustahil terjadi. Tentu semua kejadian munculnya mata dadu yang lebih besar dari 6, yaitu $S^c = \{7, 8, 9, \ldots\}$ adalah kejadian yang mustahil terjadi. Secara umum, untuk sembarang ruang sampel S yang *pasti* muncul sebagai dilakukannya suatu percobaan, maka S^c adalah kejadian yang mustahil terjadi. Dalam hal ini jelas bahwa:

$$P(S) = 1 \text{ dan } P(S^c) = 0$$

Contoh 2.3.5

Tiga keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan. Hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.

a. Kejadian munculnya tiga sisi gambar.
b. Kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka.

Penyelesaian:

Ruang sampel dari percobaan melemparkan tiga keping mata uang logam secara bersamaan adalah:

$$S=\{(AAA),(AAG),(AGA),(AGG),(GAA),(GAG),(GGA),(GGG)\}$$

sehingga $n(S)=8$.

a. Misalkan E adalah kejadian munculnya tiga sisi gambar, maka $E=\{(GGG)\}$ dan $n(E)=1$.

   Jadi, menurut rumus (2.9) peluang kejadian munculnya tiga sisi gambar adalah:

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{1}{8}$$

b. Misalkan F adalah kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka, maka:

$$F=\{(AGG),(GAG),(GGA)\} \text{ dengan } n(F)=3$$

   Jadi, peluang kejadian munculnya tiga sisi gambar dan satu sisi angka adalah:

$$P(F)=\frac{n(F)}{n(S)}=\frac{3}{8}$$

□

Contoh 2.3.6

Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali secara bersamaan. Hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.

a. Kejadian munculnya mata dadu pertama 5.
b. Kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua adalah bilangan prima.
c. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8.

Penyelesaian:

Ruang sampel percobaan melempar dua buah dadu sisi enam secara bersama-sama adalah himpunan S yang anggotanya adalah semua pasangan berurutan pada Tabel 2.3.

Tabel 2.3 Ruang sampel percobaan pelemparan dua dadu sisi enam

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cacah anggota S, $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

a. Misalnya E_1 adalah kejadian munculnya mata dadu pertama 5, maka:

$$E_1 = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\} \text{ sehingga } n(E_1) = 6.$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu pertama 5 adalah:

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b. Misalnya E_2 adalah kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua adalah bilangan prima, maka:

$$E_2 = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\} \text{ sehingga } n(E_2) = 9.$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua bilangan prima adalah:

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

c. Misalnya E_3 adalah kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8, maka:

$$E_3 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\} \text{ sehingga } n(E_3) = 5.$$

Jadi, peluang kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8 adalah

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

□

2.3.1 Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Kita masih ingat bahwa jika sekeping mata uang logam dilemparkan sekali, maka peluang kejadian munculnya sisi angka dan sisi gambar adalah sama, yaitu:

$$P(A) = P(G) = \tfrac{1}{2}$$

Jika uang logam di atas kita lemparkan 20 kali, maka diharapkan munculnya sisi angka = $\tfrac{1}{2} \times 20 = 10$ dan munculnya sisi gambar = $\tfrac{1}{2} \times 20 = 10$.
Meskipun pada praktiknya harapan dan kenyataan belum tentu sama.

Bilangan 10 yang menyatakan harapan banyak kejadian munculnya sisi angka disebut frekuensi harapan kejadian munculnya sisi angka pada percobaan melempar sekeping uang logam sebanyak 20 kali. Bilangan 10 yang kedua menyatakan harapan banyak kejadian munculnya sisi gambar disebut frekuensi harapan kejadian munculnya sisi gambar pada percobaan melempar sekeping uang logam sebanyak 20 kali. Dengan demikian, frekuensi harapan adalah banyak kejadian yang diharapkan dapat terjadi pada sebuah percobaan. Penjelasan di atas juga menyarankan bagaimana cara menghitung besarnya frekuensi harapan dari suatu kejadian.

Misalkan sebuah percobaan dilakukan sebanyak n kali dan $P(E)$ adalah peluang kejadian E. Besarnya frekuensi harapan kejadian E adalah:

$$F_h(E) = n \times P(E) \qquad (2.10)$$

Contoh 2.3.7

Proyek penghijauan pada sebuah perkebunan setiap batang bibit tanaman mempunyai peluang hidup sama 0,9. Jika pada perkebunan itu ditanam sebanyak 1.000 batang bibit tanaman, berapa banyak bibit tanaman yang diharapkan hidup.

Penyelesaian:

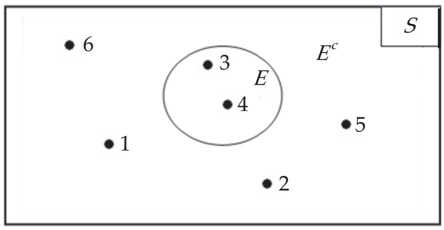
Banyak bibit tanaman adalah n = 1.000. Misalkan E adalah kejadian batang bibit tanaman hidup, maka $P(E)$ = 0,9. Jadi, banyak bibit tanaman yang diharapkan hidup adalah:

$$F_h(E) = n \times P(E) = 1000 \times 0,9 = 900 \text{ batang}$$

□

2.3.2 Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Untuk memahami pengertian komplemen suatu kejadian, kita perhatikan kembali percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam dengan ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Misalkan E adalah kejadian munculnya mata dadu 3 atau 4, yaitu $E = \{3,4\}$. Misalkan E^c adalah kejadian munculnya mata dadu bukan 3 dan 4, yaitu $E^c = \{1,2,5,6\}$, maka E^c disebut komplemen kejadian dari E, dengan notasi himpunan hubungan E, E^c, dan S dapat ditunjukkan dengan diagram Venn berikut ini.



Gambar 2.9 Diagram Venn Hubungan E, E^c, dan S

Dalam hal ini $n(E) = 2$, $n(E^c) = 4$, dan $n(S) = 6$, sehingga berlaku hubungan:

$$n(E) + n(E^c) = n(S)$$

Jika kedua ruas kita bagi dengan $n(S)$, maka diperoleh:

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E^c)}{n(S)} = 1$$

Dengan pengertian rumus (2.9): $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ dan $P(E^c) = \dfrac{n(E^c)}{n(S)}$, maka:

$$P(E) + P(E^c) = 1 \iff P(E^c) = 1 - P(E)$$

Secara umum rumus ini benar untuk sembarang kejadian.

Jika E^c adalah komplemen kejadian E, maka peluang kejadian E^c adalah:

$$P(E^c) = 1 - P(E) \qquad (2.11)$$

dengan $P(E)$ adalah peluang kejadian E, dan $P(E^c)$ adalah peluang kejadian E^c.

Contoh 2.3.8

Berdasarkan laporan dari PLN bahwa pada Desa Sejuk Hati dalam sebulan ada 25 hari listrik tidak padam. Berapa peluang kejadian listrik padam dalam sebulan?

Penyelesaian:

Misalkan E adalah kejadian listrik tidak padam dalam kurun waktu sebulan, maka $P(E)=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. Komplemen kejadian E adalah E^c, yaitu kejadian listrik padam dalam kurun waktu sebulan. Oleh karena itu berlaku hubungan:

$$P(E^c)=1-P(E)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

Jadi, peluang kejadian listrik padam dalam kurun waktu sebulan adalah $\frac{1}{6}$.

□

Contoh 2.3.9

Dalam suatu kotak berisi 6 bola kecil merah dan 4 bola kecil kuning. Dari kotak itu diambil dua buah bola secara acak. Berapakah peluang kejadian yang terambil kedua-duanya bukan bola merah?

Penyelesaian:

Misalkan E adalah kejadian terambilnya dua bola merah, maka:

$$P(E)=\frac{C_2^6}{C_2^{10}}=\frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{6\times 5}{10\times 9}=\frac{1}{3}$$

Misalkan E^c adalah kejadian yang terambil kedua-duanya bukan bola merah, maka E^c adalah komplemen kejadian dari E. Dengan demikian,

$$P(E^c)=1-P(E)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Jadi, peluang kejadian yang terambil kedua-duanya bukan bola merah adalah $P(E^c)=2/3$.

□

Latihan 2.3

1. Di dalam sebuah kantong berisi 10 bola kecil merah dan 30 bola kecil hijau. Jika diambil secara acak, berapakah peluang kejadian sebuah bola merah terambil?
2. Di dalam kantong ada 4 kelereng merah (M), 4 kelereng kuning (K), dan 4 kelereng hijau (H). Dipilih secara acak sebuah kelereng. Tentukan ruang sampel dari percobaan itu. Apakah setiap kejadian sederhana dapat muncul dengan kesempatan yang sama? Tentukan $P(M)$, $P(K)$, $P(H)$, dan $P(M^c)$.
3. Jika ke dalam kantong pada soal 2 ditambahkan sebuah kelereng merah, tentukan ruang sampel percobaan memilih secara acak sebuah kelereng. Apakah setiap kejadian sederhana dapat muncul dengan kesempatan yang sama? Tentukan $P(M)$, $P(K)$, $P(H)$, dan $P(M^c)$.

4. *Bahasa*

   Dari huruf A, B, dan C dibentuk susunan huruf dengan huruf-huruf boleh berulang. Dari susunan yang diperoleh itu diambil sebuah susunan. Hitunglah peluang kejadian yang terambil itu:
   a. sebuah susunan dengan huruf-huruf yang berbeda
   b. sebuah susunan dengan huruf-huruf yang sama

5. *Peternakan*

   Dalam sebuah kolam terdapat 10 ekor ikan emas dan 5 ekor ikan gurame. Dari kolam itu akan dipancing 4 ikan. Berapa nilai peluang jika yang terpancing adalah:
   a. keempat-empatnya ikan emas?
   b. 1 ekor ikan emas 3 dan ekor ikan gurame?
   c. 2 ekor ikan emas dan 2 ekor ikan gurame?

6. Dua buah dadu sisi enam dilempar sekali secara serempak. Berapa peluang:
   a. kejadian munculnya mata dadu kedua angka 6?
   b. kejadian munculnya mata dadu pertama sama dengan mata dadu kedua?
   c. kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu paling sedikit 8?
   d. kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu habis dibagi 3?
   e. kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu tidak habis dibagi 3?

7. Dua buah dadu sisi enam dilempar sebanyak 120 kali. Hitunglah frekuensi harapan kejadian-kejadian berikut.
   a. Kejadian munculnya mata dadu pertama 4.
   b. Kejadian munculnya mata dadu kedua angka genap.
   c. Kejadian munculnya mata dadu pertama sama dengan mata dadu kedua.
   d. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu sama dengan 8.
   e. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu bilangan ganjil.

8. *Industri*

   Suatu perusahaan komponen elektronik memproduksi 5.000 buah transistor. Jika setiap transistor mempunyai peluang hidup 0,95, berapa banyak transistor yang diharapkan hidup?

9. Sebagai pemain sirkus pemula, Yayan berlatih naik sepeda roda satu. Jika peluang jatuh adalah 0,64,
   a. berapa peluang Yayan tidak jatuh?
   b. berapa kali latihan itu yang diharapkan tidak jatuh, jika latihan dilaksanakan 60 kali?

10. Sebuah bola dimabil dari kotak yang berisi 10 bola merah, 4 bola kuning, dan 6 bola hijau. Hitunglah peluang kejadian yang terambil itu adalah:
    a. bola merah,
    b. bola kuning,
    c. bukan bola merah,
    d. bukan bola hijau.

11. *Managemen*

    Panitia pertunjukkan panggung terbuka mengundang 10 orang penyanyi yang terdiri dari 7 penyanyi wanita dan 3 penyanyi pria. Berhubung keterbatasan waktu, hanya akan ditampilkan 5 orang penyanyi dan masing-masing penyanyi mempunyai hak yang sama untuk tampil. Berapa peluang tampilnya 5 orang penyanyi itu, jika disyaratkan bahwa:
    a. sekurang-kurangnya 2 penyanyi wanita?
    b. sekurang-kurangnya 2 penyanyi pria?
    c. paling banyak 2 penyanyi wanita?
    d. paling banyak 2 penyanyi pria?

2.4 Peluang Kejadian Majemuk

Kita perhatikan kembali ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dari hasil percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam. Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil, ditulis $A = \{1, 3, 5\}$, dan B adalah kejadian munculnya mata dadu prima, ditulis $B = \{2, 3, 5\}$. Dari kedua kejadian tersebut kita dapat memperoleh dua kejadian, yaitu:

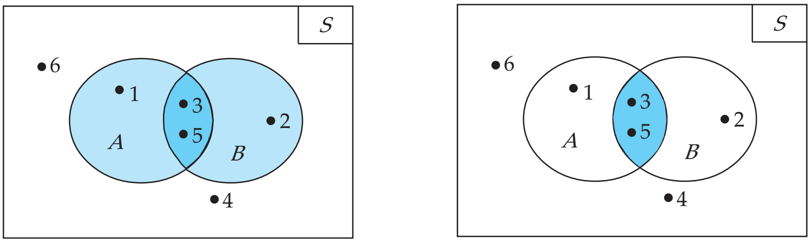
- Kejadian munculnya mata dadu angka ganjil *atau* mata dadu angka prima, yang dengan notasi himpunan dapat kita tuliskan sebagai:

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

- Kejadian munculnya mata dadu angka ganjil *dan* mata dadu angka prima, yang dengan notasi himpunan dapat kita tuliskan sebagai:

$$A \cap B = \{3, 5\}$$

Ilustrasi dari kedua kejadian itu dapat kita perhatikan pada diagram Venn berikut ini.



(a) $A \cup B$ (b) $A \quad B$

Gambar 2.10 Kejadikan Gabungan dan Irisan

2.4.1 Peluang Gabungan Dua Kejadian

Dengan menggunakan sifat-sifat gabungan dua himpunan, kita dapat menghitung peluang gabungan dua kejadian. Kita ingat kembali bahwa banyak anggota dari himpunan $A \cup B$ adalah:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Jika kedua ruas kita bagi dengan $n(S)$, dengan $n(S)$ adalah banyak anggota dalam ruang sampel S, maka kita peroleh:

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Menurut definisi peluang menggunakan ruang sampel persamaan (2.9), maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Hasil berlaku untuk umum untuk sembarang kejadian di dalam ruang sampel S.

> Aturan Penjumlahan
>
> Jika A dan B adalah sembarang dua kejadian di dalam ruang sampel S, maka peluang kejadian $A \cup B$ adalah:
>
> $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad 2.12)$$

Contoh 2.4.1

Sebuah dadu sisi enam dilemparkan sekali, berapakah peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap atau angka yang habis dibagi 3?

Penyelesaian:

Ruang sampel, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ dengan $n(S) = 6$. Misal A kejadian munculnya mata dadu angka genap, dan B kejadian munculnya mata dadu angka yang habis dibagi 3, maka:

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,6\}, \text{ dan } A \cap B = \{6\}$$

dengan $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, dan $n(A \cap B) = 1$. Dalam hal ini,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \; P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \text{ dan } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Dengan rumus persamaan (2.12), kita peroleh:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 1/2 + 1/3 - 1/6 = 2/3. \end{aligned}$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap atau angka yang habis dibagi 3 adalah $2/3$.

□

Contoh 2.4.2

Dalam satu set kartu *bridge* ada 52 kartu, terdiri atas 13 kartu sekop (♠) berwarna hitam, 13 kartu cengkeh (♣) berwarna hitam, 13 kartu hati (♥) berwarna merah, dan 13 kartu berlian (♦) berwarna merah. Setiap jenis terdiri atas kartu bernomor 2, 3, 4, ..., 10, Jack (J), Ratu (Q), Raja (K), dan As (A). Jika diambil satu kartu dari satu set kartu *bridge*, berapakah peluang kejadian yang terambil satu kartu berwarna hitam atau satu kartu K?

Penyelesaian:

Jumlah kartu yang berwarna hitam ada 26 buah, yaitu dari sekop dan cengkeh. Misalkan A kejadian munculnya kartu hitam, maka:

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Misalkan B adalah kejadian munculnya kartu K. Karena terdapat 4 kartu K, maka:

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Tetapi dari 4 kartu K terdapat 2 kartu K yang hitam, yaitu dari sekop dan cengkeh, sehingga:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Oleh karena itu, peluang terambil 1 kartu hitam atau 1 kartu K adalah:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 1/2 + 1/13 - 1/26 = 7/13. \end{aligned}$$

Jadi, peluang kejadian yang terambil satu kartu berwarna hitam atau satu kartu K adalah $7/13$.

□

Contoh 2.4.3

Seorang siswa mempunyai peluang lulus ujian Matematika dan Bahasa Inggris masing-masing adalah 2/3 dan 4/9. Jika peluang siswa tersebut lulus paling sedikit satu mata pelajaran adalah 4/5, berapakah peluang bahwa dia akan lulus di kedua mata pelajaran di atas.

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian lulus ujian Matematika, dan B kejadian lulus ujian Bahasa Inggris. Dari yang diketahui, maka $P(A) =$ 2/3, $P(B) =$ 4/9, dan $P(A \cup B)$ = 4/5. Jadi,

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$
$$= 2/3 + 4/9 - 4/5 = 14/45$$

Jadi, peluang siswa akan lulus di kedua mata pelajaran adalah $14/45$.

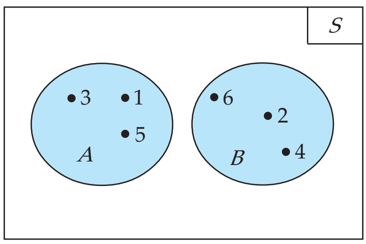
□

2.4.2 Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Misalkan pada percobaan melempar sekali dadu sisi enam terjadi dua kejadian, yaitu:

- Kejadian A adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil, yaitu $A = \{1, 3, 5\}$.
- Kejadian B adalah kejadian munculnya mata dadu genap, yaitu $B = \{2, 4, 6\}$.

Mudah kita pahami bahwa $A \cap B = \varnothing$, dalam kondisi seperti ini kita katakan bahwa kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang lepas. Diagram Venn dari dua kejadian ini diperlihatkan oleh Gambar 2.11.



Gambar 2.11 Dua Kejadian Saling Lepas

Karena $A \cap B = \varnothing$, maka $P(A \cap B) = 0$. Oleh karena itu, jika hasil ini kita substitusikan ke dalam rumus persamaan (2.12), kita peroleh:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 \quad \text{atau} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hal ini berlaku secara umum untuk sembarang dua kejadian saling lepas.

Jika A dan B adalah dua kejadian saling lepas dalam ruang sampel S, maka peluang kejadian $A \cup B$ adalah:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (2.13)$$

Contoh 2.4.4

Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set kartu *bridge.* Berapakah peluang kejadian yang terambil adalah kartu sekop atau kartu berwarna merah?

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian yang terambil kartu sekop, maka $n(A) = 13$,

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Jumlah kartu yang berwarna merah ada 26 buah, yaitu hati dan berlian. Misalkan B kejadian munculnya kartu hitam, maka:

$$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Karena A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas, maka menurut (2.13):

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 1/4 + 1/2 = 3/4. \end{aligned}$$

Jadi, peluang kejadian terambil kartu sekop atau kartu berwarna merah adalah $3/4$.

□

2.4.3 Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Bebas

Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali secara serentak. Misalkan:

- Kejadian A adalah kejadian munculnya mata dadu pertama angka 3, yaitu:

$$A = \{(3, 1), (3,2), (3,3),(3,4), (3,5), (3,6)\}$$

- Kejadian B adalah kejadian munculnya mata dadu kedua angka 5, yaitu:

$$B = \{(1, 5), (2,5), (3,5),(4,5), (5,5), (6,5)\}$$

Kejadian munculnya angka 1 pada dadu pertama tidak dipengaruhi oleh kejadian munculnya angka 5 pada dadu kedua, dan sebaliknya. Dalam hal ini, A dan B dikatakan dua kejadian saling bebas. Secara umum,

> Kejadian A dan kejadian B dikatakatan dua kejadian saling bebas, jika kejadian A tidak dipengaruhi oleh kejadian B atau sebaliknya kejadian B tidak dipengaruhi oleh kejadian A.

Sebagai catatan: bedakan pengertian dua kejadian saling lepas dan dua kejadian saling bebas.

Kembali pada dua kejadian saling bebas, A dan B, pada pelemparan dua buah dadu sisi enam di atas. Hasil percobaan diberikan oleh Tabel 2.4.

Tabel 2.4 Hasil percobaan pelemparan dua dadu sisi enam

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dari hasil percobaan itu tampak bahwa $A \cap B = \{(3,5)\}$, lihat perpotongan kolom dan baris yang diwarnai. Lebih lanjut,

$$n(S) = 36,\ n(A) = 6,\ n(B) = 6, \text{ dan } n(A \cap B) = 1$$

sehingga:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \text{ dan}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}.$$

Tampak bahwa dari bilangan-bilangan ini terdapat hubungan:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Hasil ini berlaku umum untuk sembarang dua kejadian saling bebas.

Jika A dan B adalah dua kejadian saling bebas, maka berlaku:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \qquad (2.14)$$

Sebaliknya, jika $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, maka kejadian A dan kejadian B tidak bebas.

Contoh 2.4.5

Dua buah dadu sisi enam dilempar secara serentak sekali. Kejadian A adalah kejadian munculnya angka 3 pada dadu pertama, sedangkan kejadian B adalah kejadian munculnya jumlah angka kedua dadu sama dengan 8. Periksa, apakah kejadian A dan B adalah dua kejadian yang saling bebas?

Penyelesaian:

Ruang sampel dari percobaan ini tertuang pada Tabel 2.4, dengan $n(S) = 36$.

Kejadian $A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$, $n(A) = 6$, dan

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Kejadian $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, $n(B) = 5$, dan $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}$.

Kejadian $A \cap B = \{(3,5)\}$, dengan $n(A \cap B) = 1$, dan

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

Dengan hasil perhitungan ini, kita peroleh:

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} \quad \text{atau} \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

Dari persamaan (2.14), kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang tidak saling bebas.

□

Contoh 2.4.6

Misalkan A dan B adalah kejadian yang saling bebas, tetapi tidak saling lepas. Jika $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, hitunglah peluang kejadian *B*.

Penyelesaian:

Karena kejadian A dan kejadian B saling bebas, maka berlaku:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dari yang diketahui diperoleh:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B)$$

Karena A dan B tidak lepas, maka berlaku hubungan:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Substitusi $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, dan $P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B)$, diperoleh:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2} P(B) \iff \frac{1}{2} P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\iff P(B) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Jadi, peluang kejadian B adalah $P(A) = 1/2$.

□

Contoh 2.4.7

Seorang siswa mengambil 3 jenis kursus, yaitu kursus komputer, bahasa Inggris, dan bahasa Jepang. Peluang siswa tersebut untuk lulus komputer adalah 0,5; lulus bahasa Inggris adalah 0,6; dan lulus bahasa Jepang adalah 0,75. Hitunglah peluang:

a. siswa lulus ketiga jenis kursus
b. siswa lulus kursus komputer dan bahasa Inggris
c. siswa lulus sedikitnya 2 jenis kursus

Penyelesaian:

Misalkan K, I, dan J masing-masing menyatakan kejadian siswa lulus komputer, lulus bahasa Inggris, dan lulus bahasa Jepang. Dengan demikian , kita peroleh:

$$P(K) = 0,5,\ P(I) = 0,6,\ \text{dan}\ \ P(J) = 0,75$$

a. Siswa lulus 3 jenis kursus merupakan kejadian saling bebas untuk 3 kejadian. Dengan menerapkan rumus (2.14) untuk 3 kejadian, maka peluang siswa lulus 3 jenis kursus adalah:

$$P(K \cap I \cap J) = P(K) \times P(I) \times P(J) = 0,5 \times 0,6 \times 0,75 = 0,225$$

b. Karena peluang siswa lulus bahasa Jepang adalah 0,75, maka peluang siswa tidak lulus bahasa Jepang adalah $P(J^c) = 1 - 0,75 = 0,25$. Dengan demikian, peluang siswa lulus komputer dan bahasa Inggris adalah:

$$P(K \cap I \cap J^c) = P(K) \times P(I) \times P(J^c) = 0,5 \times 0,6 \times 0,25 = 0,075$$

c. Misalkan $P(K^c)$ dan $P(I^c)$ masing-masing menyatakan peluang siswa tidak lulus komputer dan siswa tidak lulus bahasa Inggris, maka:

$$P(K^c) = 1 - 0,5 = 0,5\ \ \text{dan}\ \ P(I^c) = 1 - 0,6 = 0,4$$

Peluang siswa untuk lulus 2 jenis kursus :

$$P(K \cap I \cap J^c) = P(K) \times P(I) \times P(J^c) = 0,5 \times 0,6 \times 0,25 = 0,075$$

$$P(K \cap I^c \cap J) = P(K) \times P(I^c) \times P(J) = 0,5 \times 0,4 \times 0,75 = 0,15$$

$$P(K^c \cap I \cap J) = P(K^c) \times P(I) \times P(J) = 0,5 \times 0,6 \times 0,75 = 0,225$$

Jadi, peluang siswa lulus sedikitnya dua jenis kursus adalah:

$$0,075 + 0,15 + 0,225 = 0,450$$

□

Latihan 2.4

1. Dalam permainan satu set kartu *bridge*. Berapa peluang pengambilan satu kartu:
   a. A atau K?
   b. A atau berlian?
2. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali, hitunglah peluang kejadian akan muncul:
   a. jumlah mata dadu paling besar 4,
   b. jumlah mata dadu 5,
   c. jumlah mata dadu 7 atau lebih besar dari 7.
3. Sebuah kotak berisi 5 bola merah dan 3 bola hijau. Berapakah peluang pengambilan dua bola sekaligus bahwa bola terambil merah atau hijau?
4. Suatu kelas terdiri dari 120 siswa, 60 siswa senang sepak bola, 50 siswa senang bola basket, dan 20 siswa senang keduanya. Jika seorang siswa dipilih dari kelas itu secara acak, berapa peluang:
   a. dia senang sepak bola atau basket,
   b. dia sama sekali tidak senang sepak bola ataupun basket.
5. Seorang siswa memiliki peluang lulus pelajaran bahasa Indonesia sebesar 0,6, lulus bahasa Inggris 0,4, dan lulus keduanya 0,24. Berapa peluang siswa itu lulus dalam bahasa Indonesia atau bahasa Inggris?

6. Suatu kelas terdiri dari 20 siswa dan 40 siswi, dengan 10 siswa dan 20 siswi mempunyai nilai ulangan bahasa Inggris lebih dari 80. Hitunglah peluang seseorang yang dipilih secara acak adalah seorang siswa atau seseorang yang mempunyai nilai lebih dari 80.
7. Dua buah dadu sisi enam dilempar secara serentak sebanyak satu kali. Hitunglah peluang kejadian munculnya jumlah mata dadu:
   a. 2 atau 8
   b. 5 atau 10
   c. 2 atau 3 atau 9
   d. bukan 10 atau 12
8. Hasil survei yang dilaksanakan di sebuah sekolah tentang hobi menghasilkan data sebagai berikut. 10% siswa tidak hobi sepak bola; 65% siswa hobi sepak bola; dan 5% siswa tidak hobi sepak bola tetapi hobi bulu tangkis. Dari data ini dipilih secara acak satu orang siswa. Berapa peluang siswa itu hobi sepak bola, tetapi tidak hobi bulu tangkis?
9. Dalam kotak I terdapat 4 balon merah dan 3 balon putih, sedangkan pada kotak II terdapat 7 balon merah dan 2 balon hitam. Dari masing-masing kotak diambil satu balon secara acak. Hitunglah peluang yang terambil itu:
   a. balon merah dari kotak I dan balon merah dari kotak II
   b. balon merah dari kotak I dan balon hitam dari kotak II
   c. balon putih dari kotak I dan balon merah dari kotak II
   d. balon putih dari kotak I dan balon hitam dari kotak II
10. Diketahui $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, dan $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$. Tunjukkan bahwa kejadian A dan kejadian B saling bebas.
11. Misalkan A dan B adalah kejadian yang saling bebas, tetapi tidak saling lepas. Jika $P(A)=\frac{1}{3}$ dan $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$, hitunglah peluang kejadian B.
12. Seorang pelamar menerima panggilan untuk ujian di tiga perusahaan, X, Y, dan Z. Menurut perkiraannya, peluang diterima pada masing-masing perusahaan adalah 2/5, 3/10 dan 1/10. Berapa peluang dari kejadian:
   a. pelamar tidak diterima di salah satu perusahaan,
   b. pelamar tidak diterima di perusahaan X atau Y,
   c. pelamar diterima di salah satu perusahaan.
13. Selama satu minggu sebuah stasiun TV mempunyai 20 program acara, 8 di antaranya berisi infotainment, 9 acara berkaitan olahraga, dan 5 mata acara berisi infotainment dan sekaligus olahraga. Jika Tobing memilih satu acara secara acak, berapakah peluang Tobing akan mendapatkan program acara yang berisi infotainment atau olah raga atau keduanya?
14. *Manajemen*

    Sebuah perusahaan HP mengirim produknya ke distributor dengan mengemas dalam suatu kotak. Setiap kotak dapat menampung 12 HP dengan jenis yang sama. Untuk menghindari komplain dari distributor, sebelum memasukkan HP ke dalam kotak, perusahaan menguji 3 HP yang diambil secara acak dari setiap kotak. Semua HP dalam kotak dikirim, apabila tidak ada HP yang rusak dalam pengujian tersebut.
   a. Berapakah peluang terdapat 1 HP yang rusak?
   b. Berapakah peluang terdapat 2 HP yang rusak?
   c. Berapakah peluang suatu kotak itu tidak terkirim?
   d. Berapakah peluang suatu kotak itu terkirim?

15. *Sosial*

Peluang Pak Harno terpilih dalam pilkades Desa Gondangmanis adalah $3/8$, sedangkan peluang Pak Sukamto terpilih dalam pilkades Desa Madurahayu adalah $5/6$. Berapa peluang:

a. keduanya terpilih menjadi kepala desa,
b. keduanya tidak terpilih, dan
c. Pak Harno terpilih dan Pak Sukamto tidak terpilih?

2.5 Peluang Kejadian Bersyarat

Untuk memahami peluang dari kejadian bersyarat, kita ikuti percobaan pelemparan dadu sisi enam sebayak satu kali. Misalkan kejadian munculnya mata dadu angka ganjil disyaratkan munculnya kejadian mata dadu angka prima lebih dahulu.

Ruang sampel percobaan adalah $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. Misalkan $A = \{2,3,5\}$ adalah kejadian munculnya mata dadu angka prima. Kita anggap $A = \{2,3,5\}$ sebagai ruang sampel baru untuk kejadian munculnya mata dadu angka ganjil, $B = \{3,5\}$. Dalam hal ini, munculnya kejadian B muncul tergantung atau disyaratkan kemunculan kejadian A lebih dahulu, kejadian semacam ini disebut kejadian bersyarat.

Secara umum, munculnya kejadian A dengan kejadian B muncul terlebih dahulu ditulis $A|B$. Sebaliknya, munculnya kejadian B dengan kejadian A muncul terlebih dahulu ditulis $B|A$.

Bagaimana menghitung peluang kejadian bersyarat, kita kembali pada percobaan di atas. *Pertama*, dalam ruang sampel semula $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, dengan $A = \{2,3,5\}$, $B = \{3,5\}$, maka $A \cap B = \{3,5\}$. Dengan demikian, kita peroleh:

$$P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{3},\ \text{dan}\ P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

Kedua, dalam ruang sampel yang baru $A = \{2,3,5\}$, $n(A) = 3$. Kejadian bersyarat $B|A = \{3,5\}$, $n(B|A) = 2$. Peluang kejadian bersyarat $B|A$ adalah:

$$P(B|A) = \frac{n(B|A)}{n(B)} = \frac{2}{3}$$

karena kejadian bersyarat $B|A$ terjadi di dalam ruang sampel B.
Dari kedua perhitungan di atas, kita peroleh hubungan bahwa:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & = & \frac{1}{2} & \times & \frac{2}{3} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ P(A \cap B) & = & P(B) & \times & P(B|A) \end{array}$$

Dari hasil ini, maka kita peroleh:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ \text{asalkan}\ P(B) \neq 0$$

Pembahasan di atas mengarah hasil yang berlaku secara umum untuk kejadian bersyarat.

1. Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi lebih dahulu adalah:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ \text{asalkan}\ P(B) \neq 0 \qquad (2.15a)$$

2. Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi lebih dahulu adalah

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ asalkan } P(A) \neq 0 \qquad (2.15b)$$

Contoh 2.5.1

Sebuah kotak berisi bola hitam dan bola putih, dan setiap bola yang ada diberi tanda X atau Y. Komposisi bola-bola yang ada dalam kotak tersebut adalah:

Tabel 2.5

Tanda	Hitam (B)	Putih (W)	Total
X	5	3	8
Y	1	2	3
Total	6	5	11

Dipilih satu bola secara acak dari kotak tersebut. Tentukan peluang dari kejadian terambil bola hitam bertanda X.

Penyelesaian:

Masalah ini dapat kita pandang sebagai peluang kejadian munculnya bola hitam (B) dengan syarat bola bertanda X muncul lebih dahulu. Terdapat 8 bola bertanda X dari total 11 bola, sehingga peluang kejadian munculya X adalah:

$$P(X) = \frac{8}{11}$$

Dari 8 bola bertanda X terdapat 5 bola berwarna hitam (B), sehingga $B \cap X = 5$, dan

$$P(B \cap X) = \frac{5}{11}$$

Dengan rumus persamaan (2.15), kita peroleh:

$$P(B/X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{5/11}{8/11} = \frac{5}{8} = \frac{5/11}{8/11} = \frac{5}{8}$$

Jadi, peluang kejadian terambil bola hitam bertanda X adalah $P(B \mid X) = 5/8$.

□

Contoh 2.5.2

Sebuah dadu sisi enam dilemparkan sekali dan muncul kejadian mata dadu angka genap. Tentukan peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap yang lebih besar dari 3.

Penyelesaian:

Ruang sampel S = {1,2,3,4,5,6}. Misal kejadian munculnya mata dadu genap adalah A = {2,4,6}, dan kejadian munculnya mata dadu lebih besar 3 adalah B = {4, 5, 6}, sehingga $A \cap B = \{4,6\}$. Dengan demikian,

$$P(A) = \frac{3}{6} \text{ dan } P(A \cap B) = \frac{2}{6}$$

Dengan rumus (2.15), kita peroleh:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap yang lebih besar dari 3 adalah $P(B|A) = 2/3$.

□

Tugas Kelompok

Sebuah perusahaan memiliki 3 mesin, M_1, M_2, dan M_3. Kinerja dari setiap mesin berturut-turut adalah H_1, H_2, dan H_3. Mesin pertama menghasilkan 60% dari seluruh produksi, mesin kedua menghasilkan 25% dari seluruh produksi, dan mesin ketiga menghasilkan 15% dari seluruh produksi. Selanjutnya berdasarkan hasil pemeriksaan diketahui bahwa 5% dari H_1, 2% dari H_2, dan 80% dari H_3 adalah cacat. Jika suatu hasil produksinya diambil secara acak, berapakah peluang hasil itu cacat? Diskusikan dalam kelompok Anda.

Tugas Mandiri

Untuk menambah wawasan Anda tentang peluang lebih lanjut, kunjungilah:
http://fionaangelina.com/2007/10/07/probabilitas

Latihan 2.5

1. Dalam suatu kotak terdapat 5 kelereng merah, 2 kelereng putih, dan 4 kelereng hijau. Jika diambil dua kelereng berturut-turut tanpa dikembalikan, berapa peluang terambil 2 kelereng hijau?
2. Misalkan terdapat 3 bolam lampu yang rusak dicampur dengan 6 bola lampu yang baik. Jika dipilih secara acak 2 bolam lampu untuk dipasang, maka berapa peluang terambil bolam lampu pertama dan kedua dalam keadaan baik?
3. Dua kartu diambil satu per satu secara acak tanpa dikembalikan dari satu set kartu *bridge*. Tentukan peluang kejadian pengambilan pertama muncul *As* dan pengambilan kedua *King*!
4. Dalam suatu kelas terdapat 20 orang siswa, 5 di antaranya berbaju putih, 10 siswa berbaju cokelat, dan 5 lainnya berbaju merah. Dipilih secara acak 3 orang siswa satu per satu, tentukan peluang kejadian:
   a. pertama terpilih memakai baju cokelat
      kedua terpilih memakai baju putih
      ketiga terpilih memakai baju merah
   b. tiga siswa terpilih memakai baju cokelat semua
   c. Dua siswa terpilih berbaju cokelat dan satu siswa berbaju putih

5. Seorang siswa memiliki peluang lulus ujian bahasa Inggris adalah 0,6. Jika setelah ia lulus bahasa Inggris, maka peluang lulus ujian komputer adalah 0,8. Hitung peluang siswa tersebut lulus ujian bahasa Inggris dan komputer.

6. Sebuah kotak berisi 7 bola pink dan 3 bola kuning. Jika dari kotak tersebut diambil 3 bola secara acak satu per satu, maka hitunglah peluang kejadian:
   a. terambil 3 bola kuning,
   b. pengambilan pertama pink, kedua kuning, dan ketiga pink,
   c. terambil 2 bola pink dan 1 bola kuning.

7. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama sebanyak satu kali. Misalkan:
   A adalah kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu sama dengan 6,
   B adalah kejadian munculnya mata dadu angka 1 atau 2 pada dadu pertama,
   C adalah kejadian munculnya salah satu mata dadu angka 2.

   Dari data-data ini, hitunglah:
   a. $P(A|B)$
   b. $P(B|A)$
   c. $P(A|C)$
   d. $P(C|B)$

8. Sebuah mobil yang diuji mempunyai peluang gagal dalam ujian karena lampu adalah 1/4, karena setir adalah 1/2, dan karena rem adalah 1/3. Berapa peluang mobil itu akan lulus?

9. Pesawat Boeing 747 memiliki 4 mesin yang bekerja secara independen. Pesawat tersebut dapat terbang, jika minimal 2 dari mesin-mesin tersebut bekerja dengan baik. Jika peluang terbaiknya mesin A = 0,8, mesin B = 0,7, mesin C = 0,6, dan mesin D = 0,9. Hitung peluang kejadian dari:
   a. pesawat tersebut ditunda penerbangannya
   b. pesawat tersebut dalam kondisi sangat baik
   c. pesawat tersebut layak diterbangkan

10. Jika kejadian A dan B saling-bebas dengan $P(A) = 1/2$ dan $P(A \cup B) = 2/3$, hitunglah:
    a. $P(B)$
    b. $P(A|B)$
    c. $P(B^c|A)$

11. *Sosial*

    Suatu survei dilakukan terhadap 1.000 orang pelanggan suatu stasiun TV tentang dua tanyangan olahraga dan berita dari stasiun tersebut. Pelanggan ditanya apakah puas atau tidak puas terhadap acara olahraga dan berita tersebut. Tabel berikut menyajikan data hasil survei yang telah dilakukan.

Acara	Puas	Tidak Puas	Total
Olahraga	275	125	400
Berita	475	125	600
Total	750	250	1.000

    Jika keadaan puas dianggap sebagai kejadian sukses dan tidak puas sebagai kejadian gagal, tentukan masing-masing peluang berikut.
    a. P(olahraga dan sukses)
    b. P(berita dan sukses)
    c. P(olahraga dan gagal)
    d. P(berita dan gagal)

Rangkuman

1. Aturan Perkalian
   Jika n_k adalah banyaknya cara mengisi tempat ke-k setelah (k – 1) tempat-tempat sebelumnya terisi, maka banyaknya cara mengisi k tempat yang tersedia itu adalah:
   $$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$$
2. Permutasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan P_k^n adalah:
   $$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}$$
   dengan $k \leq n$
3. Kombinasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan C_k^n adalah:
   $$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. Kejadian adalah kemungkinan hasil dari suatu percobaan.
5. Kejadian sederhana adalah kejadian yang tidak mungkin muncul secara serempak dengan kejadian lain.
6. Kejadian majemuk adalah kejadian yang tersusun dari kejadian-kejadian sederhana.
7. Ruang sampel, dinotasikan dengan S, adalah keseluruhan kejadian sederhana dari suatu percobaan.
8. Peluang kejadian A, ditulis $P(A)$, adalah pengukuran tingkat keyakinan akan muncul atau tidak munculnya suatu kejadian.
9. Jika A kejadian dan S ruang sampel, maka:
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $A \cap A^c = \varnothing$
   c. $P(A^c) = 1 - P(A)$
   d. $0 \leq P(A) \leq 1$
   e. $P(S) = 1$ dan $P(S^c) = 0$
10. Aturan Penjumlahan: jika A dan B dua kejadian sembarang, maka:
    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
11. Jika kejadian A dan kejadian B saling lepas, maka:
    $$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
12. Peluang bersyarat adalah peluang kejadian A dengan kejadian B diketahui telah terjadi, dan peluangnya:
    $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
13. Jika kejadian A dan kejadian B saling bebas, maka:
    $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Math Info

Sumber: www.swlearning.com

Gambar 2.12
Blaise Pascal

Sumber: www.et.fh-koeln.de

Gambar 2.13 *Leibniz*

Munculnya teori peluang mungkin berawal dari adanya perjudian. Setiap orang yang berjudi pasti ingin menang. Akan tetapi, banyak orang yang berkata bahwa bermain judi adalah mempertaruhkan keberuntungan, karena terkadang menang dan terkadang kalah. Oleh karena banyak penjudi yang tidak puas akan kekalahan, maka mereka meminta bantuan para ahli matematika untuk mengatur suatu strategi yang bagus sehingga kemungkinan untuk menang lebih besar. Matematikwan yang dimaksud, antara lain Pascal, Leibniz, Fermat, dan James Bernoulli.

Selain dalam perjudian, banyak bidang-bidang lain yang berkaitan dengan kejadian-kejadian yang bersifat peluang, menggunakan bantuan teori peluang. Misalkan pada peramalan cuaca, penanaman modal saham, dan penelitian ilmiah.

Sumber: www.york.ac.uk

Gambar 2.14 *Fermat*

Sumber: www.et.fh-koeln.doc

Gambar 2.15
James Bernoulli

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Dari angka 3, 5, 6, 8, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri 3 angka kurang dari 600 dan ganjil. Banyak bilangan-bilangan yang mungkin adalah ... .
   A. 26   D. 18
   B. 24   E. 16
   C. 20
2. Lima siswa pergi survei harga laptop ke luar kota dengan menyewa sebuah mobil. Dua di antara siswa itu ada 2 orang yang tidak dapat menyetir. Banyak cara mereka duduk di dalam mobil adalah ... .
   A. 120   D. 24
   B. 72   E. 12
   C. 60
3. Banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari kata "*K, A, T, A, K, A, N*" adalah ... .
   A. 90   D. 420
   B. 105   E. 840
   C. 210
4. Seorang siswa diwajibkan mengerjakan 5 dari 7 soal, tetapi soal nomor 1 dan nomor 2 harus dikerjakan. Banyak pilihan yang dapat diambil adalah ... .
   A. 7   D. 21
   B. 10   E. 35
   C. 12
5. Nilai n yang memenuhi $P_2^n = 12$ adalah ... .
   A. –4   D. 3
   B. –2   E. 4
   C. 2
6. Tersedia angka 0, 2, 3, 4, 5, dan 7, akan dibuat suatu bilangan yang terdiri dari 4 angka boleh berulang yang habis dibagi 5. Jumlah bilangan yang mungkin dibuat adalah ... .
   A. 432   D. 240
   B. 360   E. 180
   C. 320
7. Sebuah panitia beranggotakan 4 orang akan dipilih dari 4 pria dan 7 wanita. Jika dalam panitia tersebut diharuskan ada paling sedikit 2 wanita, maka banyaknya cara memilih ada ... .
   A. 27   D. 672
   B. 301   E. 1.008
   C. 330

8. Dalam kotak berisi 7 bola merah dan 5 bola putih. Diambil 3 bola sekaligus. Peluang terambilnya sekurang-kurangnya 1 bola putih adalah ... .

A. $37/44$ D. $21/44$
B. $35/44$ E. $4/11$
C. $25/44$

9. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama. Peluang muncul kejadian jumlah mata dadu bilangan ganjil adalah ... .

A. $2/3$ D. $1/4$
B. $1/2$ E. $1/6$
C. $1/3$

10. Dilemparkan dua buah dadu sisi enam secara serempak sebanyak 360 kali. Frekuensi harapan muncul mata dadu berjumlah 7 dan 10 adalah ... .

A. 20 kali D. 4 kali
B. 12 kali E. 3 kali
C. 5 kali

11. Jika diketahui $C_3^n = 2n$, maka $C_7^{2n} = \ldots$.

A. 120 D. 90
B. 116 E. 80
C. 112

12. Dari 200 siswa pada suatu SMA diketahui bahwa peluang siswa gemar internet adalah $P(A)$ sebesar $17/40$ dan peluang siswa gemar membaca adalah $P(B)$ sebesar $11/20$. Diketahui bahwa $P(A \cap B) = 7/40$. Banyak siswa yang gemar internet atau membaca, tetapi tidak kedua-duanya adalah ... .

A. 1.250 D. 400
B. 750 E. 350
C. 500

13. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan secara bersamaan sebanyak satu kali. Peluang kejadian munculnya mata dadu angka 1 untuk dadu kedua dengan syarat kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu kurang dari 5 terlebih dahulu adalah ... .

A. $2/3$ D. $1/4$
B. $1/2$ E. $1/6$
C. $1/3$

14. Diketahui kejadian A dan kejadian B dengan $P(A)$ = 1/2, $P(B)$ = 1/3, dan $P(A \cap B) = 1/4$, maka $P(A \cup B)$ = ...

A. $7/12$ D. $7/8$
B. $2/3$ E. $11/12$
C. $3/4$

15. Sebuah kotak berisi 5 balon hijau dan 3 balon kuning. Dari kotak itu diambil 2 balon secara berurutan tanpa dikembalikan. Peluang kejadian terambil balon hijau pada pengambilan pertama dan balon kuning pada pengambilan kedua adalah ...

A. $15/56$ D. $25/56$
B. $18/56$ E. $35/56$
C. $20/56$

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Dari angka 3, 5, 6, 7, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri dari tiga angka yang berbeda. Berapa banyak bilangan yang terbentuk yang kurang dari 400?
17. Tiga macam hadiah yang berupa TV, *video player*, dan HP akan diberikan kepada 10 karyawan teladan. Berapa macam cara memberikan hadiah tersebut?
18. Tabel berikut adalah data dari distribusi frekuensi dari 200 kotak yang berisi buah apel impor. Jika dipilih satu kotak secara acak, berapa peluang bahwa kotak tersebut berisi tidak lebih dari 214 buah apel.

Banyak Apel per Kotak	Banyak Kotak
200 – 204	45
205 – 209	40
210 – 214	45
215 – 219	50
220 – 224	20

19. Peluang bahwa tembakan A mengenai sasaran 1/4 dan peluang tembakan B mengenai sasaran adalah 2/5. Jika A dan B masing-masing menembak, berapakah peluang bahwa kedua tembakan itu mengenai sasaran?
20. Dalam sebuah kotak terdapat m bola berwarna merah dan p bola berwarna putih. Jika satu diambil secara acak dari kotak itu, maka peluang memperoleh bola merah adalah 2/5. Jika 4 bola berwarna merah ditambahkan ke dalam kotak itu, maka peluang untuk memperoleh satu bola berwarna merah bertambah sebanyak 3/55. Tentukan m dan p.

Soal Analisis

1. Nomor-nomor telepon di wilayah Jawa Tengah terdiri dari tujuh angka yang dimulai dengan angka bukan nol. Jika nomor-nomor telepon itu dianggap sebagai suatu bilangan, hitung:
   a. banyak kemungkinan nomor telepon di Jawa Tengah
   b. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan ganjil
   c. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan genap tanpa ada angka berulang
   d. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan kurang dari 7.000.000
2. Suatu kantor memberlakukan masa percobaan terhadap setiap pegawainya. Terdapat 2 orang calon pegawai, yaitu A dan B, yang menjalani masa percobaan. Keduanya diberi proyek percobaan. Peluang A menyelesaikan pekerjaan adalah 2/3, dan peluang B menyelesaikan pekerjaan 1/3. Jika $P(S|A)$ adalah peluang memuaskan hasil pekerjaan A yaitu 3/4, dan $P(S|B)$ adalah peluang memuaskan hasil pekerjaan B yaitu 2/5,
   a. carilah peluang A menyelesaikan pekerjaan dan sukses
   b. carilah peluang B menyelesaikan pekerjaan dan sukses
   c. dapatkah Anda membantu kantor tersebut untuk menentukan pegawai yang akan dipilih?
3. Plat nomor kendaraan bermotor pada wilayah tertentu diawali dengan dua huruf, kemudian diikuti dengan bilangan yang terdiri dari 4 angka dan diakhiri dengan susunan 2 buah huruf. Perhatikan skema berikut.

   □□ □□□□ □□

   Angka dan huruf dapat dipakai berulang.
   a. Ada berapa cara untuk membuat plat nomor kendaraan itu?
   b. Jika dua huruf pertama adalah AD, berapa banyak susunan plat nomor kendaraan bermotor yang dapat disusun?
4. Tabel di bawah ini menunjukkan distribusi frekuensi nilai ujian bahasa Inggris dari 200 siswa. Jika dipilih seorang siswa secara acak, berapakah peluang bahwa nilai siswa tersebut tidak kurang dari 80?

Nilai Ujian	Frekuensi
70 – 74	55
75 – 79	45
80 – 84	30
85 – 89	50
90 – 94	20

5. *Sosial*

   Dua orang mempunyai jadwal ronda yang sama, sekali dalam minggu yang sama (Senin sampai Jumat). Masing-masing mempunyai peluang yang sama untuk ronda pada hari apa saja. Berapa peluang mereka ronda:
   a. pada hari yang sama, dan
   b. pada hari yang berurutan?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ....
Kelas : XI
Kelompok : ....
Kegiatan : Bermain kartu *bridge*
Tujuan : Menentukan peluang suatu kejadian

Tanggal : ....
Materi Pokok : Peluang
Semester : 1 (satu)

A. Alat dan bahan yang digunakan
1. 1 set kartu *bridge*
2. Buku catatan
3. Alat pencatat

B. Cara kerja
1. Buatlah kelompok yang terdiri dari 4 atau 5 siswa.
2. Setiap kelompok ambillah satu set kartu *bridge*, yang terdiri atas 13 kartu sekop (♠) dan 13 kartu cengkeh (♣) berwarna hitam, dan 13 kartu hati (♥) dan 13 kartu berlian (♦) berwarna merah. Jadi, 1 set kartu *bridge* terdiri dari 26 kartu berwarna hitam dan 26 kartu berwarna merah.
3. Ambillah 1 kartu dengan pengembalian dengan frekuensi: 15×, 30×, 45×, dan 60×. Tuliskan frekuensi munculnya kartu berwarna merah dan tentukan peluangnya.

No.	Banyak Pengambilan	15×	30×	45×	60×
1.	Frekuensi munculnya kartu merah				
2.	Peluang munculnya kartu merah				

4. Gambarkan grafik peluang munculnya kartu merah.
5. Tentukan peluang pengambilan secara keseluruhan, yaitu 150 pengambilan.
6. Dari data di atas, apa yang dapat Anda simpulkan?

C. Analisis
1. Jika percobaan pengambilan kartu dilakukan sebanyak n kali dan A muncul sebanyak k kali ($0 \le k \le n$), tentukan peluang munculnya kejadian A tersebut.
2. Jika banyak pengambilan (n) mendekati tak hingga, bagaimana nilai perbandingan munculnya kejadian dengan banyak pengambilan?
3. Bagaimana menentukan nilai peluang munculnya kejadian A tersebut?

Teka-Teki Matematika

Menebak Umur Seseorang

Andaikan kita akan menebak umur seseorang yang umurnya 60 tahun ke bawah. Susunlah bilangan 1, 2, 3, ..., 60 itu dalam 6 kartu sebagai berikut.

A

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59

B

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59

C

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	

D

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	

E

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

F

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

Mintalah orang yang akan ditebak umurnya itu meneliti bilangan-bilangan yang tertulis pada kartu-kartu itu, dan supaya ia mengatakan "ya" seandainya umurnya tercantum pada kartu-kartu itu dan mengatakan "tidak" seandainya umurnya tidak tercantum. Andaikan ia mengatakan "ya" untuk kartu-kartu bernomor *A*, *C*, dan *E*, maka umur orang itu ialah 21 tahun. Ini diperoleh dengan jalan menjumlahkan bilangan-bilangan pada sudut kiri atas dari setiap kartu yang ia sebutkan "ya", yaitu 1 + 4 + 16 = 21.

LATIHAN ULANGAN UMUM SEMESTER 1

Mata pelajaran	:	Matematika
Kelas	:	XI
Program	:	IPS
Semester	:	I
Waktu	:	150 menit
Jumlah Soal	:	50
Jenis Soal	:	Bentuk Objektif dan Bentuk Uraian

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 40, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Nilai rataan ulangan matematika dari 35 siswa adalah 58. Jika nilai Santi dan Tono digabungkan dengan kelompok tersebut nilai rataannya menjadi 59. Nilai rataan Santi dan Tono adalah ... .

   A. $77\frac{1}{2}$ D. $74\frac{1}{2}$
   B. $76\frac{1}{2}$ E. $73\frac{1}{2}$
   C. $75\frac{1}{2}$

2. Suatu data dengan rataan 20 dan jangkauan 4. Jika setiap nilai data dikalikan dengan p kemudian dikurangi dengan q diperoleh data baru dengan rataan 25 dan jangkauan 6, maka $2p + q$ = ...

   A. 4   D. 7
   B. 5   E. 8
   C. 6

3. Median dan modus dari kelompok data:

   3 6 7 5 8 4 6 9

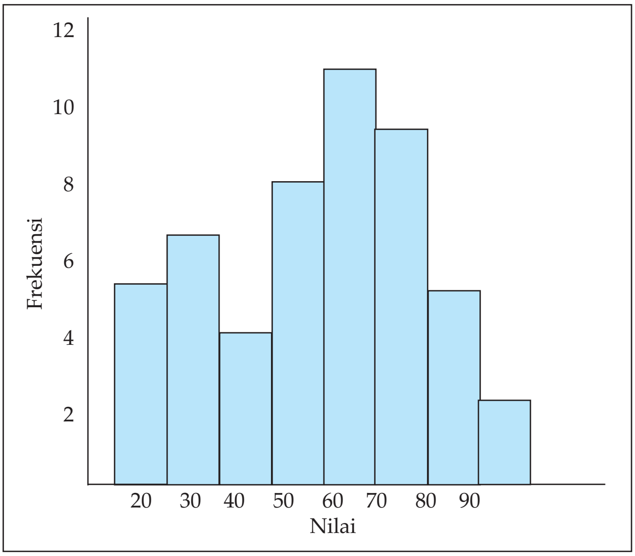
   adalah ... .

   A. 7 dan 5   D. 5 dan 7
   B. 6 dan 6   E. 5 dan 6
   C. 6 dan 7

4. Umur rataan dari kelompok pegawai swasta dan pegawai negeri adalah 42 tahun. Jika umur rataan pegawai swasta 39 tahun dan umur rataan pegawai negeri adalah 47 tahun, maka perbandingan jumlah pegawai swasta dan pegawai negeri adalah ... .

   A. 3 : 4   D. 5 : 4
   B. 3 : 5   E. 5 : 3
   C. 3 : 7

5. Suatu kelompok data mempunyai histogram seperti di bawah ini.



Pernyataan berikut yang benar adalah ... .

A. kuartil ketiga 70 dan rataan 54,2
B. kuartil bawah 40 dan rataan 52,4
C. median 60 dan kuartil atas 80
D. median 65 dan rataan 54,2
E. modus 54,2 dan median 60

6. Diketahui kumpulan data:

8 11 11,5 12 13 13,5 14 18

Pernyataan berikut yang benar adalah … .

A. rentang (R) adalah 5
B. hamparan (H) adalah 2,25
C. nilai data terkecil adalah pencilan
D. simpangan kuartil adalah 1,5
E. semua nilai data konsisten

7. Diberikan data sebagai berikut.

Interval	Frekuensi
20 – 24	2
25 – 29	4
30 – 34	10
35 – 39	a
40 – 44	8

Jika rataan kelompok data adalah 35, maka nilai a adalah ... .

A. 8
B. 10
C. 12
D. 14
E. 16

8. Ragam atau variansi dari kumpulan data:

3 5 9 10 6 6 8 9 10

adalah ... .

A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8

9. Dalam suatu kelas terdapat 40 siswa, nilai rataan bahasa Indonesia 7. Jika seorang siswa yang nilainya 10 dan 3 orang siswa yang nilainya 3 tidak disertakan, maka rataannya berubah menjadi ... .

A. 7,05
B. 7,45
C. 7,55
D. 7,25
E. 7,65

10. Hasil ujian 30 calon pegawai menghasilkan kelompok data berikut.

Interval	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	1
41 – 50	a
51 – 60	9
61 – 70	b
71 – 80	6
81 – 90	2

Calon dikatakan lulus apabila nilainya lebih dari 60. Jika banyaknya pegawai yang diterima adalah 16 orang, maka ab = ...

A. 18
B. 20
C. 24
D. 25
E. 30

11. Rataan sumbangan untuk korban bencana alam dari 25 siswa adalah Rp35.000,00. Jika sumbangan dari Kania digabungkan dengan kelompok siswa tersebut, maka rataan sumbangan menjadi Rp36.000,00. Besar sumbangan Kania adalah ... .

A. Rp45.000,00
B. Rp53.000,00
C. Rp56.000,00
D. Rp61.000,00
E. Rp71.000,00

12. Empat kelompok siswa yang masing-masing terdiri 5, 8, 10, dan 17 orang mengumpulkan dana untuk kegiatan P3K. Rataan sumbangan masing-masing kelompok adalah Rp4.000,00; Rp2.500,00; Rp2.000,00; dan Rp1.000,00. Rataan sumbangan dari 40 siswa tersebut adalah … .

A. Rp1.050,00
B. Rp1.255,00
C. Rp1.925,00
D. Rp2.015,00
E. Rp2.275,00

13. Lima karyawan, *A*, *B*, *C*, *D*, dan *E*, mempunyai pendapatan bervariasi. Pendapatan *A* besarnya setengah pendapatan *E*. Pendapatan *B* lebih Rp100.000,00 dari *A*. Pendapatan *C* lebih Rp150.000,00 dari *A*. Pendapatan *D* kurang Rp180.000,00 dari *E*. Jika rataan pendapatan kelima karyawan adalah Rp525.000,00, maka pendapatan karyawan *D* adalah … .
    A. Rp515.000,00
    B. Rp520.000,00
    C Rp535.000,00
    D. Rp550.000,00
    E. Rp565.000,00
14. Tahun yang lalu, gaji permulaan 5 orang karyawan dalam ribuan rupiah adalah: 480, 360, 650, 700, 260. Tahun ini gaji mereka naik 15% bagi yang sebelumnya bergaji kurang dari Rp500.000,00 dan 10% bagi yang sebelumnya bergaji lebih dari Rp500.000,00. Rataan besarnya kenaikan gaji mereka per bulan adalah ... .
    A. Rp60.000,00
    B. Rp62.000,00
    C. Rp63.000,00
    D. Rp64.000,00
    E. Rp65.000,00
15. Seorang pedagang beras pada bulan Januari dapat menjual 90 kg. Mulai bulan Februari sampai dengan Desember selama satu tahun, setiap bulannya selalu bertambah 10 kg dari bulan sebelumnya. Jika keuntungan per kilogram adalah Rp300,00, maka rataan keuntungan tiap bulan adalah ... .
    A. Rp14.500,00
    B. Rp29.000,00
    C. Rp43.500,00
    D. Rp174.500,00
    E. Rp348.500,00
16. Dalam menghitung rataan dari suatu data terkelompok dengan menggunakan rataan sementara, maka rataan sementara dapat ditentukan pada ... .
    A. sembarang kelas interval
    B. kelas interval dengan frekuensi tertinggi
    C. kelas interval yang berada di tengah deretan kelas interval
    D. kelas interval dengan frekuensi paling rendah
    E. kelas interval yang memuat modus
17. Diketahui data:

    1,5 2,5 6,5 7,5 9,5

    Rataan simpangan data di atas adalah ... .
    A. 2,8
    B. 2,5
    C. 2,4
    D. 1,8
    E. 0
18. Seorang siswa diwajibkan mengerjakan 9 dari 10 soal, tetapi soal nomor 1 sampai dengan nomor 8 harus dikerjakan. Banyak pilihan yang dapat diambil adalah ... .
    A. 3
    B. 5
    C. 6
    D. 8
    E. 10
19. Dari angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri 3 angka kurang dari 400. Banyak bilangan dengan angka-angka yang berlainan adalah ... .
    A. 20
    B. 35
    C. 40
    D. 80
    E. 120

20. Sebuah panitia beranggotakan 5 orang akan dipilih dari 10 pria dan 7 wanita. Banyaknya cara memilih ada ... .

A. 1.557
B. 1.575
C. 1.595
D. 5.175
E. 5.715

21. Jika diketahui $C_5^{n+2} = 2C_4^{n+1}$, maka C_{10}^{2n} = ...

A. 802
B. 808
C. 1.280
D. 1.820
E. 4.108

22. Akan dibuat nomor-nomor undian yang terdiri atas satu huruf dan diikuti dua buah angka yang berbeda, dengan angka kedua bilangan ganjil. Banyak nomor undian adalah ... .

A. 1.185
B. 1.180
C. 1.170
D. 1.165
E. 1.160

23. Banyak segitiga yang dapat dibuat dari 9 titik yang tidak segaris adalah ... .

A. 128
B. 104
C. 92
D. 84
E. 48

24. Dalam kotak berisi 4 bola merah dan 6 bola putih. Diambil 3 bola sekaligus. Peluang terambilnya bola berbeda warna adalah ... .

A. $\frac{1}{12}$
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{2}{5}$
E. $\frac{4}{5}$

25. Dalam suatu kegiatan pramuka, regu *A* harus menambah 3 anggota lagi yang dapat dipilih dari 7 orang. Banyak cara memilih yang dapat dilakukan oleh regu *A* adalah ... .

A. 28
B. 32
C. 35
D. 54
E. 70

26. Sebuah panitia yang beranggotakan 4 orang akan dipilih dari kumpulan 4 pria dan 7 wanita. Jika dalam panitia tersebut diharuskan ada paling sedikit 2 wanita, maka banyak cara memilih ada ... .

A. 27
B. 301
C. 330
D. 672
E. 1.008

27. Nilai *n* yang memenuhi $P_2^n = 12$ adalah ... .

A. – 4
B. –3
C. –2
D. 3
E. 4

28. Banyak susunan huruf yang dapat dibentuk dari kata "*MATARAM*" adalah ... .

A. 90
B. 105
C. 210
D. 420
E. 840

29. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama. Peluang munculnya jumlah mata dadu 7 atau 10 adalah ... .

A. $5/9$ D. $1/9$
B. $1/4$ E. $2/9$
C. $1/7$

30. Dilemparkan empat keping mata uang logam secara bersama sebanyak 72 kali. Frekuensi harapan muncul dua gambar adalah ... .

A. 48 kali D. 21 kali
B. 36 kali E. 18 kali
C. 27 kali

31. Sebuah kotak berisi 4 balon kuning dan 6 balon hijau. Jika dilakukan tiga kali pengambilan tanpa dikembalikan, maka peluang pada dua pengambilan pertama hijau dan pengambilan ketiga kuning adalah ... .

A. $1/15$ D. $2/15$
B. $1/12$ E. $1/6$
C. $1/8$

32. Peluang Kanta lulus SPMB adalah 0,95, sedang peluang lulus Liana 0,92. Peluang Kanta tidak lulus, tetapi Liana lulus SPMB adalah ... .

A. 0,043 D. 0,92
B. 0,046 E. 0,958
C. 0,049

33. Dua dadu sisi enam dilemparkan bersama. Peluang munculnya kejadian jumlah mata dadu ganjil adalah ... .

A. 2/3 D. 1/4
B. 1/2 E. 1/6
C. 1/3

34. Frekuensi harapan munculnya mata dadu berjumlah 7 dan 10 dari pelemparan dua dadu sisi enam sebanyak 360 kali adalah ... .

A. 3 kali D. 12 kali
B. 4 kali E. 20 kali
C. 5 kali

35. Sebuah kotak berisi 4 bola merah dan 5 bola putih. Jika dua bola diambil satu per satu tanpa pengembalian, maka peluang terambil kedua bola berbeda warna adalah ... .

A. 5/18 D. 4/27
B. 5/9 E. 2/27
C. 1/6

36. Jika sebuah uang logam yang tidak setimbang dilemparkan sekali sehingga munculnya sisi angka adalah dua kali sisi gambar, maka peluang munculnya sisi angka adalah ... .

A. 1/4 D. 2/3
B. 1/3 E. 3/4
C. 1/2

37. Jika $P(A) = 3/8$, $P(B) = 1/2$, dan $P(A \cap B) = 1/4$, maka $P(A^c \cap B^c) =$ ... .

A. 3/8
B. 1/2
C. 5/9
D. 5/8
E. 1

38. Tiga siswa, *A, B*, dan *C*, berlomba renang. Siswa *A* dan *B* mempunyai peluang yang sama untuk menang dengan peluangnya dua kali peluang dari siswa *C* untuk menang. Peluang siswa *B* menang dalam prlombaan renang tersebut adalah …

A. 1/2
B. 1/3
C. 2/5
D. 2/3
E. 3/4

39. Tiga mata uang logam yang setimbang dilambungkan sekali. Peluang bahwa ketiganya muncul sisi angka, apabila salah satu dari ketiga mata uang tersebut muncul sisi angka adalah ...

A. 1/8
B. 1/7
C. 1/6
D. 1/5
E. 1/4

40. Dua dadu dilemparkan sekali secara bersama. Jika *K* adalah kejadian bahwa jumlah mata dadu lebih dari 10, *L* adalah kejadian bahwa mata dadu pertama adalah bilangan prima, dan *M* adalah kejadian bahwa kedua mata dadu muncul angka sama, maka kejadian ... .

A. *K* dan *L* saling bebas
B. *K* dan *M* saling lepas
C. *L* dan *M* tidak saling bebas
D. *K* dan *L* tidak saling bebas
E. *L* dan *M* saling lepas

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 41 sampai dengan nomor 50, kerjakan dengan singkat dan jelas!

41. Nilai ulangan bahasa Inggris kelas XI suatu SMA diberikan oleh data berikut. Nilai rataan seluruhnya adalah 68. Nilai rataan kelas XI IPS adalah 75 dan nilai rataan kelas XI Bahasa adalah 64.

a. Tentukan perbandingan bayak siswa kelas XI IPS dengan banyak siswa kelas XI Bahasa.
b. Jika banyak siswa kelas XI Bahasa adalah 210, berapa banyak siswa kelas XI IPS?

42.

Interval	Frekuensi
21 – 30	2
31 – 40	5
41 – 50	0
51 – 60	20
61 – 70	15
71 – 80	0
81 – 90	8

Diketahui kelompok data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi di samping.

a. Tetukan median, modus, dan rataan data di samping.
b. Buatlah *ogive*nya.
c. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.

43. Jika diketahui $C_{n-1}^{n+1} = 45$, tentukan nilai n yang memenuhi.

44. Lima pasang suami-istri pergi ke suatu pesta pernikahan dengan menumpang 2 mobil, yang masing-masing berkapasitas 6 orang. Jika setiap pasang harus naik mobil yang sama, berapakah banyak cara pengaturan penumpang kedua mobil?

45. Peluang terjadinya kebakaran pada musim kemarau adalah 0,1, sedang pada musim penghujan adalah 0,05. Jika menurut catatan, lamanya musim panas adalah 60% dari sepanjang tahun, berapakah peluang terjadinya kebakaran tepat pada musim hujan.

46. Peluang bahwa 10 tahun lagi seorang suami masih hidup adalah 1/4 dan peluang bahwa 10 tahun lagi istrinya masih hidup adalah 1/3. Berapakah peluang bahwa keduanya masih hidup dalam 10 tahun lagi?

47. Dalam sebuah keranjang terdapat 20 butir telur rebus, 12 butir di antaranya adalah telur ayam dan sisanya adalah telur bebek. Dari sejumlah telur itu, 4 butir telur ayam dan 3 butir telur bebek dibuat telur asin. Kemudian diambil secara acak satu butir dari keranjang tersebut. Berapakah peluang untuk memperoleh telur bebek yang tidak asin?

48. Dalam suatu ujian, seorang siswa harus menjawab 8 soal dari 10 soal yang diujikan.
    a. Berapa banyak pilihan yang dimiliki siswa tersebut?
    b. Jika harus menjawab 3 soal pertama, berapa banyak pilihan yang dimiliki siswa tersebut ?

49. Terdapat tiga buah kotak , yaitu A, B, dan C. Kotak A berisi 6 bola merah dan 8 bola putih. Kotak B berisi 4 bola merah dan 6 bola putih. Kotak C berisi 8 bola merah dan 4 bola putih. Sebuah kotak dipilih secara acak dan sebuah bola diambil dari kotak tersebut. Jika yang terambil adalah bola merah, berapa peluang bahwa bola itu berasal dari kotak A?

50. Misalkan A adalah kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak laki-laki dan perempuan, B adalah kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak paling bayak satu laki-laki.
    a. Tunjukkan bahwa kejadian A dan B merupakan kejadian saling lepas, apabila suatu keluarga mempunyai 3 anak laki-laki.
    b. Tunjukkan bahwa kejadian A dan B merupakan kejadian tidak saling lepas, apabila suatu keluarga mempunyai 2 anak laki-laki.

BAB III

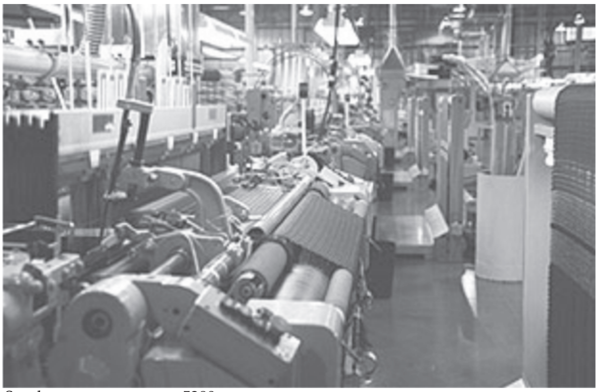
Komposisi Fungsi dan Invers Fungsi

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. membedakan pengertian relasi dan fungsi,
2. memberikan contoh fungsi-fungsi sederhana,
3. menjelaskan sifat-sifat fungsi,
4. menentukan aturan fungsi dari komposisi dua fungsi,
5. menentukan nilai fungsi komposisi terhadap komponen pembentuknya,
6. menentukan komponen fungsi jika aturan komposisinya diketahui,
7. memberikan syarat agar fungsi mempunyai invers,
8. menentukan aturan fungsi invers dari suatu fungsi,
9. menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya.

Pengantar



Sumber: www.quantum 5280

Gambar 3.1

Sebuah perusahaan menggunakan dua buah mesin untuk memproduksi bahan mentah menjadi bahan jadi. Mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Kinerja mesin I mengikuti fungsi $f(x) = 3x - 2$, sedangkan mesin II kinerjanya mengikuti fungsi $g(x) = 5x + 18$, dengan x adalah banyak bahan mentah yang disediakan. Jika bahan mentah yang tersedia untuk produksi sebanyak 10 kg, berapa unit barang jadi yang dihasilkan? Sebaliknya, jika proses produksi menghasilkan 683 unit barang jadi, berapa kg bahan mentah yang harus disediakan?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda sebaiknya ingat kembali beberapa konsep tentang himpunan, bentuk pangkat dan akar, persamaan linear, dan persamaan kuadrat.

Dengan telah menguasai konsep-konsep ini, maka permasalahan di depan akan dengan mudah diselesaikan.

3.1 Produk Cartesius dan Relasi

Produk Cartesius

Pasangan bilangan (x, y) dengan x sebagai urutan pertama dan y sebagai urutan kedua disebut pasangan terurut. Karena urutan diperhatikan, maka pasangan terurut (2, 5) dan (5, 2) memberikan dua makna yang berbeda. Selanjutnya, misalkan diketahui dua himpunan tak kosong, A dan B. Dari dua himpunan ini kita dapat membentuk himpunan baru C yang anggota-anggotanya adalah semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ sebagai urutan pertama dan $y \in B$ sebagai urutan kedua. Himpunan C yang dibentuk dengan cara ini disebut produk Cartesius atau perkalian Cartesius himpunan A dan himpunan B, yang disimbolkan dengan $A \times B$. Oleh karena itu, produk Cartesius dapat didefinisikan berikut ini.

Definisi 3.1

Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka produk Cartesius himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$. Ditulis dengan notasi:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Grafik dari produk Cartesius disebut grafik Cartesius. Ide perkalian himpunan $A \times B$ pertama kali diperkenalkan oleh Renatus Cartesius yang nama aslinya adalah Rene Descartes (1596 – 1650), matematikawan berkebangsaan Perancis.

Contoh 3.1.1

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1,2\}$. Tentukan tiap produk Cartesius berikut.

a. $A \times B$ b. $B \times A$ c. $A \times A$

Penyelesaian:

a. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\} = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$,

b. $B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \text{ dan } y \in A\} = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,

c. $A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in A\} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

□

Dalam Contoh 3.1.1, himpunan A mempunyai 3 anggota dan himpunan B mempunyai 2 anggota. Dari penyelesaian pertama tampak bahwa produk Cartesius $A \times B$ mempunyai $3 \times 2 = 6$ anggota, yaitu $(a,1)$, $(b,1)$, $(c,1)$, $(a, 2)$, $(b, 2)$, dan $(c, 2)$. Secara umum, jika banyak anggota himpunan A adalah m dan banyak anggota himpunan B adalah n, maka banyak anggota produk Cartesius $A \times B$ adalah $m \times n$.

Relasi

Kita perhatikan kembali produk Cartesius dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ dengan himpunan $B = \{1,2\}$ pada Contoh 3.1.1 bagian (a), yaitu:

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

Dari produk Cartesius $A \times B$ ini kita dapat mengambil beberapa himpunan bagian, misalnya:

$R_1 = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (1, c), (2, c)\}$,
$R_2 = \{(1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,
$R_3 = \{(2, a), (1, c)\}$.

Himpunan R_1, R_2, dan R_3 yang merupakan himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$, kita katakan sebagai relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B. Dengan pemaparan ini suatu relasi atau hubungan dapat didefinisikan berikut ini.

> **Definisi 3.2**
>
> Suatu relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$.

Jika R adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B dan pasangan terurut (x, y) adalah anggota R, maka dikatakan x berelasi dengan y, ditulis $x\,R\,y$. Tetapi jika pasangan (x, y) bukan anggota R, maka dikatakan x tidak berelasi dengan y, ditulis $x \not{R}\, y$. Untuk ketiga relasi di atas:

$R_1 = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (1, c), (2, c)\}$,

$1\,R_1\,a$, $2\,R_1\,a$, $1\,R_1\,b$, $1\,R_1\,c$, dan $2\,R_1\,c$, tetapi $2 \not{R}_1\, b$.

$R_2 = \{(1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,

$1\,R_2\,b$, $2\,R_2\,b$, $1\,R_2\,c$, dan $2\,R_2\,c$, tetapi $1 \not{R}_2\, a$, dan $2 \not{R}_2\, a$.

$R_3 = \{(2, a), (1, c)\}$.

$2\,R_3\,a$ dan $1\,R_3\,c$, tetapi $1 \not{R}_3\, a$, $1 \not{R}_3\, b$, $2 \not{R}_3\, b$, dan $2 \not{R}_3\, c$.

Misalkan R adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B yang ditulis sebagai $R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Himpunan semua ordinat pertama dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah asal atau domain, ditulis dengan D_R. Himpunan B disebut daerah kawan atau kodomain, ditulis dengan K_R. Himpunan semua ordinat kedua dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah hasil atau range, ditulis dengan R_R.

Sebagai contoh, jika $A = \{x, y, z\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, dan R adalah relasi dari A ke B yang diberikan oleh $R = \{(x,1), (y, 1), (z, 2)\}$, maka:

- daerah asalnya adalah $D_R = \{x, y, z\}$
- daerah kawannya adalah $K_R = \{1, 2, 3\}$
- daerah hasilnya adalah $R_R = \{1, 2\}$

Relasi $R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$ dapat digambarkan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan diagram panah atau grafik pada bidang Cartesius.

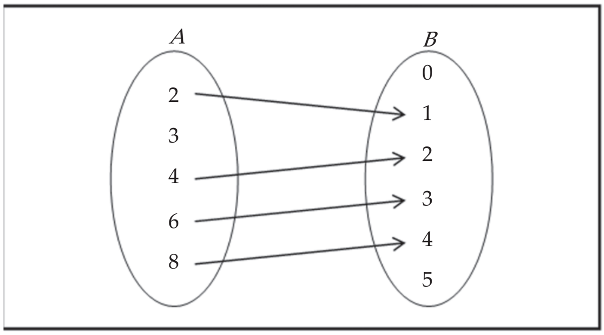
Contoh 3.1.2

Misalakan $A = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a. Jika $a \in A$ dan $b \in B$, tentukan relasi R dari A ke B yang menyatakan relasi *a dua kali b*.
b. Tunjukkan relasi R dengan diagram panah.
c. Tunjukkan relasi R dalam grafik Cartesius.

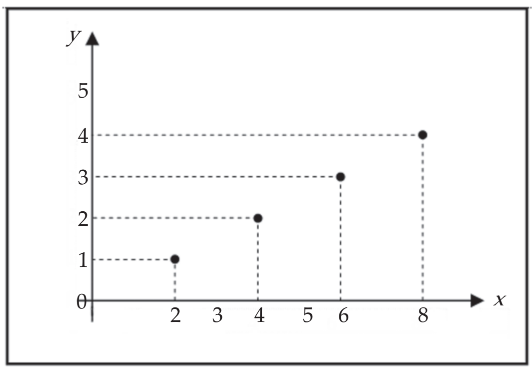
Penyelesaian:

a. Relasi $R = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$
b. Diagram panah untuk R adalah:



Gambar 3.2 Diagram Panah Relasi R

c. Grafik Cartesius dari R adalah:



Gambar 3.3 *Grafik Cartesius Relasi R*

□

Latihan 3.1

1. Misalkan A adalah himpunan dari semua siswa di kelas Anda, dan B = {motor, angkot, bus, sepeda, jalan kaki}. Buatlah relasi "*ke sekolah dengan*" dari himpunan A ke himpunan B dengan diagram panah.

2. Pilih 10 teman sekelas Anda. Namakan A adalah himpunan yang anggotanya teman-teman Anda tadi, dan ambil himpunan $B = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.
   a. Dengan diagram panah buatlah relasi "*anak nomor ke*" dari A ke B.
   b. Tulislah relasi itu sebagai pasangan terurut.

3. Setiap relasi berikut adalah relasi dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasilnya.
   a. $\{(1, p), (2, q), (4, r), (4, s)\}$
   b. $\{(1, q), (2, q), (3, r), (4, s)\}$
   c. $\{(1, r), (2, r), (4, r), (4, r)\}$
   d. $\{(1, p), (1, q), (3, r), (3, s)\}$

4. Misalkan $A = \{3, 4, 6, 7, 12 \}$ dan $B = \{ 1, 6, 8, 12, 35, 36 \}$.
   a. Gambarkan diagram panah dari relasi "*adalah faktor dari*" dari himpunan A ke B.
   b. Tuliskan relasi itu dalam pasangan terurut.
   c. Gambarkan grafik Cartesiusnya.

5. Himpunan pasangan terurut dari dua himpunan ditentukan dengan:

$$\{(-1 ,2), (1,4), (3,6), (5,8), (7,10)\}$$

   Tuliskan anggota kedua himpunan yang dimaksud. Buatlah suatu relasi yang mungkin dari himpunan pertama ke himpunan kedua.

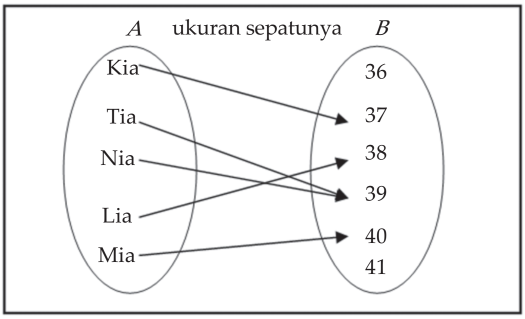
6. Suatu relasi R diberikan oleh:

$$\{(\tfrac{1}{2},8), (1,4), (2,2), (4,1), (8,\tfrac{1}{2})\}$$

   a. Tuliskan anggota-anggota dari himpunan pertama dan anggota-anggota himpunan kedua. Nyatakan suatu relasi yang mungkin dari himpunan pertama ke himpunan kedua.
   b. Gambarkan grafik Cartesius relasi R itu, kemudian gambarkan kurva yang melalui titik-titik dari relasi R.

3.2 Fungsi atau Pemetaan

Diagram panah pada Gambar 3.4 menunjukkan relasi "*ukuran sepatunya*" dari himpunan siswa-siswa (A) ke himpunan ukuran-ukuran sepatu (B). Setiap siswa hanya mempunyai tepat satu ukuran sepatu, sehingga setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.



Gambar 3.4 Diagram Panah Relasi Ukuran Sepatunya

Relasi dari A ke B yang mempunyai sifat seperti di atas disebut fungsi atau pemetaan, yang definisi formalnya diberikan berikut.

> Definisi 3.3
>
> Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang mengawankan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi f yang memetakan setiap x anggota himpunan A ke y anggota himpunan B, dinotasikan dengan:

$$f : x \to y = f(x)$$

Yang dibaca: " f memetakan x ke y", y disebut peta (bayangan) dari x oleh f atau nilai fungsi f, dan x disebut prapeta dari y oleh f. Sebagai contoh, jika fungsi:

$$f : x \to x^2 + 3x - 1$$

maka $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Nilai $f(x) = x^2 + 3x - 1$ disebut rumus untuk fungsi f. Grafik fungsi f dimaksudkan adalah himpunan pasangan (x, y) pada bidang, sehingga (x, y) adalah pasangan terurut dalam f.

Dari definisi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa pasangan terurut pada fungsi mempunyai sifat bahwa setiap anggota A hanya muncul sekali menjadi elemen pertama dalam pasangan-pasangan terurut tersebut. Oleh karena itu, (4,2) dan (4,9) tidak mungkin muncul bersama sebagai pasangan-pasangan terurut pada fungsi.

Sebagaimana pada relasi, untuk fungsi dari himpunan A ke himpunan B kita mempunyai istilah-istilah yang sama. Himpunan A disebut daerah asal atau daerah definisi (domain), ditulis D_f. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), ditulis K_f. Himpunan semua peta dalam B disebut daerah hasil (range), ditulis R_f. Untuk contoh fungsi di depan, fungsinya adalah "*ukuran sepatunya*" dengan:

- daerah asal adalah A = {Kia, Tia, Nia, Lia, Mia},
- daerah kawan adalah B = { 36, 37, 38, 39, 40, 41},
- daerah hasil adalah { 37, 38, 39, 40}.

Contoh 3.2.1

Dengan daerah asal $A = \{a, b, c\}$ dan daerah kawan ke $B = \{-1, 0, 1\}$, manakah relasi-relasi berikut yang merupakan fungsi dari A ke B?

a. $R_1 = \{(a, -1), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$

b. $R_2 = \{(a, 0), (b, 1), (c, 0)\}$

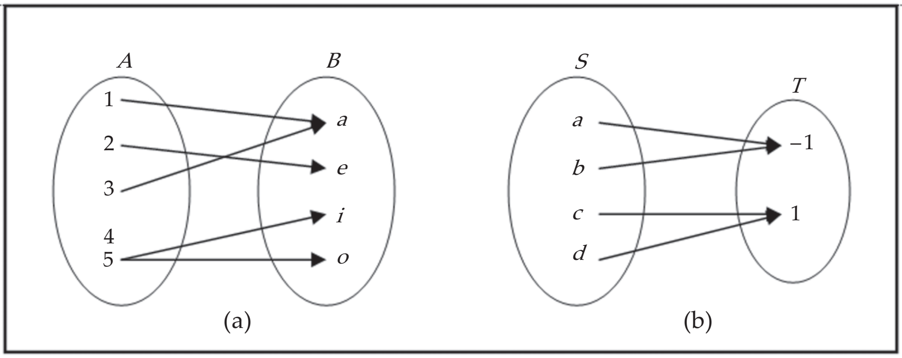
Penyelesaian:

Relasi R_1 bukan fungsi, karena elemen c mempunyai dua kawan, yaitu 0 dan 1. Tetapi R_2 adalah suatu fungsi karena setiap anggota A mempunyai tepat satu kawan dengan anggota B.

□

Contoh 3.2.2

Dari relasi yang diberikan oleh diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?



Gambar 3.5

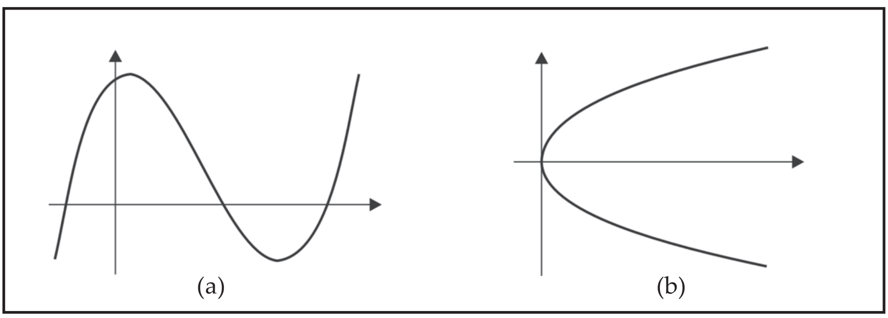
Penyelesaian:

Dari dua relasi tersebut yang merupakan fungsi adalah relasi (b). Relasi (a) bukan fungsi karena elemen 4 tidak mempunyai kawan, dan juga elemen 5 mempunyai dua kawan.

□

Contoh 3.2.3

Manakah dari dua relasi yang diberikan oleh grafik Cartesius berikut yang merupakan fungsi?



Gambar 3.6

Penyelesaian:

Grafik Cartesius adalah grafik dari pasangan terurut dari relasi. Karena fungsi adalah relasi dengan elemen pertama pada pasangan berurutan mempunyai tepat satu kawan, maka grafik Cartesius adalah grafik fungsi apabila kita buat garis vertikal akan memotong grafik tersebut tepat di satu titik. Jadi, (a) fungsi, dan (b) bukan fungsi.

$\square$

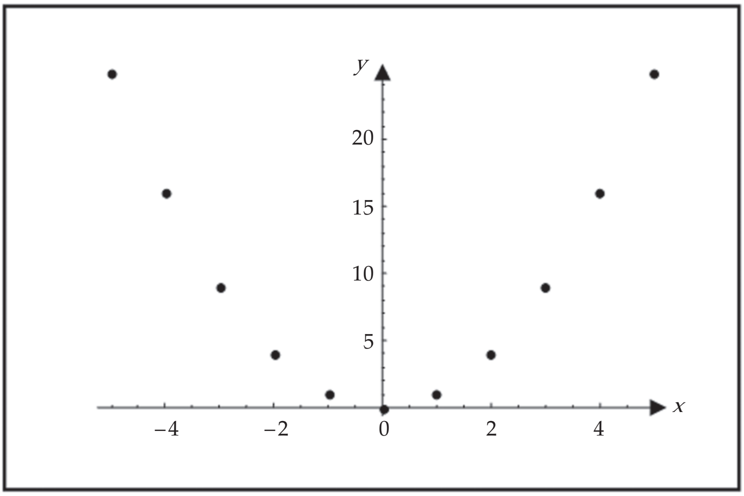
Untuk kajian selanjutnya, notasi $\mathbb{R}$ menyatakan himpunan semua bilangan real.

Contoh 3.2.4

Fungsi $f: x \to x^2$ dengan daerah asal $A = \{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$. Tentukan daerah hasil dan grafiknya.

Penyelesaian:

Daerah hasilnya adalah $\{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$. Grafiknya adalah:



Gambar 3.7

$\square$

Contoh 3.2.5

Diberikan fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $f(x) = x_2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

a. Tentukan $f(0)$, $f(4)$, $f(6)$, dan $f(-1)$.

b. Tentukan bilangan a, sehingga $f(a) = 17$.

c. Gambarkan grafik fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ dalam bidang Cartesius.

d. Tentukan daerah hasil f, jika daerah asal f ditentukan sebagai $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 5\}$.

Penyelesaian:

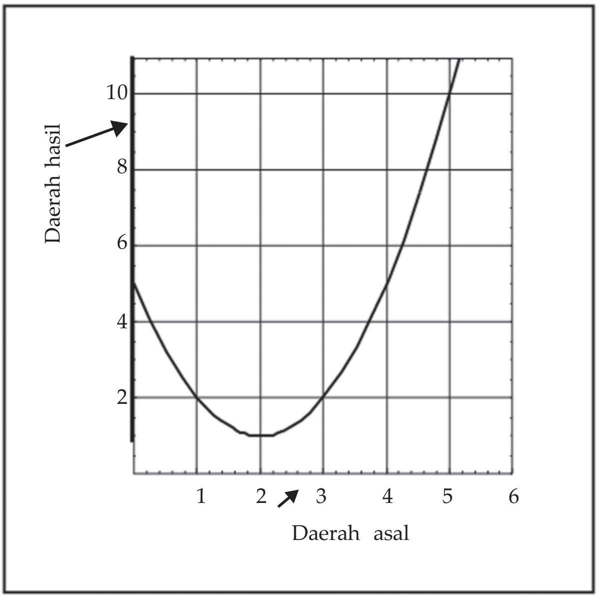
Dari rumus yang diketahui $y = f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in \mathbb{R}$, maka setiap bilangan real x dipetakan ke bilangan real y yang nilainya sama dengan $x^2 - 4x + 5$.

a. Untuk $x = 0$, maka $f(0) = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$,
untuk $x = 3$, maka $f(3) = 3^2 - 4(3) + 5 = 2$,
untuk $x = 5$, maka $f(5) = 5^2 - 4(5) + 5 = 10$,
untuk $x = -1$, maka $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 10$.

b. Untuk $x = a$, maka $f(a) = a^2 - 4a + 5$. Karena diketahui $f(a) = 17$, maka diperoleh hubungan:

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 5 = 17 &\Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-6)(a+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 6 \text{ atau } a = -2 \end{aligned}$$

c. Grafik fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ diperlihatkan pada Gambar 3.7.



Gambar 3.8 Grafik Fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$

d. Dari Gambar 3.7, untuk daerah asal $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$ diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \leq y < 10\}$.

□

Contoh 3.2.6

Fungsi f pada $\mathbb{R}$ ditentukan dengan rumus $f(x) = ax + b$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$. Diketahui $f(1) = 9$ dan $f(-2) = 3$, tentukan nilai a dan b. Kemudian hitung $f(x+h)$ dan $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $h \neq 0$.

Penyelesaian:

Karena $f(x) = ax + 6$, maka $f(1) = a + b = 9$ dan $f(2) = 2a + b = 3$. Kita mempunyai sistem persamaan dalam a dan b:

$$\begin{aligned} &\text{(i)} \quad a + b = 9 \\ &\text{(ii)} \quad -2a + b = 3 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan ini, diperoleh $a = 2$ dan $b = 7$. Jadi, diperoleh rumus $f(x) = 2x + 7$. Kemudian,

$$f(x + h) = 2(x + h) + 7 = 2x + 2h + 7$$

Untuk $h \neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(2x+2h+7)-(2x+7)}{h}$$
$$= \frac{2h}{h}$$
$$= 2$$

□

Jika daerah asal fungsi f tidak atau belum diketahui, maka daerah asal f diambil semua himpunan bilangan real yang mungkin, sehingga daerah hasilnya adalah himpunan bilangan real. Daerah asal seperti ini sering disebut daerah asal alami.

Contoh 3.2.7

Tentukan daerah asal alami untuk setiap fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$

Penyelesaian:

a. Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ bernilai real asalkan penyebutnya tidak sama dengan 0. Hal ini dipenuhi apabila $x \neq 3$. Jadi, daerah asal alami $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

b. Fungsi $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ bernilai real asalkan bilangan di bawah tanda akar tidak bernilai negatif, sehingga harus dipenuhi $x^2 - 16 \geq 0$:

$$x^2 - 16 \geq 0 \iff (x-4)(x-4) \geq 0$$
$$\iff x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4$$

Jadi, daerah asal alami $f(x) = \sqrt{x^2-16}$ adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4\}$.

c. Fungsi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ bernilai real asalkan penyebutnya tidak sama dengan 0, yaitu apabila bilangan di bawah tanda akar bernilai positif, sehingga harus $x^2 - 5x + 6 > 0$,

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \iff (x-2)(x-3) > 0$$
$$\iff x \leq 2 \text{ atau } x \geq 3$$

Jadi, daerah asal alami $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 3\}$.

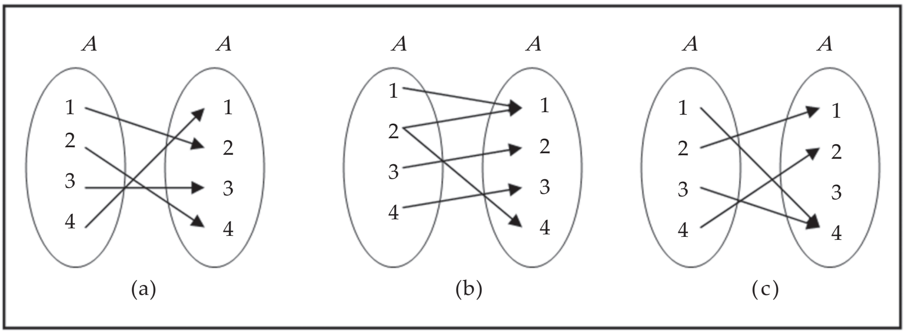
□

Latihan 3.2

1. Diketahui $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $B = \{a, b, c\}$. Apakah relasi-relasi dari A ke B berikut merupakan fungsi? Jika tidak mengapa?
   a. $R_1 = \{(1, a), (3, b), (4, c)\}$
   b. $R_2 = \{(1, c), (2, b), (3, c), (4, c)\}$
   c. $R_3 = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$
   d. $R_4 = \{(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$

2. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daearh hasil untuk fungsi-fungsi pada soal nomor 1.

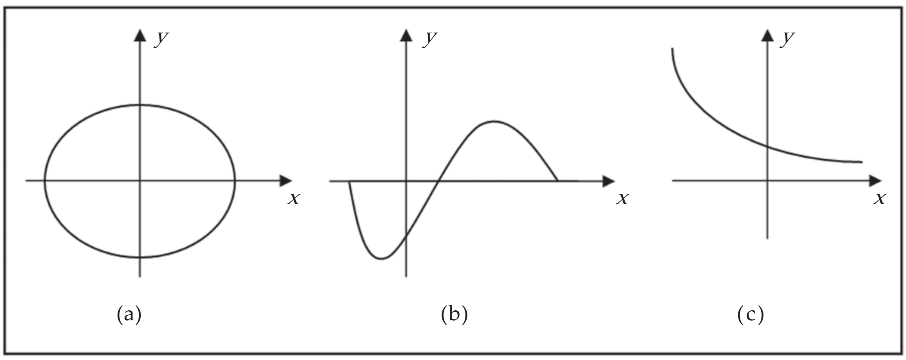
3. Dari relasi-relasi pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ dinyatakan dengan diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?



Gambar 3.9

4. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil untuk fungsi-fungsi pada soal nomor 3.

5. Dari relasi pada $\mathbb{R}$ yang digambarkan dalam bidang Cartesius pada Gambar 3.9, manakah yang merupakan suatu fungsi?



Gambar 3.10

6. Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ditentukan oleh $f(x) = 2^x$.
   a. Tentukan $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, dan $f(2)$.
   b. Elemen mana dari daerah asal sehingga petanya 64?

7. Diketahui fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dengan f(x) = $ax^2 + bx - 3$, $x \in \mathbb{R}$, $f(1) = 0$ dan $f(-3) = 12$.
   a. Tentukan nilai a dan b.
   b. Hitung $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, dan $f(-2)$.
   c. Gambarkan skesta grafik fungsi $y = f(x)$ pada bidang Cartesius.
   d. Tentukan daerah hasil fungsi f, jika daerah asal fungsi f diambil himpunan berikut.
      (i) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x \le 1\}$
      (ii) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le x \le 4\}$
8. Tentukan daerah asal alami untuk setiap fungsi berikut ini.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 4}$
   c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x}}$
   b. $f(x) = \sqrt{3x+2}$
   d. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$
9. *Industri*
   Suatu pabrik pembuat kotak kaleng akan membuat suatu kotak tanpa tutup dari selembar kaleng berukuran 8 × 15 inci dengan cara memotong keempat persegi di sudutnya dan melipat bagian sisinya.
   a. Jika panjang sisi persegi yang dipotong adalah x inci, nyatakan volume kotak sebagai fungsi dari x.
   b. Tentukan daerah asal fungsi ini.
10. Suatu tanah lapang berbentuk persegi panjang dikelilingi pagar sepanjang 240 m.
   a. Jika x meter menyatakan panjang tanah lapang tersebut, nyatakan luas tanah lapang tersebut (dalam meter persegi) sebagai fungsi dari x.
   b. Apakah daerah asal fungsi ini?

3.3 Beberapa Fungsi Khusus

Berikut ini akan kita pelajari beberapa jenis fungsi yang mempunyai ciri-ciri khusus yang sering kita jumpai dalam penerapan. Termasuk jenis fungsi khusus, antara lain fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi modulus, fungsi tangga, fungsi genap, dan fungsi ganjil

3.3.1. Fungsi Konstan

Fungsi f disebut fungsi konstan, jika terdapat suatu bilangan konstan c sehingga berlaku $f(x) = c$, untuk setiap x pada daerah asal.

Contoh 3.3.1

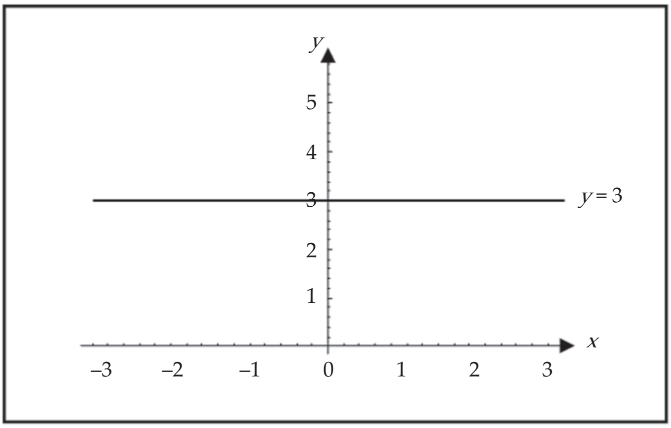
Diketahui fungsi konstan $f(x) = 3$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

a. Carilah $f(0)$, $f(7)$, $f(-1)$, dan $f(a)$.
b. Carilah daerah hasilnya.
c. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:

a. Dari definisi f, kita peroleh:
   $f(0) = 3$, $f(7) = 3$, $f(-1) = 3$, dan $f(a) = 3$.
   Semua elemen di daerah asal berkawan dengan 3.
b. Daerah hasilnya adalah $R_f = \{3\}$.

c. Grafiknya



Gambar 3.11 Grafik Fungsi *f(x)* = 3

□

3.3.2 Fungsi Identitas

Fungsi f disebut fungsi identitas, jika untuk setiap x pada daerah asal berlaku $f(x) = x$, fungsi ini sering disimbolkan dengan I.

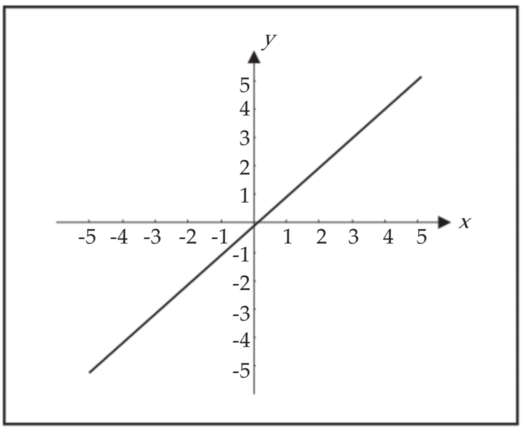
Contoh 3.3.2

Untuk fungsi identitas $I(x) = x,\ x \in \mathbb{R}$,

a. carilah $I(0)$, $I(7)$, $I(-1)$, dan $I(a)$
b. carilah daerah hasilnya
c. gambarlah grafiknya

Penyelesaian:

a. Dengan definisi I,
   $I(0) = 0$, $I(7) = 7$, $I(-1) = -1$, dan $I(a) = a$.
b. Daerah hasilnya adalah $R_f = \mathbb{R}$.
c. Grafiknya



Gambar 3.12 Grafik Fungsi Identitas

□

3.3.3 Fungsi Linear

Fungsi f disebut fungsi linear, jika f mempunyai bentuk $f(x) = ax + b$, untuk semua x dalam daerah asal, dengan a dan b konstan, dan $a \neq 0$. Grafik fungsi linear berbentuk garis lurus, yang mempunyai persamaan $y = ax + b$.

Contoh 3.3.3

Diketahui fungsi $f(x) = 3x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

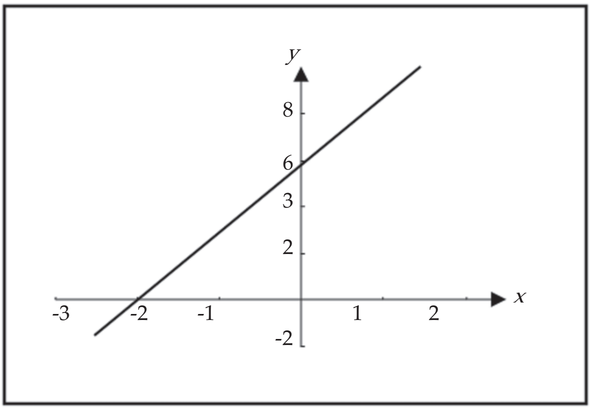
a. Carilah $f(0)$, $f(2)$, dan $f(a + b)$.
b. Gambarlah grafiknya.
c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

a. Dari $f(x) = 3x + 6$, kita peroleh:

$$f(0) = 3 \cdot 0 + 6 = 6,$$
$$f(2) = 3 \cdot 2 + 6 = 12,$$
$$f(a + b) = 3(a + b) + 6 = 3a + 3b + 6.$$

b. Grafik fungsi $y = f(x) = 3x + 6$ adalah:



Gambar 3.13 Grafik Fungsi $f(x) = 3x + 6$

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f = \mathbb{R}$.

□

3.3.4 Fungsi Kuadrat

Jika fungsi f dapat dinyatakan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$, untuk setiap x dalam daerah asal, dengan a, b, dan c konstan dan $a \neq 0$, maka fungsi f disebut fungsi kuadrat. Grafik fungsi kuadrat mempunyai persamaan $y = ax^2 + bx + c$, yang berbentuk parabola. Kita ingat kembali pelajaran pada kelas X, bahwa:

a. Grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik dengan koordinat:

$$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right), \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

b. Jika $a > 0$, maka diperoleh titik balik minimum. Jika $a < 0$, maka diperoleh titik balik maksimum.

c. Sumbu simetrinya ialah $x = -\dfrac{b}{2a}$

Contoh 3.3.4

Diketahui $f(x) = -x^2 + x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

a. Carilah $f(0)$, $f(3)$, $f(a)$, dan $f(a+2)$.
b. Gambarlah grafiknya.
c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

a. Dari rumus fungsi yang diberikan, $f(x) = -x^2 + x + 6$, sehingga:

$$\begin{aligned} f(0) &= 6 \\ f(3) &= -3^2 + 3 + 6 = 0 \\ f(a) &= -a^2 + a + 6 \\ f(a+2) &= -(a+2)^2 + (a+2) + 6 = -a^2 + 3a + 4 \end{aligned}$$

b. Untuk menggambarkan grafiknya, kita ikuti langkah-langkah berikut.

(1) Titik potong grafik dengan sumbu x, yaitu untuk $y = f(x) = 0$,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x-3)(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \quad \text{atau} \quad x = -2 \end{aligned}$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu x adalah (3,0) dan (–2 ,0).

(2) Titik potong grafik dengan sumbu y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 6$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0,6).

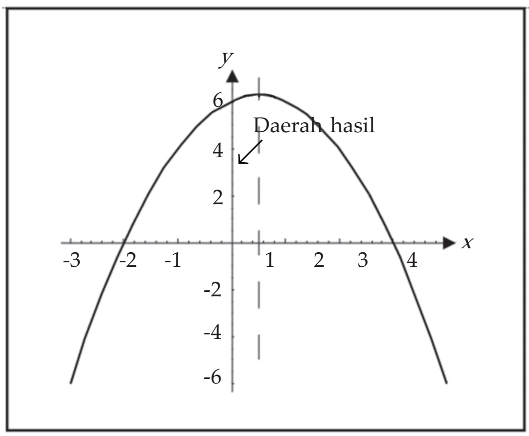
(3) Dari rumus fungsi kita peroleh D = $b^2 - ax = 1^2 - 4(-1)(6) = 25$, sehingga:

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \text{ dan } -\frac{D}{4a} = -\frac{25}{4(-1)} = \frac{13}{2}$$

Jadi, titik baliknya adalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

(4) Sumbu simetri: $x = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}$.

(5) Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + x + 6$ adalah:



Gambar 3.14 Grafik Fungsi $f(x) = -x^2 + x + 6$

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 13/2\}$.

□

3.3.5 Fungsi Mutlak atau Fungsi Modulus

Nilai mutlak atau modulus dari *a*, dinotasikan $|a|$, dibaca nilai mutlak *a*, didefinisikan sebagai:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{, untuk } a \geq 0 \\ -a & \text{, untuk } a < 0 \end{cases}$$

Dengan definisi ini, maka kita mempunyai:

$$|3| = 3, \quad |-1| = -(-1) = 1, \quad |5-2| = 5-2 = 3, \quad \text{dan} \quad |2-5| = -(2-5) = 3.$$

Fungsi yang rumusnya memuat nilai mutlak disebut fungsi mutlak atau fungsi modulus.

Contoh 3.3.5

Diketahui fungsi *f* dengan dengan $f(x) = |x|$.

a. Carilah $f(0)$, $f(-2)$, $f(5)$, $f(a^2)$, dan $f(3x+1)$.
b. Gambarlah grafiknya.
c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

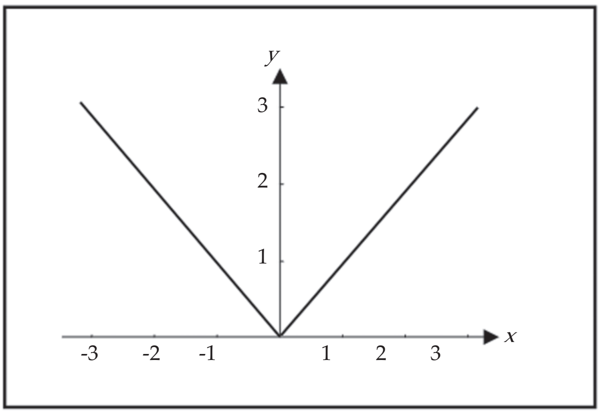
a. Dengan memperhatikan definisi nilai mutlak, kita peroleh:

$f(0) = 0$, $f(-2) = -(-2) = 2$, $f(5) = 5$,

$f(a^2) = a^2$, karena $a^2 \geq 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$,

$$f(3x+1) = \begin{cases} 3x+1 & \text{, untuk } 3x+1 \geq 0 \\ -(3x+1) & \text{, untuk } 3x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & \text{, untuk } x \geq -1/3 \\ -3x-1) & \text{, untuk } x < -1/3 \end{cases}$$

b. Grafik fungsi $f(x) = |x|$ adalah:



Gambar 3.15 Grafik Fungsi $f(x) = |x|$

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$

□

Contoh 3.3.6

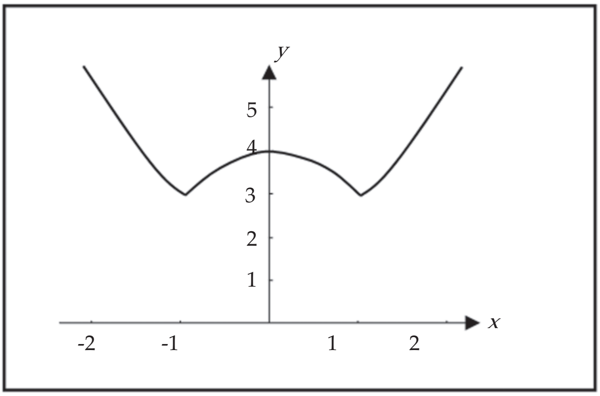
Gambarlah grafik fungsi . Tentukan pula daerah hasilnya.

Penyelesaian:

Dari rumus yang diberikan kita dapat menyatakan kembali f sebagai:

$$f(x)=\begin{cases}3+x^2-1 & \text{, untuk } x^2-1\geq 0\\ 3-(x^2-1) & \text{, untuk } x^2-1<0\end{cases} = \begin{cases}x^2+2 & \text{, untuk } x\leq -1 \text{ atau } 1\leq x\\ 4-x^2 & \text{, untuk } -1<x<1\end{cases}$$

Grafiknya adalah:



Gambar 3.16 Grafik Fungsi $f(x)=\left|x^2-1\right|$

Karena $\left|x^2-1\right|\geq 0$ untuk semua $x\in\mathbb{R}$, maka $f(x)=3+\left|x^2-1\right|\geq 3$. Dengan demikian daerah hasilnya adalah $R_f=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geq 3\}$.

□

3.3.6 Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar

Fungsi tangga atau fungsi nilai bulat terbesar didefinisikan sebagai $f(x)=[\![x]\!]$ untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Notasi $[\![x]\!]$ dibaca "nilai bulat terbesar x", didefinisikan sebagai *bilangan bulat terbesar yang lebih kecil* atau *sama dengan x*. Sebagai contoh,

$[\![3]\!]=3$, karena 3 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 3;

$[\![3,8]\!]=3$, karena 3 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 3,8;

$[\![0,6]\!]=0$, karena 0 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 0,6;

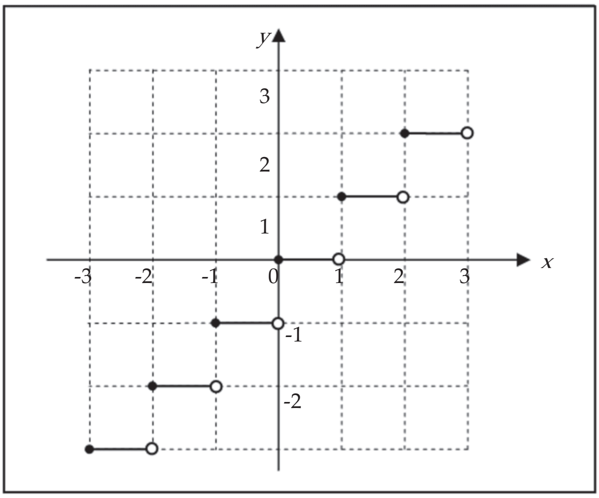
$[\![-1,8]\!]=-2$, karena –2 nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan –1,8.

Dengan demikian, setiap bilangan real x berada dalam suatu interval yang dibatasi dua bilangan bulat dapat ditentukan nilai $[\![x]\!]$. Sebagai contoh, untuk interval $0 \le x < 2$, maka $[\![x]\!] = 0$,

untuk interval $-1 \le x < 0$, maka $[\![x]\!] = -1$,

untuk interval $-3 \le x < -2$, maka $[\![x]\!] = -3$.

Dengan penjelasan di atas, grafik fungsi $f(x) = [\![x]\!]$ dengan daerah asal $\mathbb{R}$ pada bidang Cartesius dapat dilukiskan seperti pada Gambar 3.17.



Gambar 3.17 Grafik Fungsi $f(x) = [\![x]\!]$

Terlihat pada Gambar 3.17 bahwa daerah hasil fungsi $f(x) = [\![x]\!]$ adalah himpunan bilangan bulat. Mengapa?

3.3.7 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f dikatakan genap, jika berlaku $f(-x) = f(x)$. Fungsi f dikatakan ganjil, jika berlaku $f(-x) = -f(x)$. Jika $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$, maka fungsi f dikatakan tak genap dan tak ganjil.

Contoh 3.3.7

Selidiki fungsi-fungsi berikut genap, ganjil, atau tidak keduanya.

a. $f(x) = x^4 + x^2 + 3,\ x \in \mathbb{R}$

b. $g(x) = 2x + \sin x,\ x \in \mathbb{R}$

c. $h(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$

d. $k(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

Penyelesaian:

a. Perhatikan bahwa:

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 3 = x^4 + x^2 + 3 = f(x)$$

Jadi, f adalah fungsi genap.

b. Dari sifat fungsi sinus,

$$g(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -(2x + \sin x) = -g(x)$$

Jadi, g adalah fungsi ganjil.

c. Dari sifat fungsi cosinus,

$$h(-x) = \cos(-x) = \cos x = h(x)$$

Jadi, h adalah fungsi genap.

d. Jika $k(x) = x + 2$, maka $k(-x) = -x + 2$. Tampak bahwa k bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

□

Latihan 3.3

1. Gambarkan grafik setiap fungsi berikut pada bidang Cartesius dalam daerah asal $\mathbb{R}$.
   a. $f(x) = -2$
   b. $f(x) = 2x$
   c. $f(x) = 3 - 2x$
   d. $f(x) = x^2 - 9$
   e. $f(x) = 3x^2 - x^2$
   f. $f(x) = x^2 - 4x - 12$
2. Diketahui fungsi $f(x) = (-9)^x$ dengan daerah asal himpunan bilangan bulat.
   a. Hitunglah $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(0)$, dan $f(3)$.
   b. Gambarkan grafik fungsi f pada bidang Cartesius.
   c. Tentukan daerah hasilnya.
3. Gambarkan grafik setiap fungsi berikut pada bidang Cartesius dalam daerah asal $\mathbb{R}$.
   a. $f(x) = |3x - 1|$
   b. $f(x) = 1 - |x|$
   c. $f(x) = |3x - x^2|$
   d. $f(x) = x|x|$
4. Tentukan daerah hasil dari setiap fungsi pada soal nomor 3.
5. Selidiki apakah setiap fungsi berikut ganjil, genap, atau tidak keduanya.
   a. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$
   b. $f(x) = 5x^3 + 4^x$
   c. $f(x) = |x|$
   d. $f(x) = x^3 - 3x^2$
6. Pada hari libur, pengunjung pada suatu toserba mengikuti fungsi $x = 215t - 24t^2$, dengan x adalah jumlah pengunjung yang masuk ke toserba setelah jam ke-t. Jika toserba dibuka mulai jam 08.00, jam berapa:
   a. pengunjung paling banyak masuk?
   b. tidak ada pengunjung?
7. *Ekonomi*

   Harga barang ditentukan oleh permintaan akan barang tersebut. Harga barang ditentukan oleh fungsi $p = 80 - \frac{2}{3}x$, dengan x adalah jumlah permintaan barang dan p dalam ribuan.
   a. Berapakah harga barang tersebut, apabila jumlah permintaan adalah 18 unit?
   b. Berapakah jumlah permintaan, jika harga barang Rp50.000,00?
   c. Gambarkan fungsi harga tersebut pada bidang Cartesius.
   d. Selidiki apakah fungsi p merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil?
8. *Ekonomi*

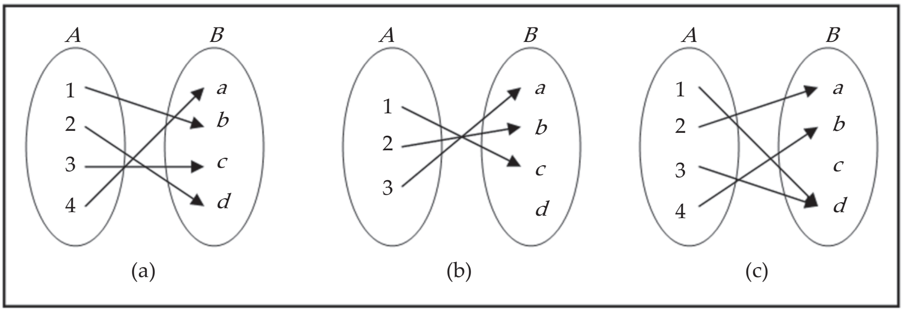
   Diketahui fungsi permintaan suatu barang $p = 48 - 4x - 3x^2$ dan fungsi penawaran $p = x^2 + 4x + 16$, dengan p adalah harga (dalam ribuan) dan x adalah jumlah barang.
   a. Tentukan titik keseimbangan antara permintaan dan penawaran.
   b. Tentukan titik keseimbangan dari harga.
   c. Berapakah jumlah permintaan dan penawaran, jika harga barang Rp28.000,00?

3.4 Sifat-Sifat Fungsi

Terdapat tiga sifat penting dari fungsi yang akan kita pelajari, yaitu fungsi satu-satu, fungsi pada, dan fungsi pada dan satu-satu.

3.4.1 Fungsi Satu-satu (Injektif)

Kita perhatikan ketiga diagram panah fungsi dari himpunan A ke himpunan B berikut ini.



Gambar 3.18

Ketiga diagram pada Gambar 3.18 mendefinisikan suatu fungsi, tetapi fungsi (a) dan (b) mempunyai sifat bahwa setiap dua elemen dari A yang berbeda dipetakan ke elemen yang berbeda pula di B. Tetapi untuk fungsi (c) ada dua elemen, yaitu 1 dan 3 dipetakan ke elemen yang sama, yaitu d. Fungsi (a) dan (b) semacam ini disebut fungsi satu-satu, sedangkan fungsi (c) bukan fungsi satu-satu, yang definisinya diberikan berikut.

> Definisi 3.4
>
> Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap $a, b \in A$, dengan $a \neq b$ berlaku:
>
> $$f(a) \neq f(b)$$

Ekuivalen dengan definisi di atas, fungsi f dari A ke B adalah fungsi satu-satu jika untuk $f(a) = f(b)$, maka $a = b$.

Contoh 3.4.1

Diketahui $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Apakah f tersebut fungsi satu-satu?

Penyelesaian:

Jika kita ambil $a = -2$ dan $b = 2$, maka jelas $a \neq b$. Tetapi,

$$f(a) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(b)$$

Jadi, f bukan fungsi satu-satu.

□

Contoh 3.4.2

Diketahui $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa fungsi f satu-satu.

Penyelesaian:

Kita ambil sembarang $a, b \in \mathbb{R}$ sehingga $f(a) = f(b)$. Perhatikan bahwa:

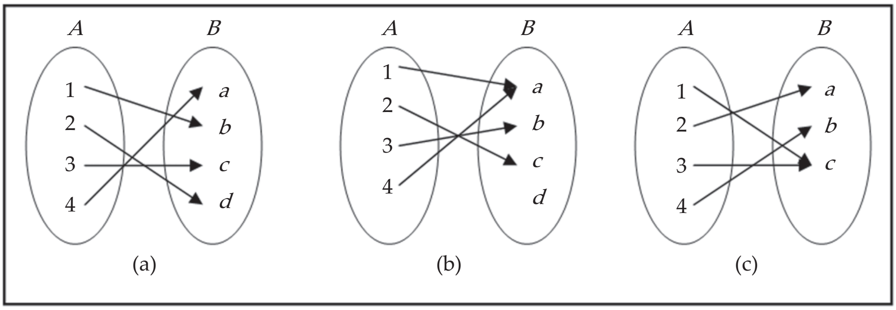
$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow a^3 = b^3 \\ &\Rightarrow a = b \end{aligned}$$

Jadi, f adalah fungsi satu-satu.

□

3.4.2 Fungsi Pada (Surjektif atau Onto)

Kita perhatikan ketiga diagram panah fungsi dari himpunan A ke himpunan B berikut.



Gambar 3.19

Ketiga relasi pada Gambar 3.19 adalah fungsi. Fungsi (a) dan (c) bersifat bahwa untuk setiap elemen himpunan daerah kawan B merupakan peta dari setiap elemen dari daerah asal A. Fungsi yang demikian disebut fungsi pada. Tetapi untuk fungsi (b) terdapat elemen d dari dearah kawan B yang tidak mempunyai kawan di A, fungsi seperti ini kita katakan fungsi bukan pada. Definisi lengkapnya diberikan berikut ini.

> Definisi 3.5
>
> Diberikan fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada atau surjektif atau onto, jika diambil sembarang elemen $b \in B$ terdapat elemen $a \in A$, sehingga:
>
> $$f(a) = b$$

Dengan kata lain, fungsi f dari A ke B merupakan fungsi pada, jika daerah hasil dari f sama dengan daerah kawan dari f, yaitu $f(A) = B$.

Contoh 3.4.3

Tunjukkan bahwa f bukan fungsi pada, tetapi g fungsi pada, jika:

a. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$

b. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^3$

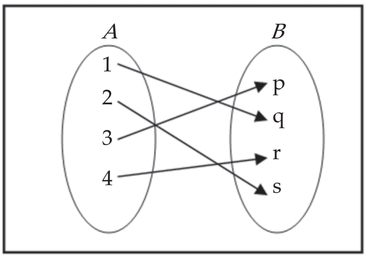
Penyelesaian:

a. Fungsi f bukan fungsi pada karena terdapat $-1 \in \mathbb{R}$, tetapi tidak ada $x \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x) = -1$.

b. Jika diambil $y \in \mathbb{R}$, maka terdapat $x = y^{1/3} \in \mathbb{R}$ sehingga $g = (x)\left(y^{1/3}\right)^3 = y$. Jadi, g fungsi pada.

3.4.3 Fungsi Bijektif atau Korespondensi Satu-satu

Gambar 3.20 adalah diagram panah dari suatu fungsi pada sekaligus fungsi satu-satu dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Fungsi yang memenuhi dua sifat ini disebut fungsi bijektif.



Gambar 3.20

Definisi 3.6

Diberikan fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakatan bijektif atau korespondensi satu-satu, jika f merupakan fungsi pada dan satu-satu.

Definisi ini mengakibatkan bahwa jika f fungsi bijektif dengan himpunan A dan B himpunan berhingga, maka himpunan A dan himpunan B mempunyai banyak anggota yang sama.

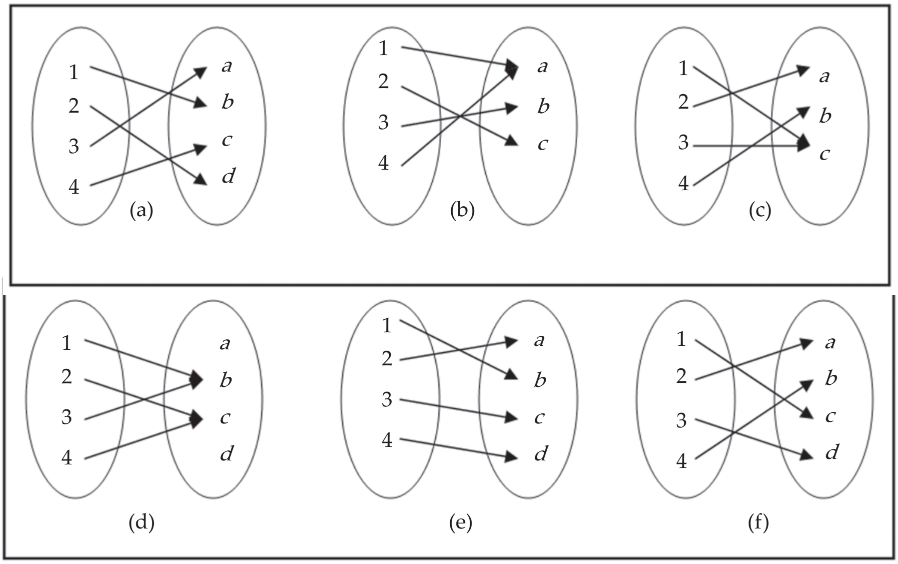
Contoh 3.4.4

a. Jika kita ingin melihat suatu pertunjukan, setiap pengunjung harus membeli karcis, maka terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan penonton dengan himpunan karcis mereka.

b. Setiap negara mempunyai satu ibukota negara. Terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan negara dengan himpunan ibukota negara.

Latihan 3.4

1. Dari fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi satu-satu, pada, atau bijektif?



Gambar 3.21

2. Dari setiap fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi satu-satu, fungsi pada, atau fungsi bijektif, jika daerah asalnya $A = \{a, b, c, d\}$.
   a. $f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 6)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   b. $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3\}$.
   c. $f = \{(a, 4), (b, 3), (c, 2), (d, 1)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   d. $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
3. Tentukan apakah dari setiap fungsi yang diberikan adalah satu-satu, pada, atau bijektif.
   a. $f(x) = 5$
   b. $f(x) = 2x + 3$
   c. $f(x) = 3 - x^2$
   d. $f(x) = |x - 2|$
4. Carilah contoh di kehidupan sehari-hari suatu relasi yang merupakan fungsi satu-satu, pada, atau bijektif.
5. Diberikan data hasil penjualan laptop (dalam ribuan) dari suatu distributor selama 7 tahun.

Tahun	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Penjualan	15	22	27	30	32	33	35

Misalkan A adalah himpunan tahun, B himpunan penjualan, dan fungsi f adalah pemetaan dari A ke B, $f: A \to \mathbb{R}$ dalam bentuk pasangan terurut. Apakah f fungsi bijektif?

6. Suatu *supermarket* memberikan potongan harga yang berbeda kepada pembeli untuk setiap pembelian Rp50.000 dan kelipatannya. Potongan harga bertambah 5% setiap pembelian naik Rp50.000. Potongan harga dimulai dari pembelian Rp50.000 mendapat potongan 2,5%, dan potongan harga maksimum adalah 40%. Misalkan A adalah himpunan jumlah pembeli, B himpunan besarnya potongan harga, dan fungsi f adalah pemetaan dari A ke B, $f : A \to \mathbb{R}$ dalam bentuk pasangan terurut. Tentukan apakah fungsi f adalah fungsi satu-satu, fungsi pada, atau fungsi bijektif?

3.5 Aljabar Fungsi

Kita dapat membayangkan bahwa kedudukan fungsi-fungsi sebagaimana bilangan real, yang di dalamnya berlaku operasi aljabar penjumlahan, perkalian, dan pembagian. Tentu saja perlu juga kita perhatikan daerah asal dari fungsi-fungsi yang dioperasikan. Untuk itu kita definisikan beberapa operasi aljabar dari fungsi-fungsi.

Definisi 6.7

Misalkan D_f dan D_g masing-masing menyatakan derah asal f dan g, maka:

1. Hasil kali skalar fungsi f dengan skalar bilangan real k adalah fungsi kf yang didefinisikan sebagai $(kf)(x) = kf(x)$, dengan daerah asal $D_{kf} = D_f$.
2. Jumlah fungsi f dan g adalah fungsi $f+g$ yang didefinisikan sebagai $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
3. Selisih fungsi f dan g adalah fungsi $f-g$ yang didefinisikan sebagai $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
4. Perkalian fungsi f dan g adalah fungsi fg yang didefinisikan sebagai $(fg)(x) = f(x)g(x)$, dengan daerah asal $D_{f.g} = D_f \cap D_g$.
5. Pembagian fungsi f dan g adalah fungsi $\frac{f}{g}$ yang didefinisikan sebagai $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$.

Contoh 3.5.1

Misalkan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x+2}$. Tentukan fungsi-fungsi berikut serta daerah asalnya.

a. $4f$
b. $f+g$
c. fg
d. $\frac{f}{g}$

Penyelesaian:

Daerah asal f adalah $D_f = \mathbb{R}$, dan daerah asal g adalah $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, mengapa?

Dengan Definisi 6.7, kita peroleh:

a. $(4f)(x) = 4f(x) = 4x^2$, dengan daerah asal $D_{4f} = D_f = \mathbb{R}$.

b. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+2}$, dengan daerah asal adalah $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$.

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2\sqrt{x+2}$, dengan daerah asal $D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$.

d. Nilai $g(x) \neq 0$ jika dan hanya jika $x > -2$, sehingga:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}$$

dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}$.

□

Latihan 3.5

1. Jika $f(x) = x - 5$ dan $g(x) = x^2 - 1$, tentukan fungsi-fungsi berikut serta daerah asalnya.
   a. $3f$
   b. $f + g$
   c. $f - g$
   d. fg
   e f/g
   f. $(3f + g^2)$

2. Untuk setiap dua fungsi yang diberikan, hitung $f + g$, fg, dan f/g.
   a. $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$
   b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $g(x) = 1/x$
   c. $f(x) = |x|$ dan $g(x) = |x-3|$
   d. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

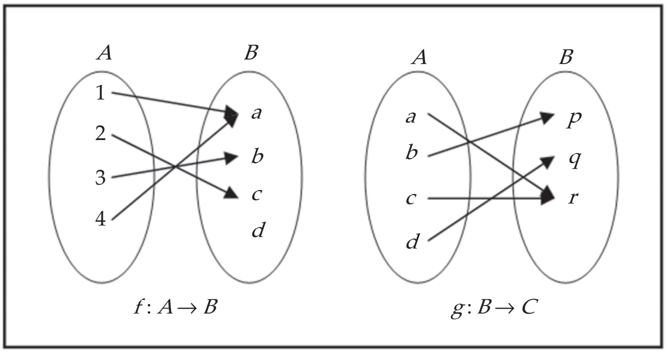
3. *Industri*
   Minuman suplemen proses produksinya melalui dua tahap, yaitu proses pengolahan dan proses pengemasan. Biaya proses pengolahan mengikuti fungsi $C_1(x) = 30.000 + 100$ dan biaya proses pengemasan adalah $C_2(x) = 15.000 + 50x$, dengan x adalah banyaknya botol.
   a. Berapa total biaya yang diperlukan untuk membuat 1.000 botol minuman?
   b. Berapa selisih antara fungsi pengolahan dan fungsi biaya pengemasan?

4. *Industri*
   Setelah menekuni bisnis selama t tahun, seorang pengusaha traktor membuat $120 + 2t + 3t^2$ buah traktor tiap tahun. Harga penjualan (dalam juta) tiap buahnya telah meningkat sesuai dengan rumus: $6.000 + 700t$. Tuliskan rumus untuk pendapatan tahunan pengusaha tersebut, $R(t)$ setelah t tahun.

5. Dua buah bolam lampu memberikan daya pijar yang bergantung pada besarnya daya listrik yang diberikan. Lampu I memberikan daya pijar sebesar $f(x) = \dfrac{x^2+3}{2}$, lampu II memberikan daya pijar sebesar $g(x) = x^2 + 5$.
   a. Tentukan fungsi perbandingan daya pijar kedua bolam lampu.
   b. Jika daya listrik yang diberikan sebesar 20 watt, berapa daya pijar yang dihasilkan oleh kedua bolam lampu tersebut?
   c. Tentukan fungsi daya pijar yang dihasilkan oleh kedua bolam lampu tersebut jika dinyalakan bersamaan.

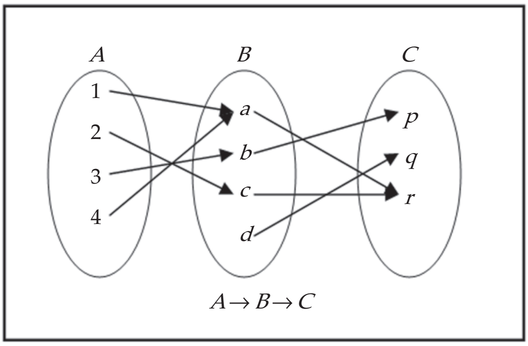
3.6 Komposisi Fungsi

Misalnya diketahui $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, dan $C = \{p,q,r\}$. Misalkan fungsi f dari A ke B dan g dari B ke C didefinisikan seperti diagram berikut.



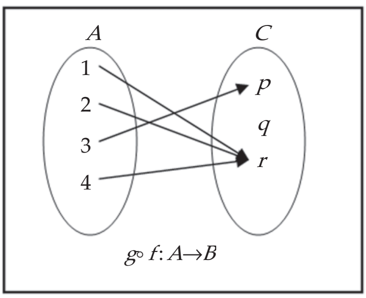
Gambar 3.22

Dari dua fungsi itu, kita peroleh fungsi yang langsung memetakan himpunan A ke himpunan C seperti berikut.



Gambar 3.23

Fungsi yang langsung memetakan A ke C itu dapat dianggap sebagai fungsi tunggal, yang diagramnya tampak sebagai berikut.



Gambar 3.24

Fungsi tunggal dalam ilustrasi di atas disebut fungsi komposisi. Operasinya disebut komposisi atau pergandaan fungsi. Komposisi dari g dan f dinotasikan $g \circ f$. Perhatikan bahwa $g \circ f$ adalah pergandaan yang mengerjakan f lebih dulu, baru diteruskan oleh g. Fungsi $g \circ f$ dibaca sebagai "fungsi g bundaran f".

Dari contoh di atas, kita peroleh:

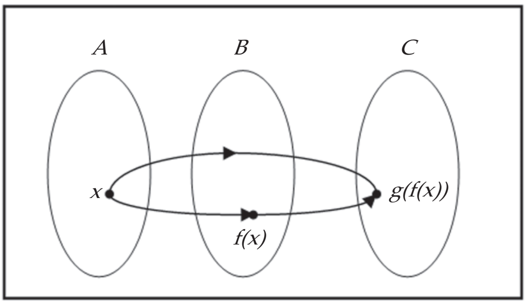
$$(g \circ f)(1) = r \qquad (g \circ f)(3) = p$$
$$(g \circ f)(2) = r \qquad (g \circ f)(4) = r$$

Penentuan itu dapat pula diperoleh dari f dan g, seperti berikut ini.

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = r$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = p$$
$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(a) = r$$

Secara umum komposisi di atas dirumuskan sebagai:

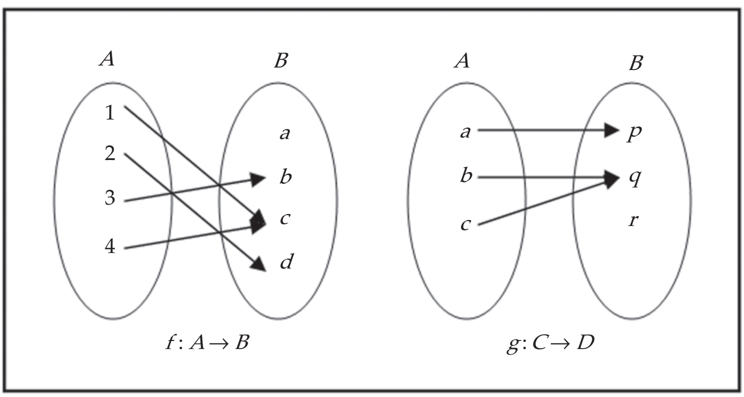
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Gambar 3.25 *Komposisi Fungsi*

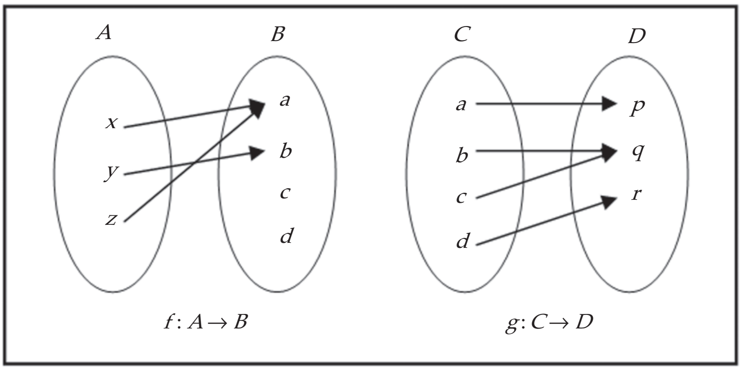
3.6.1 Syarat Agar Dua Fungsi Dapat Dikomposisikan

Jika kita mempunyai dua fungsi, f dan g, apakah keduanya selalu dapat dikomposisikan? Kita perhatikan contoh berikut ini.



Gambar 3.26

Dari dua fungsi, f dan g, kita peroleh $f(1) = d$, tetapi $g(d)$ tidak ada karena d bukan elemen dari C. Sekarang perhatikan dua fungsi berikut ini.



Gambar 3.27

Dari dua fungsi, f dan g, kita dapat membuat komposisinya karena setiap peta dari elemen A oleh f merupakan elemen dari C (daerah asal g).

Dari dua contoh kasus di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa jika kita mempunyai dua fungsi tidak selalu dapat dikomposisikan. Lebih lanjut, dari contoh kedua kita menyimpulkan hasil berikut ini.

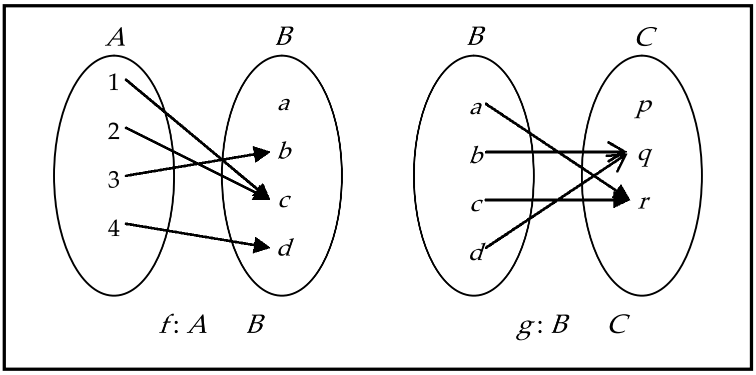
Teorema 3.1
Syarat fungsi g dan f dapat dikomposisikan, atau $g \circ f$ ada, jika daerah hasil dari f adalah himpunan bagian dari daerah asal dari g, yaitu $f(A) \subseteq D_g$.

Tugas Mandiri

Misalkan g fungsi genap dan $h = f \circ g$, apakah h selalu genap? Misalkan g fungsi ganjil dan $h = f \circ g$. Apakah h selalu ganjil? Bagaimana jika f ganjil? Bagaimana jika f genap?

Contoh 3.6.1

Diketahui fungsi f dan g diberikan oleh diagram panah berikut.



Gambar 3.28

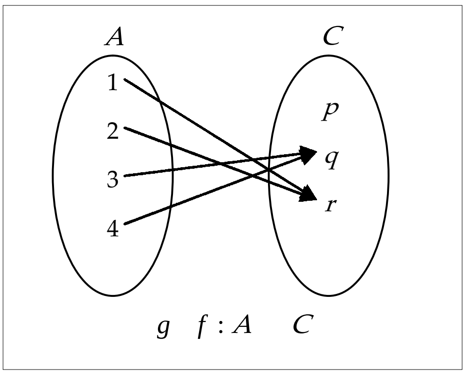
Gambarlah diagram panah dari $g \circ f$.

Penyelesaian:

Dari diagram panah di atas, kita peroleh:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = q$$
$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(d) = q$$

Diagram panah untuk $g \circ f$ adalah:



Gambar 3.29

□

Contoh 3.6.2

Fungsi f dan g dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dirumuskan oleh:

$f(x) = x - 3$ dan $g(x) = x^2$

Tentukan rumus untuk $g \circ f$.

Penyelesaian:

Dengan aturan komposisi,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 3) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$\square$

Contoh 3.6.3

Diketahi f dan g dengan himpunan pasangan berurutan berikut.

$f = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$

$g = \{(2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 7)\}$

Tentukan $g \circ f$ dan $(g \circ f)(2)$.

Penyelesaian:

Dengan menghitung satu per satu,

$$g \circ f = \{(0,3), (1,4), (2,6)\}$$

sehingga:

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 6$$

$\square$

Contoh 3.6.4

Fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ didefinisikan sebagai berikut.

$$f(x) = x + 5 \text{ dan } g(x) = x^2 + 3x + 1$$

Hitung $(g \circ f)(-2)$ secara langsung.

Penyelesaian:

Dengan cara langsung (tanpa melalui rumus)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(-2) &= g(f(-2)) \\ &= g(-2 + 5) \\ &= g(3) \\ &= 3^2 + 3(3) + 1 = 19\end{aligned}$$

$\square$

Tugas Mandiri

Buktikan bahwa operasi komposisi fungsi bersifat asosiatif, yaitu jika f, g, dan h sembarang, maka berlaku:

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

3.6.2 Menentukan Komponen Fungsi Apabila Aturan Komposisinya Diketahui

Berikut ini akan kita pelajari beberapa contoh untuk mencari komponen fungsi, apabila komposisinya diketahui. Prinsip dasar yang digunakan adalah definisi komposisi fungsi. Perlu kita catat di sini bahwa tidak semua kasus seperti ini dapat diselesaikan.

Contoh 3.6.5

Diketahui fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - 5$.
Tentukan fungsi f, jika:

a. $(g \circ f)(x) = 4x + 1$

b. $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x$

Penyelesaian:

a. Dari rumus komposisi fungsi, kita peroleh:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x + 1 = (4x + 6) - 5$$

Jadi, $f(x) = 4x + 6,\ x \in \mathbb{R}$.

b. Dengan prinsip komposisi fungsi, kita peroleh:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 3x = (x - 5)^2 + 13(x - 5) + 40$$

Jadi, $f(x) = x^2 + 13x + 40,\ x \in \mathbb{R}$.

□

Contoh 3.6.6

Diketahui fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 2$. Tentukan f, jika $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 1$.

Penyelesaian:

Dari definisi komposisi,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x^2 + 4x - 1$$

Dipihak lain,

$$g(f(x)) = (f(x))^2 - 2$$

sehingga:

$$\begin{aligned}(f(x))^2 - 2 = 4x^2 + 4x - 1 \ \Rightarrow\ (f(x))^2 &= 4x^2 + 4x + 1 \\ \Rightarrow\ \quad &= (2x + 1)^2\end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = 2x + 1$ atau $f(x) = -(2x + 1)$.

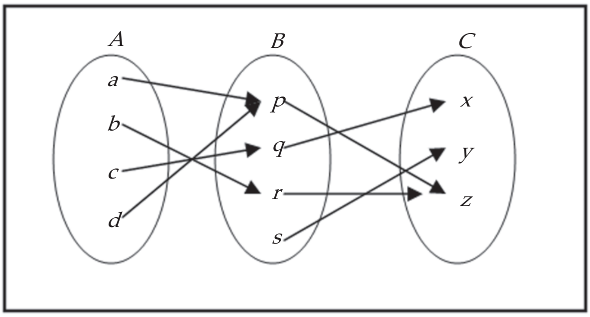
Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk menentukan rumus f_n apabila:

$$f_0(x) = x/(x+1),\ f_{n+1} = f_0 \circ f_n,\ \text{untuk } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Latihan 3.6

1. Diketahui fungsi $f: A \to B$ dan $g: B \to C$ yang ditentukan oleh diagram berikut.



Gambar 3.30

   a. Tentukan $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$, $(g \circ f)(c)$, dan $(g \circ f)(d)$.

   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$.

2. Diketahui $A = \{p, q, r, s, t\}$, fungsi f dan g pada A yang ditentukan oleh:

$$f = \{(p, q), (q, s), (r, r), (s, p), (t, r)\}$$
$$g = \{(p, s), (q, t), (r, q), (s, s), (t, p)\}$$

   a. Tentukan $(g \circ f)(p)$, $(g \circ f)(r)$, $(g \circ f)(s)$, dan $(g \circ f)(t)$.

   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$.

3. Diketahui $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x + 7$. Tentukan setiap komposisi fungsi berikut serta daerah asalnya.

   a. $f \circ g$ b. $g \circ f$ c. $f \circ f$ d. $g \circ g$

4. Ulangi pertanyaan soal nomor 3 untuk setiap pasangan fungsi berikut.

   a. $f(x) = \sqrt{x-2}$ dan $g(x) = x^2 - 2$

   b. $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = 1/x$

5. Diketahui $f(x) = 3x - 4$ dan $g(x) = 2x + a$. Jika $g \circ f = f \circ g$, tentukan nilai a.

6. Diketahui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tentukan $g(x)$, jika:

   a. $f(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4x$

   b. $f(x) = x^2 + 5$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 6$

7. Diketahui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Tentukan $f(x)$, jika:

   a. $g(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4x$

   b. $g(x) = 1 - 2x$ dan $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$

   c. $g(x) = g(x) = 1/x$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

8. Tabel 6.1 Tinggi dan ukuran sepatu dari 5 orang model

Tinggi (cm)	168	170	175	178	180
Ukuran Sepatu	38	39	40	42	41

Tabel 6.2 Tinggi dan ukuran sepatu dari 5 orang pramugari

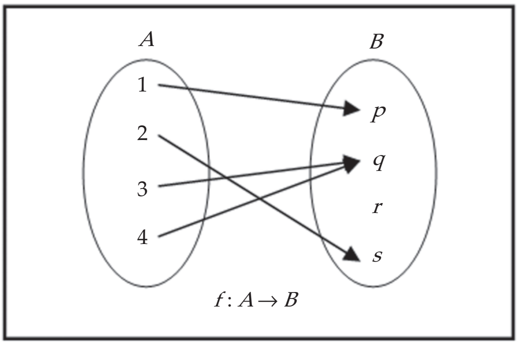
Tinggi (cm)	170	178	168	180	175
Ukuran Sepatu	38	41	40	42	39

Misalkan data pada Tabel 6.1 menyatakan fungsi f: Tinggi $\rightarrow$ Ukuran sepatu, dan Tabel 6.2 menyatakan fungsi g: Ukuran sepatu $\rightarrow$ Tinggi.

a. Gambarkan diagram fungsi $f \circ g$.
b. Gambarkan diagram fungsi $g \circ f$.
c. Tentukan daerah asal dan daerah hasil untuk fungsi-fungsi komposisi yang diperoleh pada soal (a) dan (b).

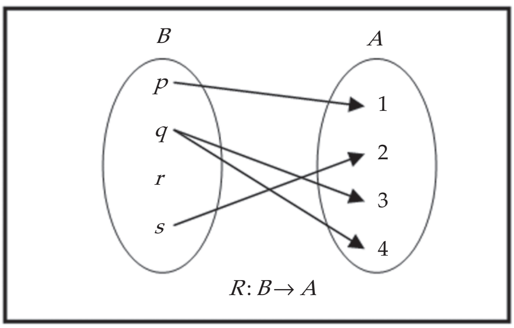
3.7 Menentukan Invers Fungsi

Perhatikan fungsi f berikut ini.



Gambar 3.31

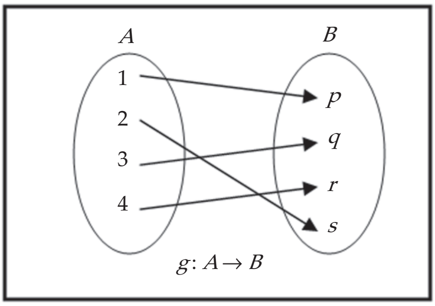
Jika fungsi f di atas kita balik, maka akan kita peroleh relasi berikut ini.



Gambar 3.32

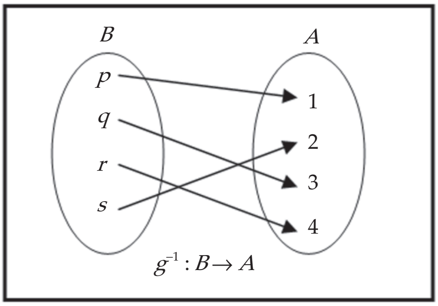
Relasi R disebut invers fungsi f. Relasi R biasa dinotasikan dengan f^{-1}. Apakah f^{-1} merupakan fungsi? Ternyata bukan, mengapa?

Sekarang perhatikan fungsi g berikut ini.



Gambar 3.33

Jika fungsi g di atas kita balik, maka akan kita peroleh relasi g^{-1} berikut ini.



Gambar 3.34

Perhatikan bahwa relasi g^{-1} adalah fungsi pada B. Selanjutnya, invers fungsi yang merupakan fungsi disebut fungsi invers. Beberapa penulis menyebut fungsi invers sebagai fungsi balikan.

Dengan jalan pikiran yang sama seperti penyajian diagram panah, jika fungsi $f: A \rightarrow B$ dinyatakan sebagai pasangan terurut:

$$f = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

maka invers fungsi f adalah $f^{-1}: B \rightarrow A$ yang ditentukan oleh:

$$f^{-1} = \{(b, a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$$

Dari contoh di atas dapat kita simpulkan bahwa invers fungsi *tidak harus* merupakan fungsi. Tetapi, jika g^{-1} adalah fungsi, maka untuk setiap $x \in A$ akan berlaku:

$$(g^{-1} \circ g)(x) = x = I_A(x) \text{ (dengan } I_A \text{ fungsi identitas pada } A)$$

dan untuk setiap $x \in B$ akan berlaku:

$$(g \circ g^{-1})(x) = x = I_B(x) \text{ (dengan } I_B \text{ fungsi identitas pada } B)$$

Kita perhatikan kembali fungsi f dan g pada dua contoh di atas. Kenapa f^{-1} bukan fungsi, tetapi g^{-1} fungsi? Relasi f^{-1} bukan fungsi karena ada q elemen B yang mempunyai dua kawan yang berbeda, 3 dan 4 di dalam A. Hal ini disebabkan karena f fungsi yang tidak satu-satu. Sedangkan g^{-1} adalah fungsi karena setiap elemen di dalam B mempunyai tepat satu kawan dalam A. Mudah kita pahami bahwa g fungsi satu-satu. Secara umum kita mempunyai sifat berikut ini.

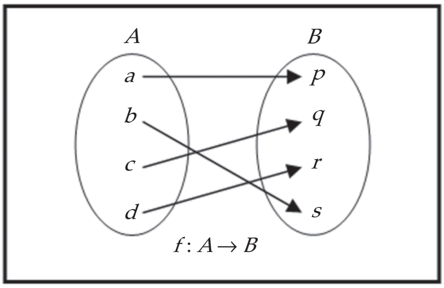
> Teorema 3.2
>
> Misalkan f adalah fungsi dari A ke B, f^{-1} adalah fungsi invers dari f dari B ke A jika dan hanya jika f fungsi bijektif, dan
>
> $$f^{-1} \circ f = I_A \text{ dan } f \circ f^{-1} = I_B$$

Jika fungsi inversnya ada, maka fungsi invers tersebut dapat dicari dengan dua cara:

a. Dengan membalik arah panah fungsi semula, apabila diagram panahnya diketahui.
b. Dengan menggunakan prinsip: jika $y = f(x)$, maka $x = f^{-1}(y)$.

Contoh 3.7.1

Diketahui fungsi f berikut ini.

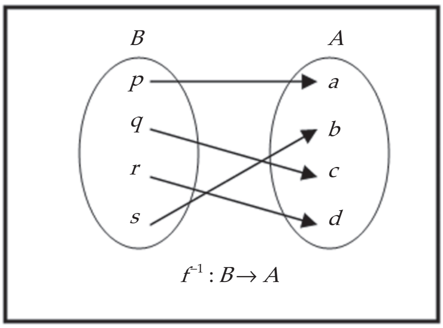


Gambar 3.35

a. Gambar diagram panah dari f^{-1}.
b. Tentukan $f^{-1}(p)$, $f^{-1}(q)$, dan $f^{-1}(s)$.

Penyelesaian:

a. Dengan membalik arah panahnya kita peroleh f^{-1},



Gambar 3.36

b. Dari diagram ini, $f^{-1}(p) = a$, $f^{-1}(q) = c$, dan $f^{-1}(s) = b$.

□

Contoh 3.7.2

Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 5$,   .

a. Tentukan rumus untuk f^{-1}.

b. Hitunglah $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, dan $f^{-1}(3)$.

Penyelesaian:

a. Misalkan $y = f(x)$,

$$y = 2x + 5 \iff 2x = y - 5$$

$$\iff x = \frac{y-5}{2}$$

$$\iff f^{1}(y) = \frac{y-5}{2}$$

Jadi, rumus untuk f^{-1} adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$.

b. Dari $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$, kita peroleh:

$$f^{-1}(0) = \frac{0-5}{2} = -\frac{5}{2},\ f^{-1}(2) = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2},\ \text{dan } f^{-1}(-3) = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

□

Contoh 3.7.3

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-4}$, untuk $x \neq 2$. Tentukan rumus untuk f^{-1}.

Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x)$, untuk $x \neq 2$,

$$y = \frac{x+3}{2x-4} \iff x + 3 = 2xy - 4y$$

$$\iff x - 2xy = -3 - 4y$$

$$\iff x(1 - 2y) = -3 - 4y$$

$$\iff x = \frac{-3-4y}{1-2y} = \frac{4y+3}{2y-1}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$ untuk $x \neq 1/2$.

□

Tugas Kelompok

Diketahui $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dengan $ad - bc \neq 0$.

a. Tentukan rumus untuk f^{-1}.

b. Mengapa disyaratkan $ad - bc \neq 0$ agar f^{-1} ada?

c. Apa syarat $a, b, c,$ dan d agar $f^{-1} = f$?

Diskusikan dengan kelompok Anda.

Pada bagian akhir ini, kita kembali kepada ilustrasi di awal bab tentang perusahaan yang memproduksi barang jadi melalui dua tahap, mesin I dan mesin II.

Contoh 3.7.4

Sebuah perusahaan menggunakan dua buah mesin untuk memproduksi bahan mentah menjadi bahan jadi. Mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Kinerja mesin I mengikuti fungsi $f(x) = 3x - 2$, sedangkan mesin II kinerjanya mengikuti fungsi $g(x) = 5x + 18$, dengan x adalah banyak bahan mentah yang tersedia.

a. Jika bahan mentah yang tersedia untuk produksi sebanyak 10 kg, berapa unit barang jadi yang dihasilkan?

b. Jika proses produksi itu menghasilkan 683 unit barang jadi, berapa kg bahan mentah yang harus disediakan?

Penyelesaian:

a. Masalah ini merupakan aplikasi dari komposisi dua fungsi. Proses produksi dari bahan mentah sampai menjadi barang jadi, menghasilkan:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 5(3x - 2) + 18 = 15x + 8$$

Untuk $x = 10$, $(g \circ f)(10) = -15(10) + 8 = 158$. Jadi, dengan bahan mentah sebanyak 10 kg menghasilkan 158 unit barang jadi.

b. Sebaliknya, masalah ini merupakan invers fungsi komposisi $g \circ f$. Dari jawaban (a) kita mempunyai:

$$(g \circ f)(x) = 15x + 8$$

sehingga memberikan:

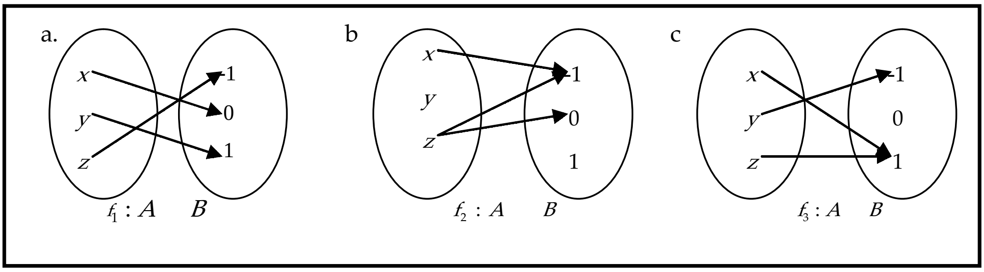
$$(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{x - 8}{15}$$

Untuk $x = 683$ diperoleh $(g \circ f)^{-1}(683) = \frac{683 - 8}{15} = \frac{675}{15} = 45$. Jadi, untuk menghasilkan 683 unit barang jadi diperlukan bahan mentah sebanyak 45 kg.

□

Latihan 3.7

1. Diketahui fungsi-fungsi dari $A = \{x, y, z\}$ ke $B = \{-1, 0, 1\}$ sebagai berikut.



Gambar 3.36

   d. $f_4 = \{(x, 0), (y, 1), (z, 0)\}$
   e. $f_5 = \{(y, -1), (z, 1), (x, 0)\}$
   f. $f_6 = \{(z, -1), (x, 1), (y, 1)\}$.

   Dari setiap fungsi di atas, tentukan inversnya. Kemudian mana yang mempunyai fungsi invers?

2. Apakah setiap fungsi berikut mempunyai fungsi invers? Jika mempunyai fungsi invers, tentukan fungsi invers tersebut.
   a. $f(x) = 5x - 3$
   b. $f(x) = 1 - x^2$
   c. $f(x) = (4 - x)^3$
   d. $f(x) = \sqrt{2x-6}$
   e. $f(x) = |x| + x$

3. Tentukan rumus untuk f^{-1} dari setiap fungsi yang diberikan.
   a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$
   b. $f(x) = \dfrac{2}{5-3x}$
   c. $f(x) = \dfrac{x-3}{4x+1}$
   d. $f(x) = \dfrac{5x+3}{3x+2}$

4. Diketahui fungsi $f(x+1) = \dfrac{x+3}{x-2}$, untuk $x \neq 2$. Tentukan rumus untuk f^{-1} serta daerah asalnya.

5. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$, untuk $x \neq 5/4$. Jika f^{-1} fungsi invers dari f, tentukan $f^{-1}(x-1)$.

6. Diketahui $f(x) = 2x + 7$.
   a. Tentukan f^{-1}.
   b. Dari f^{-1}, kemudian tentukan $(f^{-1})^{-1}$.
   c. Apa yang dapat Anda simpulkan?

7. Tentukan f, jika:
   a. $f^{-1}(x) = x + 4$
   b. $f^{-1}(x) = 3x - 1$
   c. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

8. Tentukan nilai konstanta k sehingga fungsi yang didefinisikan oleh:

$$f(x) = \frac{x+3}{x+k}$$

sama dengan fungsi inversnya.

9. Tentukan rumus untuk $(f \circ g)^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$ untuk setiap f dan g yang diberikan.
   a. $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 2 - 3x$
   b. $f(x) = \dfrac{6}{x+3}$ dan $g(x) = x^2$, untuk $x \geq 0$

10. Suatu perusahaan telah menaksir bahwa biaya (dalam jutaan rupiah) memproduksi x barang adalah:

$$C(x) = 10.000 + 0{,}001x^2$$

   a. Jika barang yang diproduksi sebanyak 500, berapa total biaya yang diperlukan?
   b. Jika tersedia biaya sebesar 11 juta rupiah, berapa banyak barang yang dihasilkan?

11. Pada suatu perusahaan, mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Kinerja mesin I mengikuti fungsi $f(x) = 2x$, sedangkan mesin II kinerjanya mengikuti fungsi $g(x) = 3x^2 - 5$, dengan x adalah banyak bahan mentah yang tersedia.
   a. Jika bahan mentah yang tersedia untuk produksi sebanyak 5 kg, berapa unit barang jadi yang dihasilkan?
   b. Jika proses produksi itu menghasilkan 427 unit barang jadi, berapa kg bahan mentah yang harus disediakan?

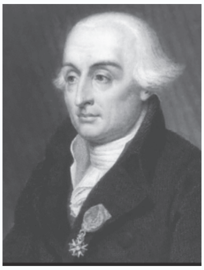
Rangkuman

1. Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka produk Cartesius himpunan A dan B adalah himpunan $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.
2. Suatu relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$.
3. Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang mengawankan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut daerah asal atau daerah definisi (domain), ditulis D_f. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), ditulis K_f. Fungsi $f : x \to y = f(x)$, y disebut peta (bayangan) dari x oleh f atau nilai fungsi f, dan x disebut prapeta dari y oleh f. Himpunan semua peta dalam B disebut daerah hasil (range), ditulis R_f.
4. Beberapa fungsi khusus: fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi mutlak atau fungsi modulus, fungsi tangga atau fungsi nilai bulat terbesar, fungsi genap, dan fungsi ganjil.
5. Sifat-sifat fungsi: fungsi satu-satu (injektif), fungsi pada (onto atau surjektif), dan fungsi pada dan satu-satu (bijektif).

6. Syarat fungsi g dan f dapat dikomposisikan, atau $g \circ f$ ada, jika daerah hasil dari f adalah himpunan bagian dari daerah asal fungsi g, yaitu $f(A) \subseteq D_g$.
7. Misalkan f adalah fungsi dari A ke B, f^{-1} adalah fungsi invers dari f dari B ke A jika dan hanya jika f fungsi bijektif, dan $f^{-1} \circ f = I_A$ dan $f \circ f^{-1} = I_B$.
8. Jika f dan g dua fungsi yang mempunyai fungsi invers dan komposisi keduanya ada, maka berlaku $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Math Info

Pengkajian teori fungsi dipelopori oleh matematikawan Italia kelahiran Perancis, Joseph Louis Lagrange pada akhir abad ke-18. Kemudian Louis Cauchy melanjutkan kajian Langrange tersebut pada awal abad ke-19. Lebih lanjut, Cauchy juga mengembangkan penelitiannya tentang fungsi bernilai bilangan kompleks. Hasil kerja keras Cauchy ini kemudian dikembangkan oleh dua matematikawan Jerman, yaitu Karl Theodor Weierstrass dan George Friederich B. Riemann.



Sumber: *www.sovlit.com*

Gambar 3.37
Joseph Louis Lagrange

Sumber: *engineeringmath.stanford.edu*

Gambar 3.38
Karl Theodor Weierstrass

Sumber: *plus.maths.org*

Gambar 3.39
George Friederich B. Riemann

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Daerah asal fungsi $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+5x-6}{2-x}}$ adalah ....

   A. $\{x\in\mathbb{R}\mid x<2\}$
   B. $\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x<2\}$
   C. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -6 \text{ atau } 1\le x<2\}$
   D. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -6 \text{ atau } 1\le x<2\}$
   E. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -6 \text{ atau } 1< x<2\}$

2. Jika

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{, untuk } 0<x<1\\ x^2+1 & \text{, untuk } x \text{ yang lain}\end{cases}$$

   maka $f(2)\,f(-4)+f(\tfrac{1}{2})\,f(3)=$ ....
   A. 210
   B. 105
   C. 85
   D. 55
   E. 52

3. Jika $f(x)=2x$ dan $f(g(x))=-\dfrac{x}{2}+1$, maka $g(x)=$ ....

   A. $\dfrac{x}{2}-1$
   B. $\dfrac{x}{2}+1$
   C. $\frac{1}{4}(2-x)$
   D. $\frac{1}{4}(x-2)$
   E. $\frac{1}{4}(-x-2)$

4. Jika $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ dan $g(x)=\dfrac{x^2+1}{1-x^2}$, maka $f(g(x))=$ ....

   A. x^2
   B. x^2+1
   C. x^2-1
   D. $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$
   E. $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

5. Jika $f(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x + 1$, maka $g(x) = \ldots$.

A. $2x^2 - 4x + 1$
B. $2x^2 - 12x + 1$
C. $8x^2 - 8x + 1$
D. $8x^2 + 8x + 1$
E. $4x^2 - 8x + 1$

6. Jika $f(x) = 2^x$, maka $f(a + 2b - c) = \ldots$.

A. $f(a) + 2\,f(b) - f(c)$
B. $\dfrac{2\,f(a)\,f(b)}{f(c)}$
C. $\dfrac{f(a)\,f(b)^2}{f(c)}$
D. $\dfrac{f(a) + f(b)^2}{f(c)}$
E. $f(a + 2b) - f(c)$

7. Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$, maka $f(x - 2) = \ldots$.

A. $2x - 5$
B. $2x + 3$
C. $2x - 3$
D. $2x + 1$
E. $2x - 1$

8. Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$, maka $f^{-1}(x) = \ldots$.

A. $x + 9$
B. $2 + \sqrt{x}$
C. $2 + \sqrt{x+1}$
D. $2 + \sqrt{x+7}$
E. $x^2 - 2x - 3$

9. Jika $f(x) = \sqrt[3]{2x+5}$ dan $f^{-1}(3) = 4a + 1$, maka nilai a adalah ... .

A. –4
B. 2
C. 3
D. 4
E. 6

10. Jika titik (3, 2) terletak pada grafik fungsi invers $f(x) = 2x^2 + p$, maka nilai p adalah ... .

A. –5
B. –1
C. 5
D. 6
E. 15

11. Jika $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3 + 1$, dan $(f \circ g)^{-1}(a) = 2$, maka nilai a adalah ... .

A. 94
B. 12
C. 15
D. 18
E. 21

12. Daerah hasil dari fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ adalah ... .

A. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -1 \text{ atau } y \ge 7\}$
B. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le -7 \text{ atau } y \ge 1\}$
C. $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 7\}$
D. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1 \text{ atau } y \ge 7\}$
E. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \le 1 \text{ atau } y \ge -7\}$

13. Jika dan f^{-1} adalah fungsi invers dari f, maka $f^{-1}(x-2) = \dots$.

A.

B. $\dfrac{2x-3}{x-5}, x \neq 5$

C. $\dfrac{2x-2}{x+1}, x \neq -1$

D.

E. $\dfrac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$

14. Jika $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$ dan $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$, maka $(g \circ f)^{-1}(\sqrt{2}) = \dots$.

A. 1/2

B. $\sqrt{2}/2$

C. 1

D. 2

E. $2\sqrt{2}$

15. Jika $f(x) = 4x + 2$ dan $g(x) = 3$, maka $(g \circ f)(-2) = \dots$.

A. –6

B. –3

C. 3

D. 6

E. 14

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Diketahui fungsi f dan g yang diberikan oleh $f(x) = 3 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$.
    a. Tentukan $(g \circ f)(2)$.
    b. Jika $(g \circ f)(a) = 2$, tentukan nilai a.

17. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{16 - x^2}}$.

18. Misalkan $f(x) = 1/x$ dan $f(g(x)) = \dfrac{x-3}{2x}$, $x \neq 0$, $x \neq 3$. Tentukan $g^{-1}(x)$.

19. Hubungan antara biaya P (dalam rupiah) untuk suatu barang tertentu dengan permintaan D (dalam ribuan unit) mengikuti fungsi $P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$.

    Di pihak lain, permintaan meningkat selama t tahun sejak tahun 2000 menurut $D = 2 + \sqrt{t}$.

    a. Nyatakan P sebagai fungsi dari t.
    b. Hitung P, jika $t = 25$.

20. Suatu penelitian mengenai hubungan obat anti asam urat dengan jumlah asam urat dalam tubuh dinyatakan dalam fungsi $f(x) = 256 - 4x^2$, dengan x adalah dosis obat anti asam urat (dalam gram) dan $f(x)$ adalah tingkat jumlah asam urat.

    a. Tentukan daerah asal f yang mungkin.
    b. Berapa tingkat asam urat tubuh, jika diberikan obat anti asam urat sebanyak 6 gram?
    c. Jika seseorang memiliki tingkat asam urat sebesar 112, berapa banyak dosis obat anti asam urat yang diberikan?

Soal Analisis

1. Rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, dengan $F \geq -459,67$ menyatakan suhu Celcius (C) sebagai fungsi dari suhu Fahrenheit (F). Tentukan rumus untuk fungsi inversnya dan berikan interpretasinya. Apa daerah asal fungsi invers ini?

2. Suatu pesawat terbang melaju pada kecepatan 350 km/jam pada ketinggian satu mil dan lewat tepat di atas stasiun radar pada saat $t = 0$.
   a. Nyatakan jarak mendatar d (dalam mil) yang telah ditempuh pesawat sebagai fungsi waktu.
   b. Nyatakan jarak s antara pesawat dan stasiun radar sebagai fungsi dari d.
   c. Gunakan komposisi untuk menyatakan s sebagai fungsi dari t.

3. Fungsi permintaan suatu barang tertentu adalah:

$$p^2 + x - 12 = 0$$

   dengan x banyak barang yang diminta. Tentukan fungsi pendapatan totalnya. Tentukan daerah asal dari fungsi ini.

4. Suatu perusahaan meja tulis dioperasikan dengan persaingan sempurna dan dapat menjual semua meja tulis yang dibuatnya dengan harga Rp200.000,00 per meja. Misalkan x meja tulis dibuat dan dijual setiap minggu dan $C(x)$ (dalam jutaan) menyatakan biaya total produksi setiap minggu dengan $C(x) = x^2 + 400x + 3.000$. Jika dalam seminggu menghasilkan 175 meja, berapakah keuntungan perusahaan tersebut?

5. Sebuah toko dalam seminggu menjual 200 kamera, masing-masing seharga Rp3.500.000,00. Survei pemasaran menunjukkan bahwa untuk setiap potongan Rp100.000,00 yang ditawarkan kepada pembeli, banyaknya kamera yang terjual akan bertambah sebanyak 20 buah seminggu. Tentukan fungsi permintaan dan fungsi keuntungan. Jika potongan yang diberikan adalah Rp125.000,00, berapakah keuntungan toko tersebut?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ………………..
Kelas : XI
Kelompok : ………………..
Kegiatan : Mensurvei harga barang jenis tertentu
Tujuan : Menentukan fungsi permintaan dan fungsi keuntungan.

Tanggal : …………
Materi Pokok : Komposisi Fungsi dan Invers Fungsi
Semester : 2 (dua)

A. Alat dan bahan yang digunakan
   1. Toko barang jenis tertentu
   2. Alat tulis
   3. Buku catatan

B. Cara kerja
   1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 5 siswa.
   2. Lakukan survei terhadap toko yang menjual jenis barang tertentu yang terdekat dengan tempat tinggal Anda. Misalnya toko yang menjual TV, CD player, HP, dan lain-lain.
   3. Catat banyak barang yang terjual dalam satu minggu, berserta harga satuannya.
   4. Konfirmasikan kepada pemilik toko, jika diberikan potongan harga P rupiah, maka berapa peningkatan penjualan? Namakan akibat pemotongan tambahannya adalah Q satuan per minggu.
   5. Lakukan langkah 2 sampai dengan 4 untuk mensurvei jenis barang 2. Isikan data hasil survei pada tabel di bawah ini.

Nama Barang	Harga Satuan	Jumlah Penjualan per Minggu	
		Tanpa Pemotongan	Dengan Pemotongan
Jenis Barang 1			
Jenis Barang 2			

C. Analisis
   1. Jika x adalah banyaknya barang yang terjual tiap minggu, berapakah pertambahan penjualan per minggu akibat pemotongan harga?
   2. Tentukan penurunan harga untuk barang tambahan yang terjual setiap minggunya.
   3. Rumuskan fungsi permintaan (p) dan fungsi keuntungannya (R).
   4. Berapa penjualan per minggu agar diperoleh keuntungan maksimum?
   5. Berapa harga satuan yang berpadanan keuntungan maksimum tersebut?
   6. Berapa besar pemotongan harga toko tersebut sehingga diperoleh keuntungan maksimum?
   7. Tentukan invers fungsi p dan R.
   8. Lakukan langkah 1 sampai dengan 7 untuk jenis barang 2.

BAB IV

LIMIT FUNGSI

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. menjelaskan arti limit fungsi di suatu titik,
2. menghitung limit fungsi aljabar di suatu titik,
3. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit,
4. menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar,
5. menjelaskan limit dari bentuk tak tentu,
6. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit fungsi bentuk tak tentu,
7. menghitung limit fungsi yang mengarah kepada konsep turunan,
8. menentukan laju perubahan nilai fungsi terhadap peubah bebasnya.

Pengantar

Sumber: *imageshack.com*

Gambar 4.1 *Perusahaan handphone*

Sebuah perusahaan *handpone* memperkirakan bahwa biaya produksi (dalam jutaan rupiah) untuk model seri tertentu adalah:

$$C(x) = 900 + 6x - 0,3x^2 + 0,001x^3$$

dengan x banyak *handphone* yang diproduksi. Untuk memperoleh keuntungan maksimum, maka perusahaan harus menekan biaya produksinya. Pertanyaannya, berapakah tingkat produksi perusahaan tersebut untuk meminimumkan biaya produksi?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, sebaiknya Anda ingat kembali beberapa konsep tentang bentuk pangkat dan akar, daerah asal, dan operasi aljabar fungsi. Kemudian, silakan mempelajari isi bab ini. Dengan telah menguasai konsep-konsep pada bab ini, Anda diharapkan menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang terkait, secara khusus permasalahan di atas.

4.1 Pengertian Limit

Konsep limit fungsi merupakan dasar untuk mempelajari kalkulus, meskipun kalkulus sendiri telah dikenalkan oleh Sir Isaac Newton dan Gottried Wilhelm Leibniz pada pertengahan abad ke-17, sedangkan konsep limit fungsi baru dikenalkan oleh Agustin Louis Cauchy pada abad ke-18.

Konsep limit fungsi di suatu titik yang akan kita pelajari adalah melalui pendekatan intuitif, yaitu dimulai dengan menghitung nilai-nilai fungsi di sekitar titik tersebut, terkecuali di titik itu sendiri. Sebagai contoh, kita perhatikan fungsi f yang diberikan oleh:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Periksa bahwa daerah asal dari f adalah semua bilangan real x kecuali $x = 1$ karena $f(1)$ tidak ada. Kita akan menyelidiki nilai fungsi f apabila x mendekati 1, tetapi tidak sama dengan 1. Misalkan x mengambil nilai 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; dan seterusnya. Dalam hal ini kita mengambil nilai x yang semakin dekat 1, tetapi lebih kecil 1. Nilai-nilai fungsi f untuk harga-harga ini diberikan Tabel 4.1. Kemudian, misalkan x mendekati 1 sepanjang nilai yang lebih besar 1 , yaitu x mengambil nilai 2; 1,75; 1,5; 1,25; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; 1,00001, dan seterusnya. Lihat Tabel 4.2.

Tabel 4.1

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
0	1
0,25	1,25
0,5	1,5
0,75	1,75
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999

Tabel 4.2

x	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$
2	3
1,75	2,75
1,5	2,5
1,25	2,25
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001

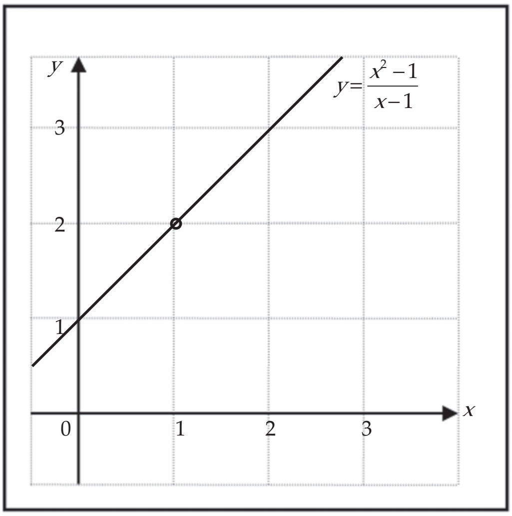
Dari Tabel 4.1 dan Tabel 4.2, kita periksa bahwa jika x bergerak semakin dekat ke 1, baik dari arah kiri maupun dari arah kanan, maka $f(x)$ bergerak semakin dekat ke 2. Sebagai contoh, dari Tabel 4.1, jika x = 0,999 maka $f(x)$ = 1,999. Yaitu, jika x lebih kecil 0,001 dari 1, maka $f(x)$ lebih kecil 0,001 dari 2.

Dari Tabel 4.2, jika x = 1,001 maka $f(x)$ = 2,001. Yaitu, jika x lebih besar 0,001 dari 1, maka $f(x)$ lebih besar 0,001 dari 2.

Situasi di atas mengatakan bahwa kita dapat membuat nilai $f(x)$ mendekati 2 asalkan kita tempatkan x cukup dekat dengan 1, meskipun nilai $f(1)$ tidak ada. Situasi semacam ini secara matematika kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Perlu dicatat di sini bahwa nilai $2 \neq f(1)$ karena f tidak terdefinisi di $x = 1$. Secara grafik situasi ini dapat digambarkan bahwa ketika $x = 1$, grafiknya terputus (berlubang).



Gambar 4.2 Grafik $y = (x^2 - 1)/(x - 1)$

Secara umum, kita gunakan notasi berikut.

Definisi 4.1

Limit $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sembarang yang dekat dengan L (sedekat yang kita mau) dengan cara mengambil nilai x yang dekat dengan c, tetapi tidak sama dengan c.

Kasarnya, nilai $f(x)$ akan semakin mendekati nilai L ketika x mendekati nilai c (dari dua sisi) tetapi $x \neq c$. Definisi secara formal akan kita pelajari nanti ketika belajar kalkulus di perguruan tinggi.

Notasi alternatif untuk

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

adalah:

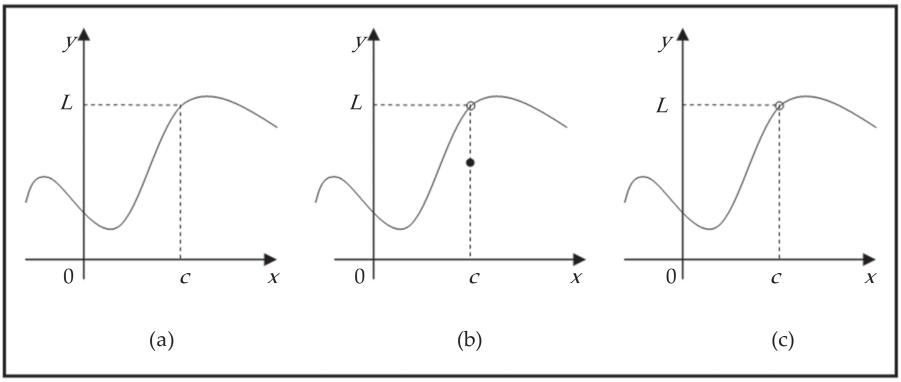
$$f(x) \to L \text{ seraya } x \to c$$

yang dibaca "$f(x)$ mendekati L ketika x mendekati c".

Kita perhatikan ungkapan "tetapi $x \neq c$" dalam Definisi 4.1, bermakna bahwa dalam menentukan limit $f(x)$ ketika x mendekati c, kita tidak pernah menganggap $x = c$. Bahkan $f(x)$ tidak harus terdefinisi di $x = c$. Tetapi yang harus kita pedulikan adalah bagaimana f terdefinisi di dekat c.

Dengan penjelasan di depan, juga membawa konsekuensi bahwa jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, limit tersebut tunggal adanya. Sifat ini yang lebih dikenal sebagai teorema ketunggalan limit.

Gambar 4.3 memperlihatkan grafik dari tiga fungsi. Kita perhatikan bahwa di bagian (b) $L \neq f(c)$, sedangkan di bagian (c) $f(c)$ tidak terdefinisi. Tetapi pada setiap kasus, apapun yang terjadi di c, $\lim_{x \to c} f(x) = L$.



Gambar 4.3 $\lim_{x \to c} f(x) = L$ dalam Tiga Kasus

Contoh 4.1.1

Tebaklah nilai $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$ tidak terdefinisi di $x = 2$, tetapi hal itu tidak menjadi masalah karena yang perlu kita pertimbangkan dalam menghitung $\lim_{x \to 2} f(x)$ adalah titik-titik di sekitar 2, bukan untuk $x = 2$. Tabel 4.3 dan 4.4 memberikan nilai $f(x)$ (sampai enam desimal) untuk nilai x yang mendekati 2 (tetapi tidak sama dengan 2). Dengan merujuk nilai-nilai pada tabel, kita dapat menebak bahwa:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$$

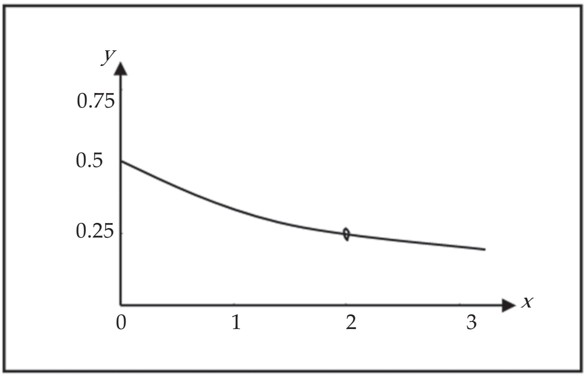
Tabel 4.3

$x < 2$	$f(x)$
1,5	0,285714
1,75	0,266667
1,9	0,256410
1,99	0,250626
1,999	0,250063
1,9999	0,250006

Tabel 4.4

$x > 2$	$f(x)$
2,5	0,222222
2,25	0,235294
2,1	0,243090
2,01	0,249377
2,001	0,249938
2,0001	0,249994

Ilustrasi grafik diberikan oleh Gambar 4.4.



Gambar 4.4 Grafik fungsi $y=(x-2)/(x^2-4)$

□

Contoh 4.1.2

Carilah $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$.

Penyelesaian:

Tabel 4.5 memberikan data nilai fungsi di beberapa nilai x di sekitar 0.

Tabel 4.5

x	$\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$
$\pm 1,0$	0,123106
$\pm 0,5$	0,124516
$\pm 0,1$	0,124980
$\pm 0,05$	0,124995
$\pm 0,01$	0,124999

Pada saat x mendekati 0, nilai fungsi tampak mendekati 0,1249999... , sehingga kita menebak bahwa $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}=\dfrac{1}{8}$.

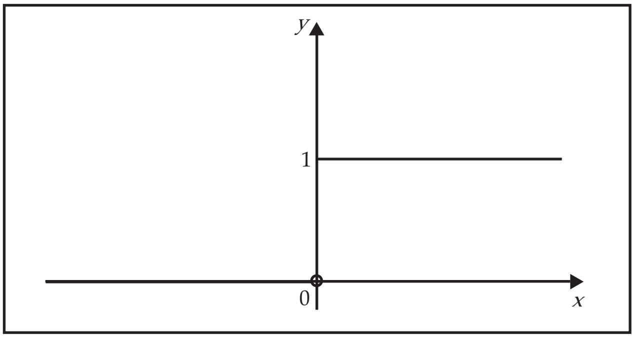
□

Contoh 4.1.3

Fungsi Heaviside H didefiniskan oleh:

$$H(t)=\begin{cases}0\ , \text{ untuk } t<0\\ 1\ \ , \text{ untuk } t\geq 0\end{cases}$$

Fungsi ini dinamai oleh penemunya, seorang insinyur elektrik Oliver Heaviside (1850 – 1925). Grafiknya diberikan oleh Gambar 4.5.



Gambar 4.5 *Fungsi Heaviside*

Ketika t mendekati 0 dari arah kiri, $H(t)$ mendekati 0, tetapi jika t mendekati 0 dari arah kanan, $H(t)$ mendekati 1. Oleh karena itu tidak ada bilangan tunggal yang didekati oleh $H(t)$ ketika t mendekati 0. Dalam situasi seperti ini kita katakan bahwa $\lim\limits_{t\to 0} H(t)$ tidak ada.

□

Limit Satu Sisi

Pada Contoh 4.1.3 dijelaskan bahwa $H(t)$ mendekati 0 ketika t mendekati 0 dari arah kiri dan $H(t)$ mendekati 1 ketika t mendekati 0 dari arah kanan. Seperti disampaikan pada contoh itu, bahwa $\lim\limits_{t\to 0} H(t)$ tidak ada. Namun secara khusus kita dapat mengatakan bahwa:

$$\lim_{t\to 0^-} H(t)=0 \text{ dan } \lim_{t\to 0^+} H(t)=1$$

Simbol "$t\to 0^-$" menunjukkan bahwa yang kita pertimbangkan hanyalah nilai t yang lebih kecil dari 0. Demikian pula, "$t\to 0^+$" menunjukkan bahwa yang kita pertimbangkan hanyalah nilai t yang lebih besar dari 0. Secara umum kita mempunyai definisi berikut ini.

> Definisi 4.2
>
> Limit kiri $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan:
>
> $$\lim_{x\to c^-} f(x)=L$$
>
> jika kita dapat membuat $f(x)$ sembarang dekat dengan L dengan cara mengambil nilai x cukup dekat ke c, dan x lebih kecil daripada c.

Jika kita bandingkan Definisi 4.2 dengan Definisi 4.1, perbedaannya adalah bahwa kita syaratkan x harus lebih kecil daripada c. Dengan cara serupa, jika kita syaratkan x harus lebih besar daripada c, kita peroleh "limit kanan dari $f(x)$ ketika x mendekati c adalah sama dengan L", dan kita notasikan dengan:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Dengan membandingkan Definisi 4.1 dan definisi limit satu-sisi, kita mempunyai hasil berikut ini.

> Teorema 4.1
>
> $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.

Contoh 4.1.4

Misalkan:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 \ , & \text{untuk } x \leq 1 \\ -x + 3 \ , & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

Hitunglah (jika ada):

a. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$

b. $\lim_{x \to 1^+} f(x)$

c. $\lim_{x \to 1} f(x)$

Penyelesaian:

a. Jika kita ambil x mendekati 1 dari arah kiri, maka nilai $f(x)$ dekat ke 4. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 4$$

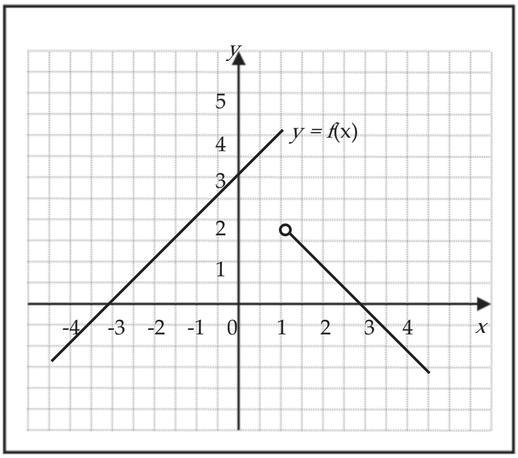
b. Jika kita ambil x mendekati 1 dari arah kanan, maka nilai $f(x)$ dekat ke 2. Dengan demikian,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

c. Dari dua jawaban di atas, $\lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x)$. Menurut Teorema 4.1, kita simpulkan bahwa:

$$\lim_{x \to 1} f(x) \text{ tidak ada}$$

Sebagai ilustrasi situasi ini, grafik fungsi f diberikan oleh Gambar 4.6.



Gambar 4.6

Meskipun tampak bahwa nilai $f(1) = 4$, tidak berarti $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

□

Contoh 4.1.5

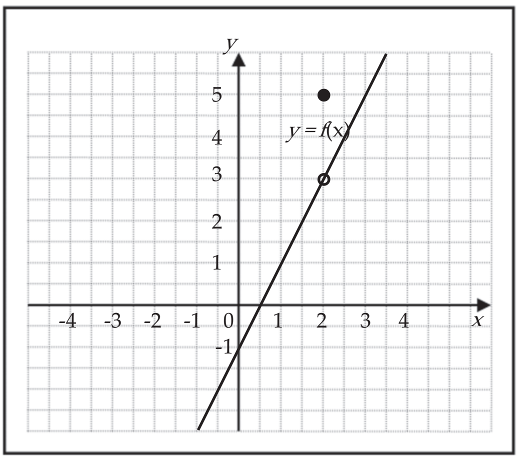
Misalkan $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{, untuk } x \neq 2 \\ 5 & \text{, untuk } x = 2 \end{cases}$. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini $f(2) = 5$, tetapi jika $x \neq 2$ dan x yang cukup dekat dengan 2, maka nilai $f(x)$ dekat dengan 3. Jadi,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

Perhatikan ilustrasi grafiknya pada Gambar 4.7.



Gambar 4.7

□

Dari Contoh 4.1.1 dan juga ilustrasi di awal subbab meskipun akurat, cara menentukan nilai limit fungsi di suatu titik dengan metode tersebut terkesan lamban dan tidak efisien. Penebakan nilai limit untuk beberapa fungsi dapat dilakukan dengan pemfaktoran. Sebagai ilustrasi, kita perhatikan kembali Contoh 4.1.1 bahwa untuk $x \neq 2$ atau $x-2 \neq 0$, fungsi $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$ dapat kita sederhanakan menjadi:

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Kemudian dengan mengambil x mendekati 2 (baik dari kanan ataupun dari kiri), maka nilai $f(x)$ mendekati 1/4. Oleh karena itu,

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

Tugas Mandiri

1. Jika p adalah sukubanyak, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to c} p(x) = p(a)$.
2. Apa yang salah dengan persamaan berikut?

$$\frac{x^2+3x-10}{x-2} = x+5$$

Kemudian, mengapa persamaan:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+3x-10}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+5)$$

benar?

Latihan 4.1

1. Jelaskan dengan kata-kata sendiri apakah yang dimasud dengan persamaan $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 7$.

   Mungkinkah pernyataan ini benar dan harus $f(-2) = 7$? Jelaskan.
2. Apakah yang dimaksud dengan mengatakan:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 5 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = -4.$$

   Dalam keadaan ini, mungkinkah $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada? Jelaskan.

3. Untuk fungsi yang grafiknya diberikan, nyatakan nilai besaran yang diberikan jika ada. Jika tidak ada, mengapa?

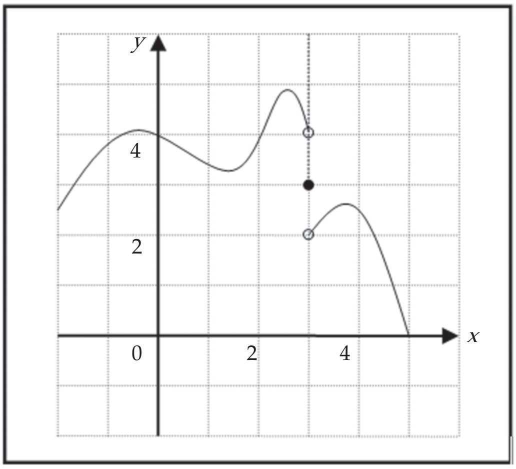
a. $\lim_{x\to 1} f(x)$

b. $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

c. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

d. $\lim_{x\to 3} f(x)$

e. $f(3)$



Gambar 4.8

4. Untuk fungsi yang grafiknya diberikan, nyatakan nilai besaran yang diberikan jika ada. Jika tidak ada, mengapa?

a. $\lim_{x\to -2} f(x)$

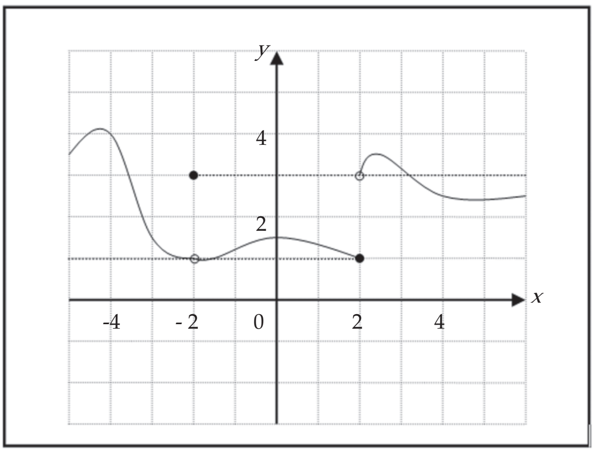
b. $\lim_{x\to 2^-} f(x)$

c. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

d. $\lim_{x\to 2} f(x)$

e. $f(-2)$

f. $f(2)$



Gambar 4.9

5. Gambarkan sketsa grafik fungsi f berikut dan gunakanlah untuk menentukan nilai c sehingga $\lim_{x\to c} f(x)$ ada.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+5 & \text{, untuk } x<1 \\ 6x & \text{, untuk } x\geq 1 \end{cases}$$

6. (Gunakan kalkulator) Jika ada, tentukan setiap limit yang diberikan berikut. Jika tidak ada, mengapa?

a. $\lim\limits_{x \to -2} 3x+2$

b. $\lim\limits_{x \to 2} (x^2+2x-1)$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2}{x+2}$

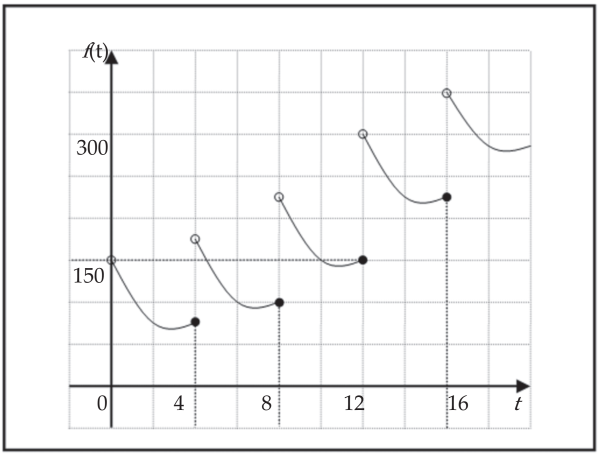
d. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-1}{2x+2}$

7. Tentukan nilai k sehingga limit yang diberikan ada.

a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ dengan $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{, untuk } x \leq 2 \\ 5x+k & \text{, untuk } x > 2 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ dengan $f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{, untuk } x \leq -1 \\ x^2+k & \text{, untuk } x > -1 \end{cases}$

8. Seorang pasien menerima suntikan 150 mg obat setiap 4 jam. Grafik menunjukkan banyaknya $f(t)$ obat di dalam aliran darah setelah t jam. Tentukan $\lim\limits_{x \to 12^-} f(t)$ dan $\lim\limits_{x \to 12^+} f(t)$, dan jelaskan arti penting limit satu arah ini.



Gambar 4.10

9. *Perdagangan*

Seorang pedagang menjual produksinya dalam satuan kilogram. Jika tidak lebih dari 10 kg yang dipesan, ongkos pedagang tersebut adalah Rp10.000,00 per kg. Tetapi untuk mengundang banyak pemesan, pedagang itu menurunkan ongkosnya hanya Rp9.000,00 per kg untuk pembelian di atas 10 kg. Jadi, jika x kg hasil produksinya terjual, maka besarnya jumlah ongkos $C(x)$ (dalam puluhan ribu rupiah) untuk pesanan tersebut diberikan oleh:

$$C(x) = \begin{cases} x & \text{, untuk } 0 \leq x \leq 10 \\ 0{,}9x & \text{, untuk } x > 10 \end{cases}$$

Gambarkan sketsa grafik fungsi C. Kemudian, tentukan $\lim\limits_{x \to 10^-} C(x)$, $\lim\limits_{x \to 10^+} C(x)$, dan $\lim\limits_{x \to 10} C(x)$ jika ada.

10. Pengkapalan muatan didasarkan pada aturan bahwa rendahnya tawaran ongkos per kilogram sesuai kenaikan muatannya. Misalkan terdapat muatan yang beratnya x kg dan $C(x)$ (dalam puluhan ribuan rupiah) menyatakan ongkos muatannya, dengan:

$$C(x)=\begin{cases}0,80x & \text{, untuk } 0<x\leq 50\\ 0,70x & \text{, untuk } 50<x\leq 200\\ 0,65x & \text{, untuk } x>200\end{cases}$$

a. Gambarkan sketsa grafik fungsi C.

b. Hitunglah $\lim\limits_{x\to 50^-} C(x)$ dan $\lim\limits_{x\to 50^+} C(x)$ serta $\lim\limits_{x\to 200^-} C(x)$ dan $\lim\limits_{x\to 200^+} C(x)$.

4.2 Teorema Limit Fungsi Aljabar

Pada subbab sebelumya, kita menggunakan kalkulator dan grafik untuk menebak nilai limit, dan adakalanya tebakan kita tidak tepat. Dua metode tersebut terkesan kurang efisien. Setelah memahami betul konsep tersebut, dalam subbab ini kita akan menggunakan sifat-sifat limit berikut, yang disebut Teorema Limit untuk menghitung limit fungsi aljabar lebih efisien. Teorema-teorema limit berikut disajikan tanpa bukti karena buktinya menggunakan definisi formal, yang di luar jangkauan buku ini.

Fungsi f disebut fungsi aljabar, jika fungsi tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan operasi aljabar (seperti penjumlahan, pengurangan, perkalian, pembagian, dan penarikan akar) yang dimulai dengan suku banyak.

Teorema 4.2 (Teorema Limit)

1. $\lim\limits_{x\to c} k = k$, k adalah suatu konstanta
2. $\lim\limits_{x\to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x\to c} x^n = c^n$, n bilangan asli
4. Jika k adalah suatu konstanta, dan

$$\lim_{x\to c} f(x) \quad \text{dan} \quad \lim_{x\to c} g(x) \text{ ada}$$

maka:

a. $\lim\limits_{x\to c} (kf)(x) = k\lim\limits_{x\to c} f(x)$

b. $\lim\limits_{x\to c} (f+g)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x) + \lim\limits_{x\to c} g(x)$

c. $\lim\limits_{x\to c} (fg)(x) = \lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to c} g(x)$

d. $\lim\limits_{x\to c} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x\to c} g(x)\neq 0$

e. $\lim\limits_{x\to c} f^n(x) = \left[\lim\limits_{x\to c} f(x)\right]^n$, untuk n bilangan asli

f. $\lim\limits_{x\to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to c} f(x)}$, n bilangan asli, dan $\lim\limits_{x\to c} f(x)>0$

Contoh 4.2.1

Hitung limit berikut dan beri alasan tiap langkah.

a. $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+8x-6)$ b. $\lim\limits_{x\to -2}(x^3+3)(x^2-5x)$ c. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x}$

Penyelesaian:

a.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}(x^2+8x-6) &= \lim_{x\to 3}x^2+\lim_{x\to 3}8x-\lim_{x\to 3}6 && \text{(Teorema 4.2 bagian 4b)}\\ &= \lim_{x\to 3}x^2+8\lim_{x\to 3}x-\lim_{x\to 3}6 && \text{(Teorema 4.2 bagian 4a)}\\ &= 3^2+8\cdot 3-6 && \text{(Teorema 4.2 bagian 2 dan 3)}\\ &= 27\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2}(x^3+3)(x^2-5x) &= \lim_{x\to -2}(x^3+3)\cdot\lim_{x\to -2}(x^2-5x) && \text{(Teorema 4.2 bagian 4c)}\\ &= \left(\lim_{x\to -2}x^3+\lim_{x\to -2}3\right)\cdot\left(\lim_{x\to -2}x^2-5\lim_{x\to -2}x\right) && \text{(Teorema 4.2 bagian 4a dan 4b)}\\ &= \left((-2)^3+3\right)\cdot\left((-2)^2-5(-2)\right) && \text{(Teorema 4.2 bagian 2 dan 3)}\\ &= (-5)(14)=-70\end{aligned}$$

c.
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2-1}{5-3x}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)}=\frac{15}{-1}=-15 \qquad \text{(Teorema 4.2 bagian 4d)}$$

□

Contoh 4.2.2

Tentukan $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{\dfrac{8x+1}{x+3}}$.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{8x+1}{x+3}} &= \sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{8x+1}{x+3}} && \text{(Teorema 4.2 bagian 4f)}\\ &= \sqrt{\frac{\lim\limits_{x\to 1}(8x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+3)}} && \text{(Teorema 4.2 bagian 4d)}\\ &= \sqrt{\frac{8+1}{1+3}}\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

□

Dalam praktiknya kita sering menjumpai bentuk $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, sehingga sifat limit 4d tidak dapat kita terapkan secara langsung karena pembagian dengan bilangan nol tidak dibenarkan. Limit model ini sering disebut sebagai limit bentuk tak tentu. Cara menghitung limit jenis ini, terlebih dahulu kita sederhanakan atau kita rasionalkan terlebih dahulu. Berikut ini beberapa contoh yang berkaitan dengan bagaimana menghitung limit dari bentuk tak tentu.

Contoh 4.2.3

Tentukan $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Penyelesaian:

Karena $\lim_{x \to 3} (x-3) = 0$, maka kita tidak dapat menerapkan sifat limit 4d. Dengan memfaktorkan pembilang, kita peroleh:

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Jika $x \neq 3$ ($x - 3 \neq 0$), maka pembilang dan penyebut dapat dibagi dengan $x - 3$,

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x + 3$$

Karena dalam menghitung limit kita hanya memperhatikan nilai x di sekitar 3 tetapi tidak sama dengan 3, maka pembagian di sini diperbolehkan. Jadi,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} (x + 3) = 6$$

□

Contoh 4.2.4

Tentukan $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$.

Penyelesaian:

Seperti pada Contoh 4.2.3, untuk $x \neq 4$ kita peroleh:

$$\frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$$

Oleh karena itu, dengan menerapkan Teorema 4.2 4d,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

□

Contoh 4.2.5

Hitung $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$.

Penyelesaian:
Kita tidak dapat menerapkan Teorema 4.2 (4d) secara langsung karena limit penyebut bernilai 0. Di sini pembilang kita rasionalkan lebih dahulu, yaitu menghilangkan tanda akarnya. Dalam hal ini kita kalikan dengan sekawannya,

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2} &= \frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}\times\frac{\sqrt{x^2+16}+4}{\sqrt{x^2+16}+4}\\ &= \frac{(x^2+16)-16}{x^2(\sqrt{x^2+16}+4)}\\ &= \frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2+16}+4}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+16}+4}=\frac{1}{\sqrt{0+16}+4}=\frac{1}{8}$$

Hasil ini sesuai dengan tebakan kita dulu pada Contoh 4.1.2.

□

Contoh 4.2.6.

Misalkan $f(x)=x^2+3x-1$, hitunglah $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Penyelesaian:
Karena $h\neq 0$, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2+3(x+h)-1]-[x^2+3x-1]}{h}\\ &= \frac{2xh+3h+h^2}{h}\\ &= 2x+3+h\end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+3+h)=2x+3$$

□

Contoh 4.2.7

Misalkan $f(x)=\sqrt{x}$, hitunglah $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

Penyelesaian:

Seperti pada Contoh 4.2.5, pembilangnya kita rasionalkan lebih dahulu. Kemudian, karena $h\neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}&=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\\&=\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}\cdot\frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\\&=\frac{(2+h)-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})}\\&=\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

□

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk membahas soal-soal berikut ini.

1. Berikan contoh dua buah fungsi, f dan g, sehingga $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ atau $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ tidak ada, tetapi $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]$ ada.
2. Berikan contoh dua buah fungsi, f dan g, sehingga $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ atau $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ tidak ada, tetapi $\lim\limits_{x\to c}[f(x)g(x)]$ ada.

Latihan 4.2

1. Diketahui bahwa:

   $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-2$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to c} h(x)=16$

   Tentukan limit berikut (jika ada). Jika tidak ada, mengapa?

   a. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+h(x)]$ $\qquad$ b. $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^3$

c. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[4]{h(x)}$

d. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

e. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

f. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{3\,f(x)}{h(x) - 2\,f(x)}$

2. Tentukan setiap limit yang diberikan dengan menggunakan teorema limit fungsi.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - x + 5)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2)(x^2 - 8x)$

c. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x + 4}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$

e. $\lim\limits_{t \to -2} \sqrt{t^4 + 3t + 6}$

f. $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

3. a. Apa yang salah dengan persamaan berikut?

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 4$$

b. Dengan fakta di bagian a, mengapa persamaan:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 4)$$

benar?

4. Hitunglah setiap limit berikut, jika ada.

a. $\lim\limits_{t \to -5} \dfrac{t^2 - 25}{t + 5}$

b. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

c. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

d. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{2 - 3y - 2y^2}{16 + 6y - y^2}$

e. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - x} - 3}{x}$

g. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 4} - 3}$

h. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2}{1 - x^2} \right)$

i. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2} - x^2}{x^2}$

j. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{t + 1} - 1}{t}$

5. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 6$

b. $f(x) = x^3 - 8$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

d. $f(x) = 2\sqrt{x}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$, $x \neq -2$

6. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h}$ untuk setiap fungsi f pada soal nomor 5.

4.3 Laju Perubahan (Pengayaan)

Misalkan y adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain, x, sehingga y adalah fungsi dari x dan dapat kita tuliskan $y = f(x)$. Jika x berubah dari $x = c$ sampai $x = c + h$, maka perubahan x adalah:

$$\Delta x = (c + h) - c = h$$

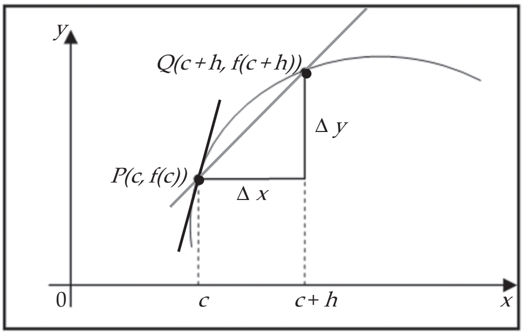
(Δx dibaca "delta x") dan perubahan padanannya adalah:

$$\Delta y = f(c + h) - f(c)$$

Hasil bagi selisih:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

disebut rerata laju perubahan y terhadap x sepanjang interval $[c,\ c + h]$, dan ditafsirkan sebagai kemiringan tali busur PQ pada Gambar 4.11.



Gambar 4.11 Rerata Laju Perubahan

Kita tinjau laju perubahan rerata pada interval yang semakin kecil $[c,\ c + h]$, sehingga h mendekati 0. Limit laju perubahan rerata ini disebut laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$, yang ditafsirkan sebagai kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $P(c, f(c))$:

$$\text{Laju perubahan sesaat} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad (4.1)$$

Setelah kita memahami apa tafsiran fisis dari limit di atas, kita akan menyelesaikan permasalahan perusahaan *handpone* yang diungkapkan pada awal bab, yang disajikan menjadi contoh berikut.

Contoh 4.3.1

Sebuah perusahaan *handpone* memperkirakan bahwa biaya produksi (dalam jutaan rupiah) untuk model seri tertentu adalah:

$$C(x) = 1.200 + 6x - 0{,}3x^2 + 0{,}001x^3$$

dengan x banyak *handphone* yang diproduksi. Untuk memperoleh keuntungan maksimum, maka perusahaan harus menekan biaya produksinya. Berapakah tingkat produksi perusahaan tersebut untuk meminimumkan biaya produksi?

Penyelesaian:
Menurut rumus (4.1), besar laju perubahan biaya produksi terhadap banyak x satuan adalah:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \lim_{h\to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h}$$

Kita hitung dulu,

$$\begin{aligned}\frac{C(x+h)-C(x)}{h} &= \frac{[1.200+6(x+h)-0,3(x+h)^2+0,001(x+h)^3]-[1.200+6x-0,3x^2+0,001x^3]}{h}\\ &= \frac{6h-0,3h^2-0,6xh+0,003x^2h+0,003xh^2+0,001h^3}{h}\\ &= 6-0,3h-0,6x+0,003x^2+0,003xh+0,001h^2\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} &= \lim_{h\to 0} \frac{C(x+h)-C(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(6-0,3h-0,6x+0,003x^2+0,003xh+0,001h^2\right)\\ &= 6-0,6x+0,003x^2\end{aligned}$$

Jadi, besar laju perubahan biaya produksi terhadap x adalah $6-0,6x+0,003x^2$.
Selanjutnya, misalkan:

$$C'(x) = 6-0,6x+0,003x^2$$

Persamaan ini adalah persamaan kuadrat dalam x, sehingga akan mencapai minimum ketika:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-0,6}{2(0,003)} = 100$$

(Ingat pelajaran kelas X). Untuk $x = 100$ akan memberikan biaya produksi sebesar:

$$C(100) = 1.200+6(100)-0,3(100)^2+0,001(100)^3 = 200.$$

Jadi, pada tingkat produksi x = 100 satuan akan meminimumkan biaya produksi perusahaan, yang besarnya 200 juta rupiah.

□

Latihan 4.3

1. Gelombang udara dingin mendekati suatu SMA. Temperatur t setelah tengah malam adalah T, dengan:

$$T = 0,1(400-40t+t^2), \quad 0 \le t \le 12$$

a. Tentukan rerata laju perubahan dari T terhadap t di antara jam 5 pagi dan jam 6 pagi.
b. Tentukan laju perubahan sesaat T terhadap t pada jam 5 pagi.

2. Suatu perusahaan mulai beroperasi pada 14 Februari 2000. Pendapatan kotor tahunan perusahaan itu setelah t tahun adalah p juta rupiah, dengan $p(t) = 50.000 + 18.000t + 600t^2$. Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 14 Februari 2007.

3. Biaya produksi (dalam jutaan rupiah) x unit komoditas tertentu adalah:

$$C(x) = 5.000 + 10x + 0{,}05x^2$$

   a. Tentukan rerata laju perubahan dari C terhadap x ketika tingkat produksi diubah:
      i. dari $x = 100$ sampai $x = 105$
      ii. dari $x = 100$ sampai $x = 101$
   b. Tentukan laju perubahan sesaat dari C terhadap x untuk x = 100. (Ini disebut biaya marginal)

4. Fungsi berikut memberikan fungsi biaya pada suatu perusahaan. Jika x menyatakan banyak barang yang diproduksi untuk setiap fungsi biaya yang diberikan, tentukan tingkat produksi yang meminimumkan biaya, kemudian tentukan biaya produksi pada nilai ini.
   a. $C(x) = 25.000 + 120x + 0{,}1x^2$
   b. $C(x) = 3.700 + 5x - 0{,}04x^2 + 0{,}0003x^3$

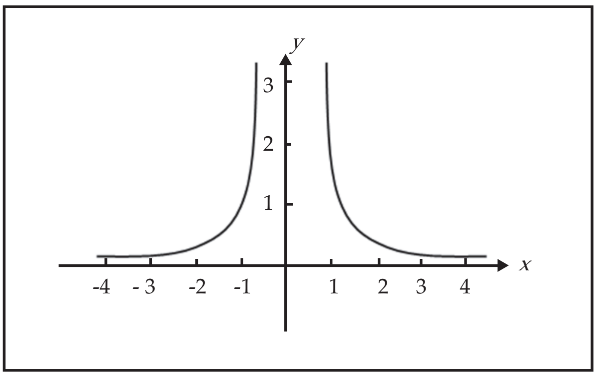
4.4 Limit di Tak Hingga (Pengayaan)

Sekarang kita akan meninjau limit fungsi apabila peubah bebas x naik atau turun tak terbatas. Limit semacam ini bermanfaat dalam teknik menggambar grafik fungsi. Di samping itu, limit-limit ini dapat digunakan pula untuk menentukan nilai-nilai ekstrim fungsi pada selang terbuka.

Kita mulai dengan fungsi yang khusus. Misalkan didefinisikan oleh:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Sketsa grafik fungsi ini diberikan oleh Gambar 4.12. Misalkan x mengambil nilai 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1.000, dan seterusnya, dengan x naik tak terbatas. Nilai-nilai fungsi terkait diberikan pada Tabel 4.6. Dari tabel tersebut, dapat kita amati bahwa nilai-nilai fungsi $f(x)$ semakin lama semakin dekat ke 0 apabila x naik menjadi besar sekali.



Gambar 4.12 Grafik Fungsi $f(x) = 1/x^2$

Tabel 4.6

x	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
1	1
2	0,25
5	0,04
10	0,01
100	0,0001
1.000	0,000001

Tabel 4.7

x	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
–1	1
–2	0,25
–5	0,04
–10	0,01
–100	0,0001
–1.000	0,000001

Secara intuisi, dapat kita lihat bahwa nilai $f(x)$ mendekati nilai 0, apabila kita ambil x cukup besar. Untuk menjelaskan situasi ini, kita notasikan:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Notasi $x \to +\infty$ kita artikan bahwa bebas x naik tak terbatas dengan nilai-nilai positif, dan $+\infty$ bukan bilangan real. Oleh karena itu, notasi $x \to +\infty$ tidak sama pengertiannya dengan $x \to 10$. Ilustrasi di atas memotivasi definisi berikut.

Definisi 4.3

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(a, +\infty)$. Kita tuliskan:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

jika untuk x positif yang naik besar sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L.

Sekarang kita tinjau fungsi f di depan dengan x mengambil nilai –1, –2, –3, –4, –5, –10, –100, –1.000, …, dan seterusnya, dengan x turun dengan nilai negatif tak terbatas. Tabel 4.7 memberikan nilai-nilai fungsi $f(x)$ terkait.

Secara intuisi, dapat kita lihat bahwa nilai $f(x)$ mendekati nilai 0, apabila kita ambil x cukup kecil dari bilangan negatif. Dalam hal ini kita tuliskan:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Definisi 4.4

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval $(-\infty, b)$. Kita tuliskan:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

jika untuk x negatif yang turun kecil sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L.

Teorema limit di subbab 4.2 tetap berlaku apabila $x \to c$ kita ganti dengan $x \to +\infty$ atau $x \to -\infty$. Kita mempunyai teorema tambahan berikut ini, yang kita sajikan tanpa bukti.

Teorema 4.3

Jika r suatu bilangan positif, maka:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

Contoh 4.4.1

Tentukan nilai dari:

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x-7}{3x+5}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x+1}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+4}{x^3+x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+x}{2x^3-3}$

Penyelesaian:

Untuk menggunakan Teorema 4.3, kita bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi yang muncul dalam pembilang atau penyebut.

a. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{4x-7}{3x+5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{7}{x}}{3+\frac{5}{x}} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

b. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

Dalam perhitungan penyebut kita peroleh:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = 0+0 = 0$$

Limit penyebut adalah 0 dan penyebut didekati untuk nilai-nilai x yang positif. Dalam hal ini kita simbolkan:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$

c. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{5x^2+4}{x^3+x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5x^2}{x^3}+\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^3}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}$

$= \dfrac{0+0}{6+0+0} = \dfrac{0}{6} = 0$

d. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{4x^3+x}{2x^3-3} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\dfrac{4x^3}{x^3}+\dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{2x^3}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}$

$= \lim_{x\to+\infty} \dfrac{4+\dfrac{1}{x^2}}{2-\dfrac{3}{x^3}} = \dfrac{4+0}{2-0} = 2$

□

Contoh 4.4.2

Hitunglah nilai limit yang diberikan.

a. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{x+5}{\sqrt{2x^2-3}}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x}\right)$

c. $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+6x}-(x-4)$

d. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{x}$

Penyelesaian:

a. Pangkat tertinggi dari x adalah 2 yang muncul di bawah tanda akar. Karena itu pembilang dan penyebut kita bagi dengan $\sqrt{x^2}=|x|$. Karena $x\to-\infty$, maka $x<0$ dan $|x|=-x$.

Jadi,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x+5}{\sqrt{2x^2-3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{5}{|x|}}{\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{x}{-x}+\dfrac{5}{-x}}{\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-1-\dfrac{5}{x}}{\sqrt{2-\dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1-0}{\sqrt{2-0}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

b. Kita rasionalkan bentuk akar itu,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x}\right) \times \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-x^2+x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}+x\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

c. $$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+6x}-(x-4) = \lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+6x}-(x-4)) \times \frac{\sqrt{x^2+6x}+(x-4)}{\sqrt{x^2+6x}+(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+6x-x^2+8x-16}{\sqrt{x^2+6x}+(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{14x-16}{\sqrt{x^2+6x}+(x-4)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{14-\frac{16}{x}}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1-\frac{4}{x}}$$

$$= \frac{14-0}{\sqrt{1+0}+1-0} = 7$$

d. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2+3}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1}}$$

$$= \sqrt{2}$$

□

Tugas Mandiri

Untuk menambah wawasan Anda tentang limit fungsi dan aplikasinya lebih lanjut, kunjungilah:

- http://en.wikipedia.org/wiki/limit_of_function
- http://learning-with-me.blogspot.com/2007/04/limit-function.html

Latihan 4.4

Tentukan nilai dari setiap limit yang diberikan.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+1}{4x+9}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+8x}{2x^2-3}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x+1}{x^2-2x+3}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x+7}{2-3x}$
5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3-2x^2+5}{2x^3+x+2}$
6. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{4y^2-3y+3}{y+1}$
7. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2-2x+5}{5x^3+x+4}$
8. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4-7x^2+1}{x^4+1}$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$
11. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-4x+5}}{x+3}$
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}-x$
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$
14. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$
15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2x-x^2}$

Rangkuman

1. Limit $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, dituliskan dengan $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$, jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sembarang yang dekat dengan L (sedekat yang kita mau) dengan cara mengambil nilai x yang dekat dengan c, tetapi tidak sama dengan c.
2. Limit kiri $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$, jika kita dapat membuat $f(x)$ sembarang dekat dengan L dengan cara mengambil nilai x cukup dekat ke c, dan x lebih kecil daripada c.
3. Jika pada (2) disyaratkan x harus lebih besar daripada c, maka diperoleh limit kanan dari $f(x)$, dan dinotasikan dengan $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$.
4. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$.
5. Operasi aljabar berlaku pada perhitungan limit fungsi.
6. Laju perubahan sesaat dari fungsi f di titik c didefinisikan sebagai $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$.
7. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(a, +\infty)$. Jika untuk x positif yang naik besar sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L, dituliskan $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$.
8. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval $(-\infty, b)$. Jika untuk x negatif yang turun kecil sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L, dituliskan $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$.

Math Info

Augustin-Louis Cauchy
1789 – 1857

Sumber: *www.math.uu.se*

Gambar 4.13
Augustin-Louis Cauchy

Augustin-Louis Cauchy lahir di Paris dan dididik di Ecole Polytechnique. Karena kesehatan yang buruk, ia dinasehatkan untuk memusatkan pikiran pada matematika. Selama karirnya, ia menjabat mahaguru di Ecole Polytechnique, Sorbonne, dan College de France. Sumbangan-sumbangan matematisnya cemerlang dan mengejutkan dalam jumlahnya. Produktivitasnya sangat hebat sehingga Academy Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah untuk mengatasi keluaran dari Cauchy.

Cauchy seorang pemeluk Katolik saleh dan pengikut Raja yang patuh. Dengan menolak bersumpah setia kepada pemerintah Perancis yang berkuasa dalam tahun 1830, ia mengasingkan diri ke Italia untuk beberapa tahun dan mengajar di beberapa institut keagamaan di Paris sampai sumpah kesetiaan dihapuskan setelah revolusi 1848.

Cauchy mempunyai perhatian luas. Ia mencintai puisi dan mengarang suatu naskah dalam ilmu persajakan bahasa Yahudi. Keimanannya dalam beragama mengantarnya mensponsori kerja sosial untuk ibu-ibu tanpa nikah dan narapidana.

Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad ke tujuh belas, tetapi dasar-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan rekan sebayanya (Gauss, Abel, dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Kepada Cauchy kita berutang pemikiran pemberian dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit.

Sumber: *Kalkulus dan Geometri Analitis, 1988, hal. 43*

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Nilai $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{4}{x^2-4} \right)$ adalah … .

   A. 0
   B. 1/4
   C. 1/2
   D. 2
   E. 4

2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \ldots$.

   A. 1/2
   B. 1/4
   C. 0
   D. –1/4
   E. –1/2

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \ldots$.

   A. –6
   B. –4
   C. 2
   D. 4
   E. 6

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \ldots$.

   A. 0
   B. 3
   C. 6
   D. 12
   E. 15

5. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x^2} = \ldots$.

   A. 0
   B. 1/4
   C. 1/2
   D. 1
   E. 4

6. Jika $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \dfrac{3}{4}$, maka $a+b = \ldots$.

A. 3
B. 2
C. 1
D. –1
E. –2

7. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-\sqrt{2x+3}}{x^2-9} = \ldots.$

A. 3/2
B. 1
C. 1/3
D. 1/9
E. 0

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2-5x}{3-\sqrt{9+x}} = \ldots.$

A. 30
B. 1
C. 0
D. –1
E. –30

9. Jika $f(x) = 1/2x^2$, maka $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} = \ldots.$

A. $-1/4x$
B. $-1/x^3$
C. $1/4x^3$
D. $1/4x$
E. $1/x^3$

10. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(4+5x)(2-x)}{(2+x)(1-x)} = \ldots.$

A. $-\infty$
B. 1/5
C. 2
D. 5
E. ∞

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{(x+p)(x+q)} - x\right) = \ldots.$

A. 0
B. pq
C. $p-q$
D. $\frac{1}{2}(p+q)$
E. $p-q$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x(4x+5)} - \sqrt{4x^2-3}\right) = ...$

A. ∞
B. 8
C. 5/4
D. 1/2
E. 0

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-2x} = ...$

A. 0
B. 2
C. 4
D. 6
E. ∞

14. $\lim\limits_{a \to b} \dfrac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b})}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = ...$

A. ∞
B. $3b$
C. $\sqrt[3]{b}$
D. $3a$
E. 0

15. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}}-\sqrt{2-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = ...$

A. $\sqrt{2}/4$
B. 1/2
C. $\sqrt{2}/21$
D. $\sqrt{2}$
E. $2\sqrt{2}$

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Hitunglah nilai dari $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{3-x}-1}$.

17. Jika $f(x) = 1/x^2$, hitunglah nilai dari $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

18. Carilah bilangan a dan b sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - ax + b}{2x^2 - 8} = 3$.

19. Hitunglah nilai dari $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{2x^2 - 2}{x^2 + 2x - 3} \right)^3$.

20. Jika $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + g(x)] = 2$ dan $\lim\limits_{x \to c} [f(x) - g(x)] = 1$, carilah $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x)$.

Soal Analisis

1. Misalkan jumlah penduduk pada kota tertentu setelah t tahun dari 1 Januari 2001 sebesar $10.000 + 200t + 40t^2$. Tentukan laju pertumbuhan pada 1 Januari 2010.

2. Jika $C(x)$ menyatakan fungsi biaya untuk memproduksi sebanyak x barang, tentukan tingkat produksi yang meminimumkan biaya, apabila $C(x) = 339 + 25x - 0{,}09x^2 + 0{,}0004x^3$.

3. Tentukan tingkat produksi yang akan memaksimumkan keuntungan perusahaan, jika fungsi biaya $C(x) = 10.000 + 28x - 0{,}01x^2 + 0{,}002x^3$ dan fungsi permintaan $P(x) = 90 + 0{,}02x$.

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Limit fungsi
Kelompok	:	Semester	: 2 (dua)
Kegiatan	: Mengalirkan air dari dispenser		
Tujuan	: Menentukan debit air yang mengalir dari dispenser		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Dispenser
2. 1 galon air mineral (19 liter)
3. Gelas ukur
4. Alat tulis dan komputer
5. Buku catatan
6. Stopwatch

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 siswa.
2. Siapkan galon air pada dispenser, stopwatch, dan alat tulis.
3. Alirkan air dari dispenser. Catat banyaknya volume air yang keluar dari dispenser untuk setiap periode waktu 5 menit pada tabel di bawah.

t (menit)	5	10	15	20	25	30
V (liter)						

C. Analisis

1. Buatlah grafik dari data yang Anda peroleh di atas. Jika mungkin gunakan komputer.
2. Jika $P(t, V)$ adalah titik untuk $t = 15$, carilah kemiringan tali busur PQ apabila Q adalah titik pada grafik dengan $t = 5, 10, 15, 20, 25$, dan 30.
3. Perkirakan kemiringan garis singgung di P dengan merata-rata kemiringan dua tali busur.
4. Gunakan grafik fungsi untuk memperkirakan kemiringan garis singgung di P. Kemiringan ini menyatakan debit air yang mengalir dari dispenser setelah 15 menit.
5. Tafsirkan hasil di atas sebagai notasi limit.

BAB

V

TURUNAN

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. menghitung turunan fungsi sederhana dengan menggunakan definisi turunan,
2. menentukan turunan fungsi aljabar,
3. menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar,
4. menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan rantai,
5. menggunakan turunan untuk menghitung laju perubahan,
6. menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva.

Pengantar

Sumber: *www.sifab.eu*

Gambar 5.1 *Perusahaan tekstil*

Sebuah perusahaan tekstil memperkirakan bahwa biaya produksi (dalam jutaan rupiah) untuk kain tertentu adalah:

$$C(x) = 450 + 36x - x^2 + 0{,}001x^3$$

Setelah melakukan survei, perusahaan menetapkan bahwa untuk x yard, harga jual kain tersebut adalah:

$$p(x) = 60 - 0{,}01x$$

juta rupiah untuk tiap yard. Pertanyaannya, berapakah tingkat produksi perusahaan tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum?

Pemecahan dari masalah ini erat hubungannya dengan konsep turunan fungsi. Turunan adalah bahasan awal sebelum orang berbicara tentang kalkulus diferensial, yang merupakan pembahasan lanjutan secara mendalam dari limit. Oleh karena itu, sebelum menyelesaikan masalah ini secara khusus, sebaiknya Anda harus sudah menguasai bab sebelumnya terutama fungsi dan limit fungsi.

Dengan telah menguasai konsep-konsep ini, secara khusus permasalahan yang kita hadapi di atas dapat kita selesaikan.

5.1 Turunan Fungsi

Pada subbab 4.3 kita telah pelajari bahwa laju perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ terhadap peubah bebas x pada saat $x = c$, yang secara geometri ditafsirkan sebagai kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $P(c, f(c))$ adalah:

$$\text{Laju perubahan sesaat} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Faktanya, limit bentuk ini muncul secara meluas dalam bidang kimia, fisika, rekayasa, biologi, dan ekonomi. Mengingat begitu bermanfaatnya, kita beri nama dan notasi khusus bentuk limit ini.

Definisi 5.1

Turunan fungsi f di bilangan c, dinotasikan dengan $f'(c)$, didefinisikan: sebagai

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad (5.1)$$

jika limit ini ada. Notasi $f'(c)$ dibaca "f aksen c".

Jika kita tuliskan $x = c + h$, maka $h = x - c$ dan " $h \to 0$ " setara dengan " $x \to c$ ". Oleh karena itu, definisi di atas akan setara dengan:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (5.2)$$

jika limit ini ada. Derivatif adalah sebutan lain untuk turunan.

Contoh 5.1.1

Carilah turunan fungsi $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ di bilangan c.

Penyelesaian:

Dari Definisi 5.1, kita mempunyai:

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(c+h)^2 - 5(c+h) + 2] - [3c^2 - 5c + 2]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3c^2 + 6ch + 3h^2 - 5c - 5h + 2 - 3c^2 + 5c - 2]}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6ch + 3h^2 - 5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 6c + 3h - 5 \\ &= 6c - 5 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ di bilangan c adalah $f'(c) = 6c - 5$.

□

Dalam Definisi 5.1 kita memandang turunan suatu fungsi f di bilangan tetap c. Selanjutnya, jika kita biarkan bilangan c berubah-ubah menjadi peubah x, maka kita peroleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada. Dalam hal ini kita dapat menganggap f' sebagai fungsi baru, yang disebut turunan dari f.

Contoh 5.1.2

Tentukan turunan dari:

a. $f(x) = 5x - 2$ b. $g(x) = 3x^2 + 8$ c. $k(x) = 1/x$, $x \neq 0$

Penyelesaian:

a. Untuk $f(x) = 5x - 2$,

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(5(x+h) - 2) - (5x - 2)}{h} \\ &= \frac{5x + 5h + 2 - 5x - 2}{h} = \frac{5h}{h} = 5 \end{aligned}$$

Jadi,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}5=5$$

b. Untuk $g(x) = 3x^2 + 8$,

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{[3(x+h)^2+8]-[3x^2+8]}{h}=\frac{6xh+3h^2}{h}=6x+3h$$

Jadi,

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x$$

c. Untuk $k(x)=\frac{1}{x}$, $x\neq 0$,

$$\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\frac{x-(x+h)}{hx(x+h)}=\frac{-1}{x(x+h)}$$

Jadi,

$$k'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{k(x+h)-k(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

□

Contoh 5.1.3

Untuk fungsi $f(x) = 3x^2 + 8$, carilah turunan f di 2 dengan tiga cara:

a. gantikan x dengan 2 dalam $f'(x)$,
b. gunakan rumus (5.1),
c. gunakan rumus (5.2).

Penyelesaian:

a. Dari Contoh 5.1.2 (b), diperoleh $f'(x)=6x$. Oleh karena itu,

$$f'(2)=12$$

b. Dengan rumus (5.1),

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[3(2+h)^2+8]-[2^2+8]}{h}=\lim_{h\to 0}12+3h=12.$$

c. Dengan rumus (5.2),

$$\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{(3x^2+8)-(3\cdot 2^2+8)}{x-2}=\frac{3(x^2-4)}{x-2}=3(x+2)$$

Jadi,

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}3(x+2)=12$$

□

Penggunaan notasi f' untuk turunan fungsi f diperkenalkan oleh Josep Louis Lagrange (1736 – 1813), seorang matematikawan Perancis. Notasi ini menekankan fungsi f' diturunkan dari fungsi f dan nilainya di x adalah $f'(x)$.

Jika titik (x, y) terletak pada grafik fungsi f, yaitu x memenuhi persamaan $y = f(x)$, maka notasi f' dapat digantikan dengan y' atau $\frac{dy}{dx}$. Notasi ini diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan Jerman bernama Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Dua notasi lain untuk turunan suatu fungsi f adalah:

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \text{ dan } D_x[f(x)]$$

Contoh 5.1.4

Jika diketahui $y = \frac{2-x}{3+x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini, $y = f(x)$ dengan $f(x) = \frac{2-x}{3+x}$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{2-x-h}{3+x+h} - \frac{2-x}{3+x}}{h}$$

$$= \frac{(2-x-h)(3+x)-(3+x+h)(2-x)}{h(3+x+h)(3+x)}$$

$$= \frac{(6-x-xh-3h-x^2)-(6-x-xh+2h-x^2)}{h(3+x+h)(3+x)}$$

$$= \frac{-5h}{h(3+x+h)(3+x)} = \frac{-5}{(3+x+h)(3+x)}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-5}{(3+x+h)(3+x)} = \frac{-5}{(3+x)^2}$$

□

Contoh 5.1.5 (Pengayaan)

Diketahui $f(x) = x^{1/3}$.

a. Tentukan $f'(x)$.

b. Tunjukkan bahwa f tidak mempunyai turunan di $x = 0$.

Penyelesaian:

a. Kita rasionalkan pembilangnya, untuk $x \neq 0$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^{1/3} - x^{1/3}}{h}$$

$$= \frac{[(x+h)^{1/3} - x^{1/3}][(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}{h[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}$$

$$= \frac{(x+h)-x}{h[(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}]}$$

$$= \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}}$$

Jadi,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h)^{2/3} + (x+h)^{1/3}x^{1/3} + x^{2/3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

b. Dari definisi turunan di $x = 0$,

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} \quad \text{tidak ada}$$

Jadi, f tidak mempunyai turunan di $x = 0$.

□

Contoh 5.1.6 (Pengayaan)

Diketahui $f(x) = |x|$.

a. Tunjukkan bahwa f tidak mempunyai turunan di $x = 0$.

b. Gambarkan grafik f.

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (5.2),

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

Tetapi untuk $x > 0$,

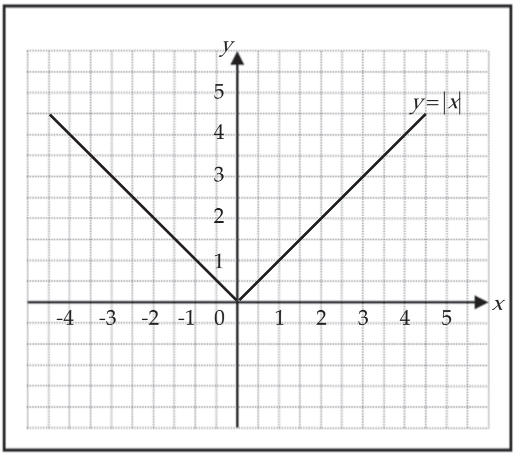
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

sedangkan untuk $x < 0$,

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

Karena limit kanan tidak sama dengan limit kiri, maka kita simpulkan bahwa $f'(0)$ tidak ada. Namun demikian, fungsi f kontinu di $x = 0$, karena $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

b. Grafik $y = f(x)$



Gambar 5.2 Grafik Fungsi $y = |x|$

Secara umum, jika fungsi mempunyai grafik di titik c bersifat patah (lancip), maka di titik tersebut f tidak mempunyai turunan. Lihat Gambar 5.2 di titik $x = 0$. Dari Contoh 5.1.5 dan 5.1.6, dapat kita simpulkan bahwa tidak semua fungsi mempunyai turunan.

Latihan 5.1

1. Tentukan $f'(c)$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = 1 + x - 3x^2$

b. $f(x) = 3x^3 + x$

c. $f(x) = \dfrac{x}{2x-3}$

d. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

e. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

f. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2-x}}$

2. Setiap limit menyatakan turunan suatu fungsi f di suatu bilangan c. Nyatakan f dan c untuk setiap kasus.

a. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

b. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3 - 8}{h}$

c. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^8 - 1}{x-1}$

d. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - 12}{x-2}$

e. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{(x+h)^2} - \dfrac{1}{(x+h)^2}}{h}$

f. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

3. Carilah turunan dari setiap fungsi yang diberikan, dan nyatakan daerah asal fungsi dan daerah asal turunannya.

a. $f(x) = 5x - 8$

b. $f(x) = x^3 - x^2 + 5x$

c. $f(x) = x + \sqrt{x}$

d. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

e. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-3}$

f. $f(x) = \sqrt{1+3x}$

4. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari setiap persamaan yang diberikan.

a. $y = \dfrac{4}{x^2} + 3x$

b. $y = \dfrac{2}{x-3}$

c. $y = \sqrt{2-7x}$

d. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

5.2 Teorema Turunan Fungsi Aljabar

Dalam bagian sebelumnya kita telah bahas bersama bagaimana proses penurunan (diferensiasi) fungsi dengan definisi langsung. Akan tetapi proses ini terlalu panjang, berikut ini akan kita pelajari teorema-teorema yang memberi kemudahan kepada kita untuk diferensiasi.

Teorema 5.1
Jika fungsi $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$ untuk semua x.

Bukti:

Langsung dari definisi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 0 = 0 \end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi konstan adalah nol.

□

Teorema 5.2
Jika n bilangan asli dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$ untuk semua x.

Bukti:

Disini kita perlu menguraikan $(x+h)^2$ dengan menggunakan Teorema Binomial,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n) - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}) \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

karena semua suku, kecuali yang pertama, mempunyai faktor h dan akibatnya mendekati 0.

□

Meskipun tidak dibuktikan di sini, faktanya Teorema 5.2 masih berlaku apabila n bilangan rasional.

Contoh 5.2.1

Tentukan $f\,'(x)$ jika:

a. $f(x) = x^7$

b. $f(x) = 5x^{10}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d. $f(x) = \dfrac{4}{x^6}$

e. $f(x) = 2\sqrt{x}$

f. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Penyelesaian:

Dengan Teorema 5.2,

a. $f(x) = x^7$

$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$

b. $f(x) = 5x^{10}$

$f'(x) = 10\cdot 5x^{10-1} = 50x^9$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2/x^3$

d. $f(x) = \dfrac{4}{x^6} = 4x^{-6}$

$f'(x) = (-6)\cdot 4x^{-6-1} = -24x^{-7} = -24/x^7$

e. $f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2}\cdot 2x^{1/2-1} = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$

f. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

Teorema 5.3

Misalkan u suatu fungsi, k konstanta, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = ku(x)$. Jika u mempunyai turunan, maka:

$$f'(x) = ku'(x)$$

untuk semua x.

Bukti:

Dari Definisi 5.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ku(x+h) - ku(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} k\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= k\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \\ &= ku'(x) \end{aligned}$$

□

Sebagai contoh sederhana, jika $f(x) = 8x^5$, maka:

$$f'(x) = 5 \cdot 8x^4 = 40x^4$$

Teorema 5.4

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh

$f(x) = u(x) + v(x)$. Jika u dan v mempunyai turunan, maka:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

untuk semua x.

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) - u(x)] + [v(x+h) - v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \\ &= u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

□

Hasil teorema itu dapat diperluas ke sejumlah berhingga fungsi. Khususnya, jika fungsi itu adalah sukubanyak, maka kita tinggal menurunkan masing-masing sukunya.

Contoh 5.2.2

Tentukan $f'(x)$, jika $f(x) = 7x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 5$.

Penyelesaian:
Sebagai akibat dari Teorema 5.4,

$$f'(x) = 7 \cdot 5x^4 - 3 \cdot 4x^3 - 8 \cdot 2x + 0 = 35x^4 - 12x^3 - 16x$$

□

Contoh 5.2.3

Tentukan $f'(x)$, jika:

a. $f(x) = (x^2 - 2)^2$ $\qquad$ $f(x) = x^2 + 3x + \dfrac{1}{x^2}$

Penyelesaian:
a. $f(x) = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4$, sehingga:

$$f'(x) = 4x^3 - 4 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 8x$$

b. Fungsi dapat dituliskan dengan $f(x) = x^2 + 3x + x^{-2}$, maka:

$$f'(x) = 2x + 3 + (-2)x^{-3} = 2x + 3 - \frac{2}{x^3}$$

□

Contoh 5.2.4

Tentukan $f'(2)$, jika $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{3}{x^3}$.

Penyelesaian:

Kita tuliskan $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 3x^{-3}$, sehingga:

$$f'(x) = \tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + (-3) \cdot 3x^{-4} = x^2 - 9x^{-4} = x^2 - \frac{9}{x^4}$$

Jadi, $f'(2) = 2^2 - \dfrac{9}{2^4} = 4 - \dfrac{9}{16} = \dfrac{55}{16}$.

□

Teorema 5.5

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = u(x) \cdot v(x)$. Jika u dan v mempunyai turunan, maka:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

untuk semua x.

Bukti:

Karena v mempunyai turunan di x, maka berakibat:

$$\lim_{h\to 0} v(x+h) = v(x)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\,v(x+h)-u(x)\,v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\,v(x+h)-u(x)\,v(x+h)+u(x)\,v(x+h)-u(x)\,v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x+h)+u(x)\cdot\frac{v(x+h)-v(x)}{h} \right) \\ &= u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x) \end{aligned}$$

□

Contoh 5.2.5

Tentukan $f'(x)$, jika $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(x^5 + 3x^2)$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini, $f(x) = u(x)\,v(x)$, dengan $u(x) = (2x^3 - 4x^2)$ dan $v(x) = x^5 + 3x^2$

$$u(x) = (2x^3 - 4x^2) \longrightarrow u'(x) = 6x^2 - 8x$$

$$v(x) = x^5 + 3x^2 \longrightarrow v'(x) = 5x^4 + 6x$$

Jadi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) \\ &= (6x^2 - 8x)(x^5 + 3x^2) + (2x^3 - 4x^2)(5x^4 + 6x) \\ &= (6x^7 - 8x^6 + 18x^4 - 24x^3) + (10x^7 - 20x^6 + 12x^4 - 24x^3) \\ &= 16x^7 - 28x^6 + 30x^4 - 48x^3 \end{aligned}$$

□

Contoh 5.2.6

Tentukan y', jika $y = (x^4 - x^2)(2x + 3)$.

Penyelesaian:

$$y = (x^4 - x^2)(2x+3) \Longrightarrow u = x^4 - x^2 \longrightarrow u' = 4x^3 - 2x$$

$$v = 2x + 3 \longrightarrow v' = 2$$

$$
\begin{aligned}
\text{Jadi, } y' &= u'v + uv' \\
&= (4x^3 - 2x)(2x + 3) + (x^4 - x^2)(2) \\
&= (8x^4 - 4x^2 + 12x^3 - 6x) + (2x^4 - 2x^2) \\
&= 10x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 6x
\end{aligned}
$$

□

Teorema 5.6

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x) \neq 0$. Jika u dan v mempunyai turunan, maka:

$$f'(x) = \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$$

untuk semua x.

Bukti:

Karena v mempunyai turunan di x dan $v(x) \neq 0$, maka berlaku:

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x+h)} = \frac{1}{v(x)}$$

Dari definisi turunan di x,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x+h)}{h\,v(x+h)\,v(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)\,v(x) - u(x)\,v(x) + u(x)\,v(x) - u(x)\,v(x+h)}{h\,v(x+h)\,v(x)} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \frac{v(x)}{v(x+h)\,v(x)} - \frac{u(x)}{v(x+h)\,v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) \\
&= u'(x)\frac{v(x)}{v^2(x)} - \frac{u(x)}{v^2(x)}\,v'(x) \\
&= \frac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}
\end{aligned}
$$

□

Contoh 5.2.7

Tentukan $f'(x)$ untuk $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x+5}$.

Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{2x^2+1}{x+5} \Rightarrow u(x) = 2x^2 + 1 \longrightarrow u'(x) = 4x$$

$$v(x) = x + 5 \longrightarrow v'(x) = 1$$

Jadi, $\quad f'(x) = \dfrac{u'(x)\,v(x) - u(x)\,v'(x)}{v^2(x)}$

$$= \frac{(4x)(x+5) - (2x^2+1)(1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 20x - 1}{(x+5)^2}$$

$\square$

Contoh 5.2.8

Tentukan y' untuk $y = \dfrac{2x^2+5x-6}{x^2+4}$.

Penyelesaian:

$$y = \frac{2x^2+5x-6}{x^2+4} \Rightarrow u = 2x^2 + 5x^2 - 6 \rightarrow u' = 4x + 5$$

$$v = x^2 + 4 \rightarrow v' = 2x$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(4x+5)(x^2+4) - (2x^2+5x-6)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 5x^2 + 16x + 20 - 4x^2\ 10x^2 + 12x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 + 28x + 20}{(x^2+4)^2}$$

$\square$

Selanjutnya, jika kita mempunyai fungsi:

$$f(x) = (5x^2+1)^3$$

maka kita dapat memperoleh $f'(x)$ dengan menerapkan Teorema 5.5 dua kali, yaitu dengan menuliskan lebih dulu $f(x) = (5x^2+1)^2(5x^2+1)$.

Perhitungannya sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2+1)^2 \cdot D_x(5x^2+1) + (5x^2+1) \cdot D_x[(5x^2+1)(5x^2+1)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + (5x^2+1)[(5x^2+1)(10x) + (5x^2+1)(10x)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + (5x^2+1)[2(5x^2+1)(10x)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + 2[(5x^2+1)^2(10x)] \end{aligned}$$

Jadi,

$$f'(x) = 3(5x^2+1)^2(10x) \tag{5.3}$$

Dari ilustrasi di atas, jika kita ambil $u(x) = x^3$ dan $v(x) = 5x^2+1$, maka f adalah fungsi komposisi $u \circ v$, sehingga:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(v(x)) \\ &= u(5x^2+1) \\ &= (5x^2+1)^3 \end{aligned}$$

Karena $u'(x) = 3x^2$ dan $v'(x) = 10x$, kita dapat menuliskan (5.3) dalam bentuk:

$$f'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$$

Secara umum, hasil ini benar untuk sembarang komposisi dua fungsi yang mempunyai turunan. Aturan diferensiasi seperti ini sering kita kenal dengan aturan rantai.

Teorema 5.7 (Aturan Rantai)

Jika fungsi v mempunyai turunan di x dan u mempunyai turunan di $v(x)$, maka fungsi komposisi $u \circ v$ mempunyai turunan di x, dan

$$(u \circ v)'(x) = u'(v(x))\, v'(x)$$

untuk semua x.

Contoh 5.2.9

Tentukan $f'(x)$ apabila $f(x) = (2x+1)^5$.

Penyelesaian:

Fungsi f dapat kita anggap sebagai komposisi fungsi dari u dan v,

$$f(x) = (2x+1)^5 = (u \circ v)(x) = u(v(x))$$

dengan $u(x) = x^5$ dan $v(x) = (2x+1)$. Dengan aturan rantai,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u \circ v)'(x) = u'(v(x))\, v'(x) \\ &= 5(2x+1)^4 \cdot (2x) \\ &= 10x(2x+1)^4 \end{aligned}$$

□

Contoh 5.2.10

Tentukan $\dfrac{d}{dx}\left[\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^3\right]$.

Penyelesaian:

Dari aturan rantai,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^3\right] &= 3\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right) \\
&= 3\left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^2 \frac{(2)(3x-1)-(2x+1)(3)}{(3x-1)^2} \\
&= \frac{3(2x+1)^2(-5)}{(3x-1)^4} \\
&= -\frac{15(2x+1)^2}{(3x-1)^4}
\end{aligned}$$

□

Tugas Mandiri

1. Carilah h' dalam bentuk f' dan g' dari $h(x) = \dfrac{f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}$ dan

   $h(x) = f(g(3x^2))$.

2. Carilah konstanta *a, b,* dan *c* sehingga fungsi $y = ax^2 + bx + c$ memenuhi persamaan diferensial $y'' + y' - 2y = x^2$.

Turunan Tingkat Tinggi

Jika f' adalah turunan fungsi *f*, maka f' juga merupakan fungsi. Fungsi f' adalah turunan pertama dari *f*. Jika turunan dari f' ada, turunan ini disebut turunan kedua dari *f*, dinotasikan dengan f'' atau y'' atau $\dfrac{d^2 f}{dx}$ atau $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$. Dengan cara yang sama, turunan ketiga dari *f* didefinisikan sebagai turunan pertama dari f'', dan dinotasikan dengan f''' atau y''' atau $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$ atau $\dfrac{d^3 y}{dx^3}$.

Secara umum, turunan ke-n dari fungsi f, ditulis $f^{(n)}$, adalah turunan pertama dari turunan ke-$(n-1)$ dari f, dengan n bilangan asli yang lebih besar dari 1. Simbol lain untuk turunan ke-n dari f adalah:

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \quad \text{dan} \quad D_x^n[f(x)]$$

Contoh 5.2.11

Tentukan semua turunan dari fungsi f yang diberikan oleh:

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - x^2 + 9$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 20x^3 + 12x^2 - 2x \\ f''(x) &= 60x^2 + 24x - 2 \\ f'''(x) &= 120x + 24 \\ f^{(4)}(x) &= 120 \\ f^{(n)}(x) &= 0, \quad n \geq 5 \end{aligned}$$

Tugas Kelompok

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$, dengan f dan g fungsi yang mempunyai turunan.

a. Perlihatkan bahwa $F'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

b. Carilah rumus untuk F''' dan $F^{(4)}$.

c. Kemudian tebak rumus untuk $F^{(n)}$.

Latihan 5.2

1. Tentukan $f'(x)$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1$

b. $f(x) = 1 - 2x - x^3$

c. $f(x) = x^7 - 4x^5 + 2x^3 + 7x$

d. $f(x) = x^2 + 3x + 1/x^2$

e. $f(x) = x^4 - 7 + x^{-2} + x^{-4}$

f. $f(x) = (3x^2 + 4)^2$

g. $f(x) = (2x^2 + 3)(5x - 8)$

h. $f(x) = (5x^4 - 3)(2x^3 + 6x)$

i. $f(x) = (x^3 - 2x + 3)(3x^2 + 2x)$

j. $f(x) = 9\sqrt[3]{x^2}$

k. $f(x) = 2\sqrt{x} + 5/\sqrt{x}$

l. $f(x) = 3x^{2/3} - x^{-1/3}$

m. $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$

n. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$

o. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 8}$

2. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ untuk setiap fungsi y yang diberikan.

a. $y = (x^2 + 3x + 2)(2x^3 - 1)$

b. $y = \dfrac{x}{x-2}$

c. $y = \dfrac{2x+1}{3x+4}$

d. $y = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x-2}$

e. $y = \dfrac{2x}{1+5x^2}$

f. $y = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}$

g. $y = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$

h. $y = \dfrac{2x+1}{3x+4}(3x-1)$

i. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 3}(x^2 + 1)$

3. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = (2x + 1)^5$

b. $g(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$

c. $h(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$

d. $F(z) = (z^2 + 4)^{-2}$ 28

e. $G(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^{-3}$

f. $H(x) = \sqrt{1 + 4x^2}$

g. $f(t) = \sqrt{1 - 3t^2}$

h. $g(x) = (5 - 3x)^{2/3}$

i. $h(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$

j. $F(s) = \sqrt{\dfrac{2s-5}{3s+1}}$

k. $G(x) = \sqrt{\dfrac{5x+6}{5x-4}}$

l. $H(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

4. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $\dfrac{d}{dx}[(4x^2 + 7)^2(2x^3 + 1)^4]$

b. $\dfrac{d}{du}[(3u^2 + 5)^3(3u - 1)^2]$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)$

d. $\dfrac{d}{dz}(\sqrt{z^2 - 5} \cdot \sqrt[3]{z^2 + 3})$

e. $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{t-7}{t+2}\right)^2\right]$

f. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{2y^2 + 1}{3y^3 + 1}\right)^2\right]$

5. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = \left(\dfrac{2x - 1}{3x^2 + x - 2}\right)^3$

b. $g(x) = \dfrac{(x^2 + 3)^3}{(5x - 8)^2}$

c. $h(x) = \dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$

6. Tentukan turunan pertama dan kedua dari setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$

b. $g(t) = t^3 - t^2 + t$

c. $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

d. $F(y) = \sqrt[3]{2y^3 + 5}$

e. $G(z) = \dfrac{2 - \sqrt{z}}{2 + \sqrt{z}}$

5.3 Turunan Sebagai Laju Perubahan

Pada subbab 4.2 telah kita kaji bersama bahwa jika $y = f(x)$ adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain x, maka:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

mendefinisikan besarnya laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$. Tetapi limit ini tidak lain adalah nilai turunan fungsi f di titik c, yaitu $f'(c)$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa:

$f'(c)$ menyatakan laju perubahan sesaat dari $y = f(x)$ di $x = c$. (5.4)

Contoh 5.3.1

Pendapatan kotor tahunan suatu perusahaan selama 1 tahun terhitung mulai 1 Januari 2000 adalah p miliar rupiah, dan $p = \frac{2}{5}t^2 + 2t + 10$.

Tentukan:

a. laju pertumbuhan pendapatan kotor pada tanggal 1 Januari 2002,

b. laju pertumbuhan pendapatan kotor pada tanggal 1 Januari 2006.

Penyelesaian:

Menurut (5.4), laju pertumbuhan pendapatan setelah t tahun adalah dp/dt.

a. Pada tanggal 1 Januari 2002, berarti $t = 2$. Jadi, kita menghitung dp/dt apabila $t = 2$,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{4}{5}t + 2 \text{ dan } \left.\frac{dp}{dt}\right]_{t=2} = \frac{8}{5} + 2 = 3{,}6$$

Jadi, pada tanggal 1 Januari 2002, pendapatan kotor perusahaan tumbuh dengan laju 3,6 miliar rupiah tiap tahun.

b. Pada tanggal 1 Januari 2006, berarti $t = 6$ sehingga:

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{t=6} = \frac{24}{5} + 2 = 6{,}8$$

Jadi, pada 1 Januari 2006, pendapatan kotor perusahaan tumbuh dengan laju 6,8 miliar rupiah tiap tahun.

□

Setelah kita memahami apa tafsiran fisis dari turunan di suatu bilangan, maka kita dapat menyelesaikan permasalahan perusahaan tekstil yang diungkapkan pada awal bab, yang disajikan menjadi contoh berikut.

Contoh 5.3.2

Sebuah perusahaan tekstil memperkirakan bahwa biaya produksi (dalam jutaan rupiah) untuk kain tertentu adalah:

$$C(x) = 450 + 36x - x^2 + 0,001x^3$$

Setelah melakukan survei, perusahaan menetapkan bahwa untuk x yard, harga jual kain tersebut adalah:

$$p(x) = 60 - 0,01x$$

juta rupiah untuk tiap yard. Berapakah tingkat produksi perusahaan tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum?

Penyelesaian:

Dari keterangan di atas, kita memperoleh fungsi pendapatan adalah:

$$R(x) = xp(x) = 60x - 0,01x^2$$

dan fungsi keuntungannya adalah:

$$\begin{aligned} P(x) = R(x) - C(x) &= [60x - 0,01x^2] - [450 + 36x - x^2 + 0,001x^3] \\ &= -450 + 24x + 0,99x^2 - 0,001x^3. \end{aligned}$$

Menurut rumus (5.4), besar laju perubahan keuntungan terhadap banyak yard x adalah $P'(x)$. Kita peroleh bahwa:

$$P'(x) = 24 + 1,98x - 0,003x^2$$

Jadi, besar laju perubahan keuntungan terhadap x adalah $24 + 1,98x - 0,003x^2$.

Persamaan ini adalah persamaan kuadrat dalam x, sehingga akan mencapai maksimum ketika

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1,98}{2(-0,003)} = 330$$

Untuk $x = 330$ akan memberikan keuntungan sebesar

$$P(330) = -450 + 24(330) + 0,99(330)^2 - 0,001(330)^3 = 72.216$$

Jadi, pada tingkat produksi $x = 330$ yard akan memberikan keuntungan yang maksimum kepada perusahaan sebesar 72.216 juta rupiah.

Dalam ekonomi, jika $C(x)$ menyatakan biaya total yang dikeluarkan perusahaan untuk menghasilkan x satuan barang tertentu, maka C disebut fungsi biaya. Laju perubahan sesaat biaya terhadap banyaknya barang yang dihasilkan, dC/dx, oleh para ekonom disebut biaya marginal.

□

Contoh 5.3.3

Suatu perusahaan telah menaksir bahwa biaya (dalam ribuan rupiah) memproduksi x barang adalah:

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0,01x^2$$

a. Tentukan fungsi biaya marginal.
b. Carilah $C'(500)$ dan jelaskan maknanya. Apa yang diperkirakannya?
c. Bandingkan $C'(500)$ dengan biaya memproduksi barang ke-501.

Penyelesaian:

a. Fungsi biaya marginal adalah:

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 5 + 0{,}02x$$

b. Biaya marginal pada tingkat produksi sebanyak 500 barang adalah:

$$C'(500) = 5 + 0{,}02(500) = 15 \text{ ribu/barang.}$$

Ini memberikan laju pada saat biaya bertambah besar terhadap tingkat produksi pada waktu $x = 500$, dan memperkirakan biaya produksi barang ke-501.

c. Biaya memproduksi sebenarnya dari barang ke-501adalah:

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10.000 + 5(501) + 0{,}01(501)^2] - [10.000 + 5(500) + 0{,}01(500)^2] \\ &= 15{,}01 \text{ ribu} \end{aligned}$$

Tampak bahwa $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

□

Latihan 5.3

1. Suatu perusahaan mulai beroperasi pada 1 Oktober 2003. Pendapatan kotor tahunan perusahaan itu setelah beroperasi t tahun adalah p juta, dengan:

$$p = 50.000 + 18.000t + 600t^2$$

   a. Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 1 Oktober 2005.
   b. Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 1 Oktober 2003.

2. Misalkan jumlah penduduk pada suatu kota setelah t tahun sejak 1 Januari 2000 sebesar

$$p = 40t^2 + 200t + 10.000$$

   Tentukan laju pertumbuhan penduduk pada 1 Januari 2010.

3. Seorang pekerja pembuat kartun iklan ditaksir dapat mengecat y buah iklan setelah bekerja x jam sejak jam 8 pagi, dengan:

$$y = 3x - 8x^2 - x^3,\; 0 \le x \le 4$$

   a. Tentukan laju pengecatan pekerja itu pada jam 10 pagi.
   b. Tentukan jumlah bingkai yang dicat antara jam 10 pagi hingga jam 11 pagi.

4. Biaya (dalam ribuan rupiah) suatu perusahaan memproduksi x pasang sepatu adalah:

$$C(x) = 2000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002x^3$$

   a. Carilah fungsi biaya marginal.
   b. Carilah $C'(100)$ dan jelaskan maknanya. Apa yang diperkirakannya?
   c. Bandingkan $C'(100)$ dengan biaya memproduksi barang ke-101.

5. Fungsi biaya untuk suatu barang tertentu adalah:

$$C(x) = 2000 + 3x + 0{,}01x^2 + 0{,}0002x^3$$

a. Carilah dan tafsirkan $C'(100)$.

b. Bandingkan $C'(100)$ dengan biaya memproduksi barang ke-101.

6. Sebuah perusahaan tekstil memperkirakan bahwa biaya produksi (dalam jutaan rupiah) untuk kain tertentu adalah:

$$C(x) = 1200 + 12x - 0{,}1x^2 + 0{,}0005x^3$$

Setelah melakukan survei, perusahaan menetapkan bahwa untuk x yard, harga jual kain tersebut adalah $p(x) = 29 - 0{,}00021x$ juta rupiah untuk tiap yard. Berapakah tingkat produksi perusahaan tersebut untuk memperoleh keuntungan maksimum?

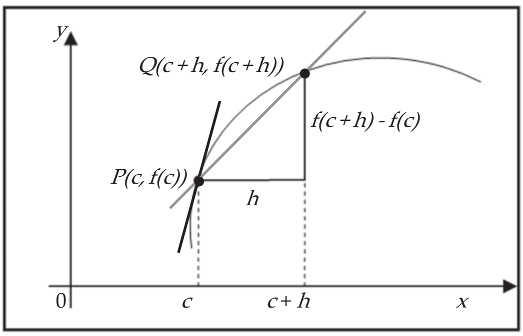
5.4 Persamaan Garis Singgung Kurva

Pada subbab sebelumnya telah dijelaskan bahwa jika $y = f(x)$, maka:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

mendefinisikan besarnya laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$. Secara geometri seperti diperlihatkan pada Gambar 5.3, laju perubahan sesaat ditafsirkan sebagai kemiringan atau gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(c, f(c))$, yang besarnya adalah:

$$m_{sg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Gambar 5.3 Kemiringan Garis Singgung di P = $f'(c)$

Menurut Definisi 5.1, ini sama seperti turunan $f'(c)$. Oleh karena itu, kita dapat mengatakan pengertian berikut ini.

Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(c, f(c))$ adalah garis yang melalui $(c, f(c))$ dengan kemiringannya sama dengan $f'(c)$.

Jika kita menggunakan bentuk titik-kemiringan dari persamaan garis, maka garis singgung pada kurva di titik $(c, f(c))$ adalah:

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Contoh 5.4.1

Diketahui suatu kurva yang mempunyai persamaan $y = x^3 - 3x + 4$.

a. Periksalah apakah titik (2, 6) terletak pada kurva.
b. Jika titik tersebut terletak pada kurva, tentukan persamaan garis singgung di titik tersebut.
c. Gambarkan kurva y tersebut beserta garis singgung di titik (2, 6).

Penyelesaian:

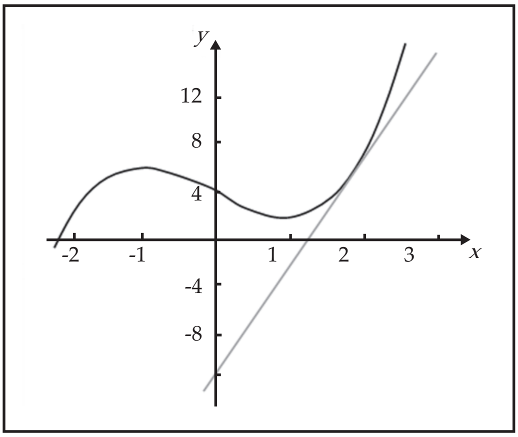
a. Titik (2, 6) terletak pada kurva $y = x^3 - 3x + 4$ karena jika kita substitusikan $x = 2$, maka dipenuhi:

$$y = 2^3 - 3(2) + 4 = 6$$

b. Turunan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 4$ adalah $f'(x) = 3x^2 - 3$. Kemiringan garis singgung di (2, 6) adalah $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$. Jadi, persamaan garis singgung kurva di titik (2, 6) adalah:

$$y - 6 = 9(x - 2) \text{ atau } y = 9x - 12$$

c. Grafik kurva dan garis singgungnya adalah:



Gambar 5.4

□

Contoh 5.4.2

Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 2x^2 - 1$ di titik yang absisnya 2.

Penyelesaian:

Misalnya titik yang dimaksud adalah A, maka $x_A = 2$, dan ordinat dari titik A adalah y sehingga:

$$y = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

Oleh karena itu, koordinat titik A adalah (2, 7). Turunan fungsi $f(x) = 2x^2 - 1$ adalah $f'(x) = 4x$. Dengan demikian, kemiringan garis singgung di (2, 7) adalah $f'(2) = 4 \cdot 2 = 8$. Jadi, persamaan garis singgung di $A(2, 7)$ adalah:

$$y - 7 = 8(x - 2) \text{ atau } y = 8x - 9$$

□

Contoh 5.4.3

Tentukan persamaan garis singgung dengan kemiringan 6 pada kurva $y = 2x^3$.

Penyelesaian:

Misalkan kemiringan garis singgung adalah m. Karena kemiringan garis singgung di x pada kurva adalah nilai turunan di bilangan tersebut, maka berlaku:

$$m = y'(x)$$

Karena diketahui $m = 6$, maka berlaku:

$$6 = 6x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = -1$$

Untuk $x = 1$ dan $x = -1$, masing-masing memberikan $y = 2 \cdot 1^3 = 2$ dan $y = 2(-1)^3 = -2$. Dengan demikian, koordinat titik singgung pada kurva adalah (1, 2) dan (–1, –2). Garis singgung di titik (1, 2) adalah:

$$y - 2 = 6(x - 1) \text{ atau } y = 6x - 4$$

Garis singgung di titik (–1, –2) adalah:

$$y + 2 = 6(x + 1) \text{ atau } y = 6x + 4$$

□

Contoh 5.4.4

Carilah persamaan garis singgung pada kurva $y = \sqrt{x - 3}$ yang tegak lurus garis $6x + 3y - 4 = 0$.

Penyelesaian:

Jika (x, y) titik singgung pada kurva, maka kemiringan garis singgung di titik itu adalah:

$$m_1 = y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$

Garis $6x + 3y - 4 = 0$ dapat dituliskan dengan $y = -2x + \frac{4}{3}$, sehingga kemiringan garis ini adalah $m_2 = -2$. Dua garis saling tegak lurus, jika:

$$m_1 m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1(-2) = -1$$
$$\Leftrightarrow m_1 = 1/2$$

Oleh karena itu,

$$m_1 = y' = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x - 3}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x - 3} = 1$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

Substitusi untuk $x = 4$, memberikan $y = \sqrt{4-3} = 1$. Jadi, koordinat titik singgung adalah (4, 1), dan persamaan garis singgungnya adalah:

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \text{ atau } y = \frac{1}{2}x - 1$$

□

Latihan 5.4

1. Carilah persamaan garis singgung kurva yang diberikan oleh persamaan berikut di titik yang ditentukan.

   a. $y = 2x^2 - 1$ di (4, 31)

   b. $y = 2x^4 - x^2$ di $(-1/2, -1/8)$

   c. $y = \dfrac{10}{14 - x^2}$ di (4, –5)

   d. $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ di (2, 1)

2. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva:
   a. $y = x^2 - 5x + 1$, di titik yang absisnya –1
   b. $y = x^4 - 7x^2 + x$, di titik yang absisnya 0
   c. $y = x^3 + 5x^2 - 1$, di titik yang ordinatnya 5
   d. $y = 2x^4$, di titik yang ordinatnya $1/8$

3. Carilah persamaan garis singgung kurva yang diberikan oleh persamaan berikut di titik yang ditentukan.

   a. $y = (x^2 - 1)^2$ di (–2, 9)

   b. $y = 2x - x^3$ di (–2, 4)

   c. $y = \sqrt{x^2 + 9}$ di (4, 5)

   d. $y = x\sqrt{x^2 + 16}$ di O(0, 0)

4. Garis normal di titik pada kurva adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung kurva di titik tersebut. Tentukan persamaan garis normal kurva pada soal nomor 3.
5. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 4x$ yang sejajar garis $2x - y + 3 = 0$.
6. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^4 - 6x$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 6 = 0$.
7. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = (7x - 6)^{-1/3}$ yang tegak lurus $48x - 7y + 2 = 0$.
8. Tentukan persamaan garis normal kurva $y = x^3 - 4x$ yang sejajar garis $x + 8y - 8 = 0$.
9. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (4, 13) dan menyinggung kurva $y = 2x^2 - 1$.
10. Garis singgung di A pada $y = x^2 + 4x - 16$ sejajar garis $3x - y = 2$. Tentukan koordinat titik A.
11. Diketahui kurva $y = x + 1/x$, A adalah titik pada kurva yang absisnya $1/2$. Misalkan garis singgung di A memotong sumbu-x di P dan memotong sumbu-y di Q. Hitunglah panjang ruas garis PQ.
12. Jika garis singgung pada kurva $y^2 = 6x$ di titik P membentuk sudut $45°$ dengan sumbu-x positif, tentukan koordinat titik P.

Rangkuman

1. Turunan fungsi f di bilangan c, dinotasikan dengan $f'(c)$, didefinisikan sebagai:

   $f'(c) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ jika limit ini ada.

2. Jika fungsi f mempunyai turunan di c, maka f kontinu di c.
3. Jika fungsi $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$.
4. Jika n bilangan asli dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.
5. Misalkan u dan v suatu fungsi yang mempunyai turunan.
   a. Jika k konstanta, dan $f(x) = ku(x)$, maka $f'(x) = ku'(x)$.
   b. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
   c. Jika $f(x) = u(x)v(x)$, maka $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
   d. Jika $f(x) = u(x)/v(x)$, maka $f'(x) = (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))/v^2(x)$.
6. Aturan Rantai. Jika fungsi v mempunyai turunan di x dan u mempunyai turunan di $v(x)$, maka fungsi komposisi $u \circ v$ mempunyai turunan di x, dan

   $$(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

7. Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(c, f(c))$ adalah garis yang melalui $(c, f(c))$ dengan kemiringan $f'(c)$.
8. Jika $y = f(x)$ adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain, x, maka besarnya laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$ didefinisikan sebagai:

   $$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Math Info

Sumber: www.maths-rometus.org

Gambar 5.5
Sir Isaac Newton

Sumber: www.et.fh-koeln.de

Gambar 5.6
Gottfried Wilhelm Leibniz

Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tahun 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 - 1727), ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain. Dewasa ini kalkulus digunakan sebagai suatu alat bantu yang utama dalam menyelesaikan berbagai permasalahan ilmu pengetahuan dan teknologi. Selanjutnya, suatu fungsi yang mempunyai turunan sampai tingkat tertentu dapat dihampiri oleh suatu suku banyak, yang dikenal sebagai hampiran Taylor.

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Jika $f(x) = \dfrac{(x+2)^3}{(1-x)^2}$, maka $f'(-3) = \ldots$.

   A. 0,000024
   B. 0,00024
   C. 0,0024
   D. 0,024
   E. 0,24

2. Turunan dari $y = (1-x)^2(2x+3)$ adalah ... .

   A. $(1-x)(3x+2)$
   B. $(x-1)(3x+2)$
   C. $2(1+x)(3x+2)$
   D. $2(x-1)(3x+2)$
   E. $2(1-x)(3x+2)$

3. Turunan fungsi $y = \sqrt[4]{(2x^2-3)^3}$ adalah ... .

   A. $-\dfrac{x}{\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   B. $\dfrac{3x}{\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   C. $\dfrac{16x}{3\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   D. $-3\sqrt[4]{2x^2-3}$
   E. $3x\sqrt[4]{2x^2-3}$

4. Jika $f(x) = x^2\sqrt{4-6x}$, maka nilai $f'(-2)$ adalah ... .

   A. -22
   B. -19
   C. $-17\frac{1}{2}$
   D. $-16\frac{1}{2}$
   E. -13

5. Jika f^{-1} merupakan invers dari fungsi $f(x) = \dfrac{x+2}{5-3x}$, $x \neq 5/3$, dan g turunan dari f^{-1}, maka nilai $g(1)$ adalah ... .

   A. $-9/16$
   B. $-7/16$
   C. $7/16$
   D. $11/16$
   E. $13/16$

6. Persamaan garis singgung di titik dengan $x = 2$ pada kurva $y=\frac{27}{\sqrt{5x-1}}$ adalah ... .

A. $5x+2y-28=0$
B. $x+2y-20=0$
C. $5x-2y-8=0$
D. $x-2y+16=0$
E. $2x-y+5=0$

7. Turunan pertama dari $y=\frac{2x^2-1}{\sqrt{x}}$ adalah ... .

A. $3\sqrt{x}+\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$
B. $5\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$
C. $3\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}}{2x^2}$
D. $5\sqrt{x}-\frac{2\sqrt{x}}{2x^2}$
E. $3\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}$

8. Pertumbuhan pendapatan suatu perusahaan setelah waktu t tahun diberikan oleh fungsi:

$$s(t)=\tfrac{1}{3}t^3-3t^2+5t$$

Laju pertumbuhan pendapatan tertinggi dicapai setelah waktu t= ... tahun.

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

9. Jika garis menyinggung kurva $y=3\sqrt{x}$ di titik yang berabsis 1, maka garis g akan memotong sumbu-x di titik ... .

A. (–1, 0)
B. (–1/2, 0)
C. (1, 0)
D. (2, 0)
E. (3, 0)

10. Jika $f(x)=\left(2x+\frac{3}{\sqrt{x^3}}\right)^2$, maka $f\,'(x)=\ldots$.

A. $8x-\frac{27}{x^3}-\frac{6}{x\sqrt{x}}$
B. $8x-\frac{27}{x^3}+\frac{6}{x\sqrt{x}}$
C. $8x-\frac{27}{x^4}-\frac{12}{x\sqrt{x}}$
D. $8x-\frac{27}{x^4}-\frac{6}{x\sqrt{x}}$
E. $8x-\frac{27}{x^4}+\frac{6}{x\sqrt{x}}$

11. Garis singgung di titik (2, 8) pada kurva $f(x) = 2x\sqrt{x+2}$ memotong sumbu -x dan sumbu-y di titik $(a, 0)$ dan $(0, b)$. Nilai dari $a + b$ adalah ... .

A. $-1\frac{1}{10}$
B. $-1\frac{1}{15}$
C. $-1\frac{3}{10}$
D. $-1\frac{2}{5}$
E. $-1\frac{3}{5}$

12. Fungsi biaya suatu perusahaan mengikuti fungsi $C(x) = 600 - 72x + 3x^2$. Laju perubahan C terhadap x ... .

A. selalu makin tinggi
B. selalu makin rendah
C. makin tinggi hanya pada $x < 12$
D. makin rendah hanya pada $x > 12$
E. paling tinggi pada $x = 24$

13. Koordinat titik-titik singgung pada kurva $y = x^2(2x - 3)$ yang garis singgungnya sejajar garis $2y - 24x = 1$ adalah ... .

A. (–1, 5) dan (–2, –4)
B. (–1, 5) dan (2, 4)
C. (–1, –5) dan (2, 4)
D. (1, –5) dan (2, 4)
E. (1, 5) dan (–2, –4)

14. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 5$ yang tegak lurus $x + 3y = 2$ adalah ... .

A. $3x - y + 3 = 0$ dan $3x - y + 7 = 0$
B. $3x - y - 3 = 0$ dan $3x - y - 7 = 0$
C. $3x - y - 9 = 0$ dan $3x - y - 1 = 0$
D. $3x - y + 3 = 0$ dan $3x - y - 5 = 0$
E. $3x - y + 9 = 0$ dan $3x - y + 1 = 0$

15. Garis k menyinggung kurva $y = x^3 - 4x$ di titik (1, –3) dan memotong kurva di titik ... .

A. (–2, 0)
B. (–1, 0)
C. (2, 0)
D. (–1, 3)
E. (–3, –15)

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Jika f mempunyai turunan di c, dengan $c > 0$, hitunglah $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{\sqrt{x} - \sqrt{c}}$.

17. Hitunglah nilai y' dari $y = \left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^5$.

18. Carilah turunan ketiga dari $f(x) = x^n/(1-x)$.

19. Suatu kurva mempunyai persamaan $y = x^2 + ax + b$, dengan a dan b konstanta. Garis $y = 2x$ menyinggung kurva tadi di titik dengan absis 3. Tentukan nilai a dan b.

20. Rusuk kubus bertambah panjang dengan kelajuan 7 cm/detik. Berapakah kelajuan bertambahnya volume pada saat panjang rusuknya 15 cm?

Soal Analisis

1. Jika $p(x)$ adalah nilai total produksi pada waktu terdapat x pekerja di pabrik, maka rerata produktivitas tenaga kerja di pabrik adalah:

$$A(x) = \frac{p(x)}{x}$$

   a. Carilah $A'(x)$. Mengapa perusahaan ingin memperkerjakan lebih banyak pekerja apabila $A'(x) > 0$.

   b. Perlihatkan bahwa $A'(x) > 0$ apabila $p'(x)$ lebih besar daripada rerata produktivitas.

2. Suatu perusahaan sepatu memperkirakan bahwa fungsi biaya adalah:

$$C(x) = 84 + 1,26x - 0,01x^2 + 0,00007x^3$$

   untuk setiap x pasang sepatu, sedangkan fungsi permintaan adalah:

$$p(x) = 3,5 - 0,01x$$

   a. Tentukan fungsi keuntungan dan fungsi keuntungan marginal.

   b. Tentukan tingkat produkasi yang memaksimumkan keuntungan. Bandingkan dengan Soal Analisis nomor 3 Bab 4.

3. Di sebuah peternakan ikan, populasi ikan dimasukkan ke tambak dan dipanen secara teratur. Model laju perubahan populasi ikan diberikan oleh persamaan:

$$\frac{dP}{dt} = 0,05\left(1 - \frac{P(t)}{10.000}\right)P(t) - \beta P(t)$$

   dengan $P(t)$ jumlah populasi ikan setelah t hari, dan β adalah persentase populasi yang dipanen.

   a. Berapa nilai dP/dt yang berpadanan terhadap populasi stabil?

   b. Jika laju pemanenan adalah 4%, carilah tingkat populasi stabil.

   c. Apa yang terjadi jika β diperbesar menjadi 5%?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	: ………………..	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Turunan
Kelompok	: ………………..	Semester	: 2 (dua)

Kegiatan : Survei data populasi penduduk suatu kelurahan

Tujuan : Menentukan laju perubahan penduduk

A Alat dan bahan yang digunakan

1. Data populasi penduduk kelurahan
2. Komputer
3. Alat tulis
4. Buku catatan

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 siswa.
2. Carilah data jumlah penduduk dari kelurahan terdekat dengan tempat tinggal Anda, untuk kurun waktu tahun 1993 – 2007 untuk periode dua tahunan. Masing-masing kelompok harus mensurvei kelurahan yang berbeda.
3. Catat data jumlah penduduk $P(t)$ untuk setiap tahunnya, dan isikan pada tabel di bawah.

Tahun (t)	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007
$P(t)$								

C. Analisis

1. Buatlah grafik dari data yang diperoleh di atas dengan bantuan komputer.
2. Untuk setiap tahun t buat tabel $\dfrac{P(t) - P(2003)}{t - 2003}$.
3. Tentukan laju perubahan penduduk pada kelurahan survei Anda pada tahun 2003.
4. Tafsirkan hasil di atas sebagai pendekatan limit fungsi $P(t)$ di $t = 2003$.
5. Tuliskan hasil di atas dengan notasi turunan.
6. Perkirakan jumlah penduduk pada thun 2009 pada kelurahan survei Anda.

BAB VI

Nilai Ekstrim Fungsi dan Teknik Membuat Grafik Fungsi

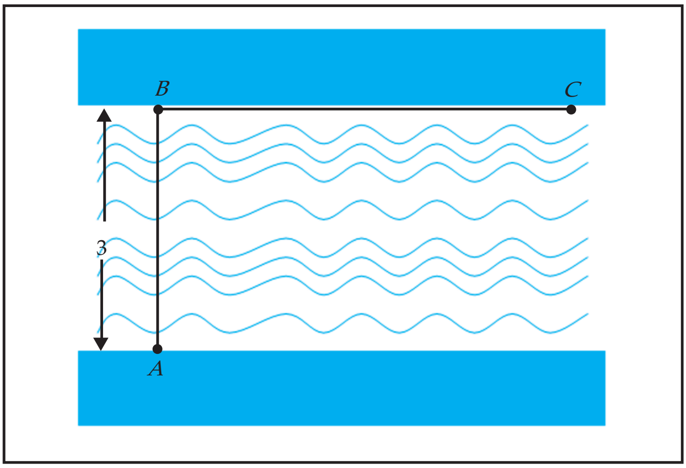
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan dapat:

1. menentukan selang di mana suatu fungsi aljabar naik atau turun,
2. menentukan titik stasioner suatu fungsi aljabar beserta jenis ektrimnya,
3. menentukan titik belok suatu fungsi aljabar,
4. menggambarkan grafik fungsi aljabar,
5. menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya menentukan ekstrim fungsi aljabar,
6. menentukan besaran masalah yang dirancang sebagai peubah dalam ekspresi matematikanya,
7. merumuskan fungsi aljabar yang merupakan model matematika dari suatu masalah,
8. menentukan penyelesaian dari model matematika,
9. memberikan tafsiran terhadap penyelesaian dari masalah.

Pengantar

Gedung A dan B adalah dua gedung yang berhadapan pada masing-masing tepi suatu danau yang lurus dengan lebar 3 km. Gedung C terletak di tepi danau di mana gedung B berada, dan jauhnya 6 km dari B. Suatu perusahaan telekomunikasi akan memasang kabel telepon dari A ke C. Jika biaya pemasangan kabel per kilometer di bawah air adalah 25% lebih mahal dari pada pemasangan kabel di daratan, bagaimanakah cara pemasangan kabel yang termurah untuk perusahaan tersebut? Ilustrasi posisi dari gedung A, B, dan C diberikan oleh gambar berikut.

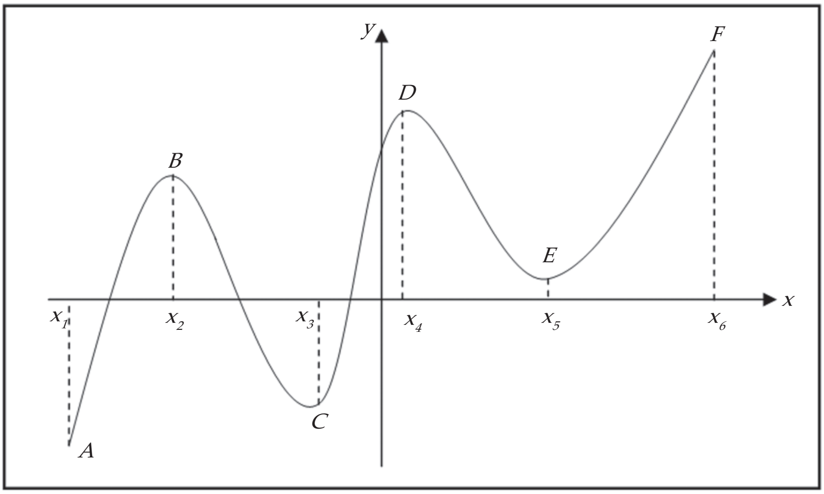


Gambar 6.1

Pemecahan dari masalah ini erat hubungannya dengan pengoptimuman fungsi. Sebelum menyelesaikan masalah ini secara khusus, sebaiknya Anda harus sudah menguasai bab sebelumnya, terutama fungsi, limit fungsi, dan turunan. Dengan telah menguasai konsep-konsep ini, secara khusus permasalahan yang kita hadapi di depan dapat kita selesaikan.

6.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Gambar 6.2 memberikan sketsa grafik fungsi f pada interval $[x_1, x_6]$. Grafik itu memperlihatkan bahwa jika titik bergerak sepanjang kurva dari A ke B, maka nilai fungsi bertambah seiring bertambahnya absis; dan juga jika titik bergerak sepanjang kurva B ke C, maka nilai fungsi berkurang seiring bertambahnya absis. Dalam hal ini kita katakan bahwa f naik pada interval $[x_1, x_2]$, dan turun pada $[x_2, x_3]$. Definisi formalnya kita berikan berikut.



Gambar 6.2

Definisi 6.1

1. Fungsi f dikatakan naik pada interval I, jika untuk sembarang $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$, maka:
$$f(x_1) < f(x_2)$$
2. Fungsi f dikatakan turun pada interval I, jika untuk sembarang $x_1, x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$, maka:
$$f(x_1) > f(x_2)$$

.

Pada ilustrasi Gambar 6.2, fungsi f naik pada interval tertutup:

$[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, dan $[x_5, x_6]$.

Fungsi f turun pada interval tertutup:

$[x_2, x_3]$ dan $[x_4, x_5]$.

Hubungannya dengan turunan, kita mempunyai sifat berikut ini.

Teorema 6.1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan pada interval tertutup $[a, b]$.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$.
2. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f turun pada $[a, b]$.

Contoh 6.1.1

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan pada interval mana f naik atau turun.

Penyelesaian:

Kita mempunyai

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

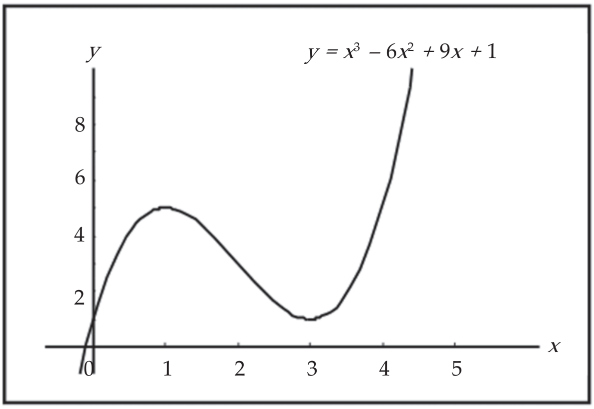
Dengan mengambil $f'(x) = 0$, kita memperoleh:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 9 = 0 &\Leftrightarrow 3(x-3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = 1 \end{aligned}$$

Tabel 6.1

Interval	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 1$	+	f naik
$1 < x < 3$	–	f turun
$3 < x$	+	f naik

Dari Tabel 6.1 kita simpulkan bahwa f naik untuk $x < 1$ atau $x > 3$, dan turun untuk $1 < x < 3$.



Gambar 6.3 Grafik Fungsi $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

□

Contoh 6.1.2

Diberikan $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & , \text{ untuk } x < 3 \\ 8 - x & , \text{ untuk } x \geq 3 \end{cases}$.

Tentukan pada interval mana f naik atau turun.

Penyelesaian:

Fungsi f tidak mempunyai turunan di $x = 3$ (mengapa?), dan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ untuk } x < 3 \\ -1 & , \text{ untuk } x > 3 \end{cases}$$

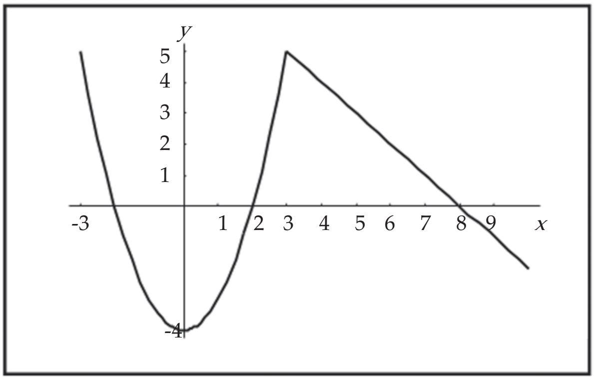
Dengan mengambil $f'(x) = 0$, maka:

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tabel 6.2

Interval	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 0$	$-$	f turun
$0 < x < 3$	$+$	f naik
$3 < x$	$-$	f turun

Tabel 6.2 menyatakan bahwa f naik pada interval $0 < x < 3$, dan turun pada $x < 0$ atau $x > 3$.



Gambar 6.4

□

Latihan 6.1

1. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tentukan interval di mana fungsi itu naik atau turun.
   a. $f(x) = x^2 - 4x - 3$
   b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$
   c. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$
   d. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$
   e. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$
   f. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

2. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tentukan interval di mana fungsi itu naik atau turun.
   a. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$
   b. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$
   c. $f(x) = x\sqrt{5-x}$
   d. $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$
   e. $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$
   f. $f(x) = 2 - 3(x-4)^{2/3}$

3. Diketahui fungsi produksi suatu perusahaan adalah:

$$C(x) = 2 + 5x - 2x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

   a. Tentukan fungsi produksi marginal.
   b. Tentukan interval di mana fungsi produksi naik dan di mana turun.

4. Diketahui fungsi produksi suatu perusahaan adalah:

$$C(x) = 1500 + 4x - 0,25x^2 + 0,0002x^3$$

   a. Tentukan fungsi produksi marginal.
   b. Tentukan pada tingkat produksi berapakah fungsi produksi marginal mulai naik.

5. Diketahui fungsi produksi suatu perusahaan adalah:

$$C(x) = 900 + 6x - 0,3x^2 + 0,001x^3$$

   a. Tentukan fungsi produksi marginal.
   b. Tentukan pada tingkat produksi berapakah fungsi produksi marginal mulai naik.

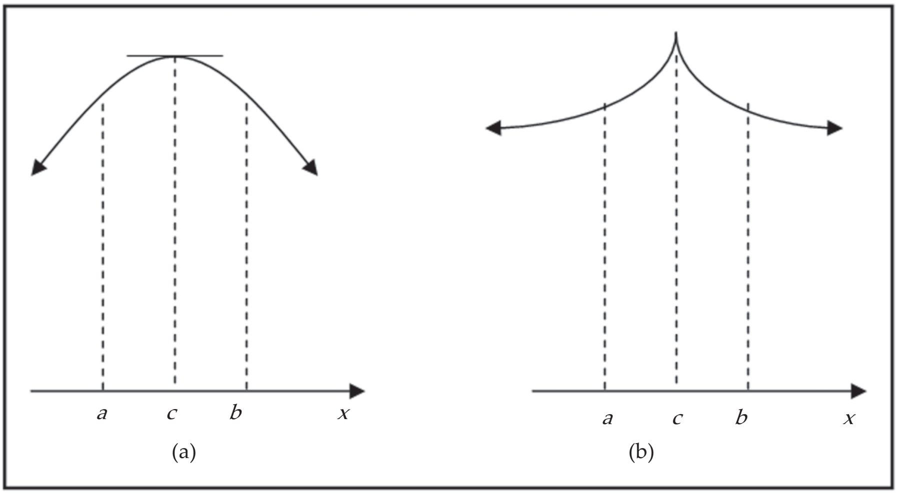
6.2 Nilai Ekstrim

Beberapa aplikasi dari turunan yang terpenting adalah persoalan pengoptimuman. Dalam kasus ini kita dituntut untuk mencari metode terbaik untuk melakukan sesuatu. Sebagai contoh adalah masalah pemasangan kabel telepon yang diungkapkan di awal bab. Persoalan ini dapat direduksi menjadi pencarian nilai minimum fungsi. Serupa dengan ini, banyak masalah yang intinya adalah pencarian nilai maksimum. Oleh karena itu, pada subbab ini kita akan mengkaji nilai maksimum dan nilai minimum fungsi. Penelusuran nilai maksimum dan minimum dapat dilakukan melalui pendekatan grafik. Jika kita kembali pada Gambar 6.2, titik B atau D nilainya paling besar di antara titik-titik sekitarnya. Dalam hal ini, kita menyebutnya bahwa B dan D nilai maksimum relatif. Sementara itu, titik C atau E pada Gambar 6.2 nilainya paling kecil di antara titik-titik sekitarnya. Dalam hal ini, kita menyebutnya bahwa C dan E nilai minimum relatif. Secara umum, kita mempunyai definisi berikut.

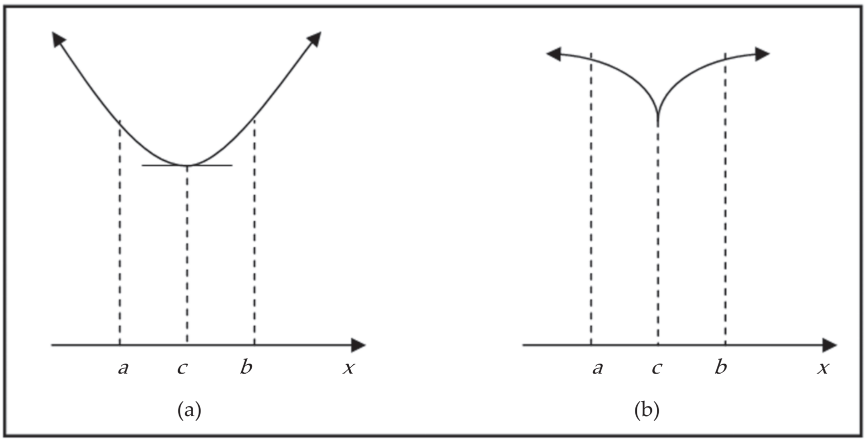
Definisi 6.2

1. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga:
$$f(c) \geq f(x)$$
untuk x dalam interval tersebut.
2. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga:
$$f(c) \leq f(x)$$
untuk x dalam interval tersebut.
3. Fungsi f yang mempunyai nilai maksimum relatif atau minimum relatif di c, dikatakan mempunyai ekstrim relatif di c.

Gambar 6.5 masing-masing menunjukkan sketsa dari sebagian grafik suatu fungsi yang mempunyai maksimum relatif di c. Sedangkan, Gambar 6.6 masing-masing menunjukkan sketsa dari sebagian grafik fungsi yang mempunyai minimum relatif di c.



Gambar 6.5 Sketsa Maksimum Fungsi



Gambar 6.6 Sketsa Minimum Fungsi

Jika kita perhatikan Gambar 6.5 (a) dan 6.6 (a), maka garis singgung di titik $(c, f(c))$ horizontal; ini adalah titik di mana $f'(c) = 0$. Kita akan menamai secara khusus titik semacam ini.

Definisi 6.3

Jika $f'(c) = 0$, maka fungsi f dikatakan stasioner di c. Nilai $f(c)$ disebut nilai stasioner dari f. Titik $(c, f(c))$ disebut titik stasioner dari f.

Sebaliknya, tampak pada Gambar 6.5 (b) dan 6.6 (b) bahwa fungsi f di bilangan c tidak mempunyai turunan (masih ingat mengapa?).

Dari keempat kasus di atas, kita mempunyai kesimpulan berikut ini.

> Teorema 6.2
>
> Jika f terdefinisi pada (a, b) dan mempunyai ekstrim relatif di c, $a < c < b$, maka $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

Bilangan c di dalam daerah asal f sehingga $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada kita sebut sebagai bilangan kritis.

Lebih lanjut, dari Gambar 6.5 (a) dan 6.6 (a) secara geometri juga dapat kita simpulkan bahwa jika fungsi f yang mencapai maksimum relatif di c, maka grafik f di kiri titik c naik dan di kanan c turun. Sebaliknya, dari Gambar 6.5 (b) dan 6.6 (b) jika fungsi f mencapai minimum relatif di c, maka grafik di kiri c turun dan di kanan c naik. Dengan fakta ini dan Teorema 6.1, kita mempunyai alat uji ekstrim yang dikenal sebagai Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif.

> Teorema 6.3 (Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif)
>
> Misalkan f mempunyai turunan di sekitar c, kecuali mungkin di c sendiri.
>
> 1. Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < c$, dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
> 2. Jika $f'(x) < 0$ untuk $x < c$, dan $f'(x) > 0$ untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai minimum relatif di c.

Sebagai kesimpulan, langkah-langkah untuk menentukan ekstrim relatif suatu fungsi f adalah:

1. Tentukan $f\,'(x)$.
2. Tentukan bilangan kritis nilai x ($f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tidak ada).
3. Gunakan uji turunan pertama (Teorema 6.3).

Contoh 6.2.1

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan jenis ekstrim relatif dari fungsi f.

Penyelesaian:

1. Kita mempunyai

$$f\,'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

2. Dari Contoh 6.1.1,

$$f'(x) = 0 \iff x = 3 \text{ atau } x = 1$$

3. Dengan uji turunan pertama, hasilnya disimpulkan pada Tabel 6.3.

Tabel 6.3

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	Kesimpulan
$x<1$		+	f naik
$x=1$	5	0	f mempunyai nilai maksimum relatif
$1<x<3$		–	f turun
$x=3$	1	0	f mempunyai nilai minimum relatif
$3<x$		+	f naik

Dari Tabel 6.3, kita menyimpulkan bahwa nilai maksimum relatif dari f adalah 5 yang terjadi di $x=1$, dan nilai minimum relatif dari f adalah 1 yang terjadi di $x=3$. Lihat kembali Gambar 6.3.

□

Contoh 6.2.2

Diberikan

$$f(x)=x^{3/5}(4-x)$$

Tentukan jenis ekstrim relatif dari fungsi f.

Penyelesaian:

1. Dari Contoh 6.1.2, kita peroleh:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{, untuk } x<3 \\ -1 & \text{, untuk } x>3 \end{cases}$$

Ingat bahwa f tidak mempunyai turunan di $x=3$.

2. Dalam hal ini,

$$f'(x) \text{ tidak ada} \Leftrightarrow x=3$$

dan stasioner

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

3. Dengan uji turunan pertama, hasilnya disimpulkan pada Tabel 6.4.

Tabel 6.4

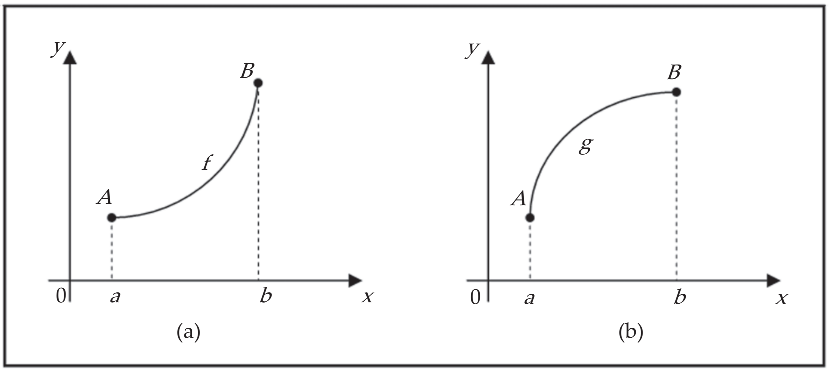
Interval	$f(x)$	$f'(x)$	Kesimpulan
$x<0$		–	f turun
$x=0$	–4	0	f mempunyai nilai minimum relatif
$0<x<3$		+	f naik
$x=3$	5	tidak ada	f mempunyai nilai maksimum relatif
$3<x$		–	f turun

Dari Tabel 6.4, kita menyimpulkan bahwa nilai maksimum relatif dari f adalah 5 yang terjadi di $x=3$, dan nilai minimum relatif dari f adalah –4 yang terjadi di $x=0$. Lihat Kembali Gambar 6.4.

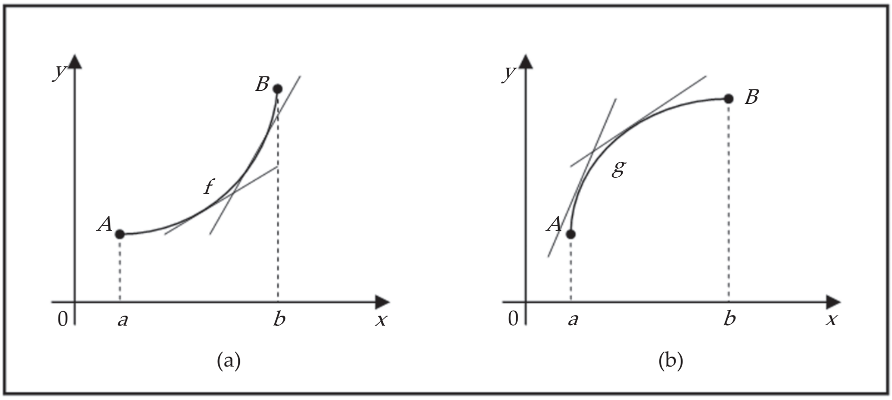
□

Kecekungan dan Titik Belok

Kita perhatikan Gambar 6.7. Kedua grafik menghubungkan titik A dan B, tetapi mereka kelihatan berbeda karena mereka melengkung pada arah yang berlainan. Bagaimana perbedaan dua perlakuan ini? Pada Gambar 6.8 telah digambarkan beberapa garis singgung dari kedua kurva ini. Pada gambar (a), kurva terletak di atas garis singgung dan f cekung ke atas pada (a, b). Pada gambar (b), kurva terletak di bawah garis singgung dan grafik g cekung ke bawah pada (a, b).



Gambar 6.7



Gambar 6.8

Secara umum, kita mempunyai definisi berikut ini.

> Definisi 6.4
>
> Grafik fungsi f dikatakan cekung ke atas pada interval I, jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada I. Grafik fungsi f dikatakan cekung ke bawah pada interval I, jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada I.

Jika kita perhatikan grafik pada Gambar 6.8 (a), berangkat dari kiri ke kanan, kemiringan garis singgung bertambah besar. Ini artinya bahwa turunan f' adalah fungsi naik, sehingga turunannya f'' adalah positif. Serupa, pada Gambar 6.8 (b), kemiringan garis singgung berkurang dari kiri ke kanan, sehingga f' fungsi turun dan berakibat f'' adalah negatif. Secara umum kita mempunyai uji kecekungan berikut ini.

Teorema 6.4 (Uji Kecekungan)

1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke atas pada I.
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke bawah pada I.

Dari Teorema 6.4 kita dapat bertanya: apa tafsirannya terhadap grafik apabila $f''(x) = 0$? Mudah untuk kita jawab pertanyaan ini, yaitu di titik tersebut merupakan perubahan kecekungan dari cekung ke atas berubah menjadi cekung ke bawah, atau sebaliknya. Dengan demikian di titik tersebut grafiknya mengalami pembelokan arah garis singgung.

Definisi 6.5

Titik P pada kurva disebut titik belok, jika kurva berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah, atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas di P.

Sebagai konsekuensi Teorema 6.4, jika turunan kedua ada di titik belok, maka turunan kedua di titik tersebut sama dengan nol.

Teorema 6.5

Jika f mempunyai turunan pada interval yang memuat c dan $(c, f(c))$ adalah titik belok, maka $f''(c)$ ada dan $f''(c) = 0$.

Contoh 6.2.3

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan titik belok grafik fungsi f dan juga interval di mana grafiknya cekung ke atas dan cekung ke bawah.

Penyelesian:

Dari fungsi yang diberikan,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ dan } f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ ada untuk setiap x. Menurut Teorema 6.5, kemungkinan titik belok hanya di bilangan x sehingga $f''(x) = 0$,

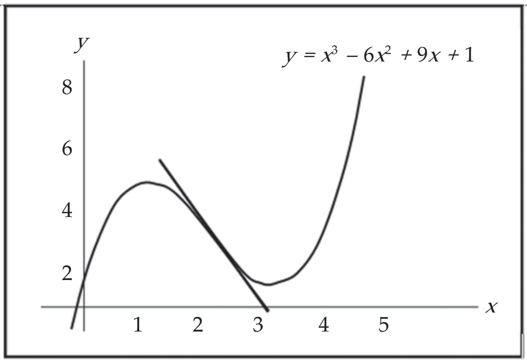
$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Kita periksa tanda $f''(x)$ dengan Teorema 6.4,

Tabel 6.5

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < 2$			$-$	grafik cekung ke bawah
$x = 2$	3	-3	0	grafik mempunyai titik belok
$2 < x$			$+$	grafik cekung ke atas

Dari Tabel 6.5, kita menyimpulkan bahwa (2, 3) adalah titik belok grafik fungsi f, grafik cekung ke bawah pada interval $x < 2$, dan grafik cekung ke atas pada interval $x > 2$.



Gambar 6.9

□

Tugas Mandiri

1. Jika f positif dan cekung ke atas pada interval I, perlihatkan bahwa fungsi $g(x) = [\,f(x)]^2$ cekung ke atas pada I.
2. Jika f dan g adalah fungsi positif, naik, dan cekung ke atas pada interval I, perlihatkan bahwa fungsi fg cekung ke atas pada I.

Contoh 6.2.4

Diberikan

$$f(x) = x^{1/3}$$

Tentukan titik belok dari fungsi f.

Penyelesaian:

Dari fungsi yang diberikan,

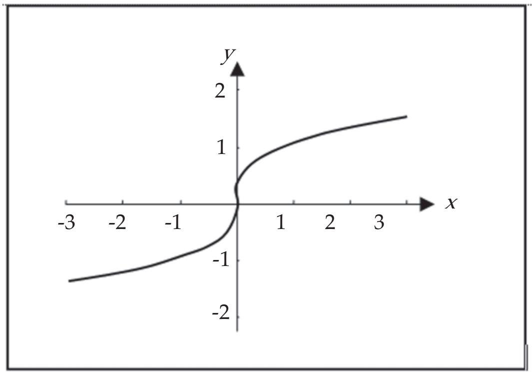
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \quad \text{dan} \quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

Terlihat bahwa $f'(0)$ dan $f''(0)$ tidak ada (mengapa?). Kita periksa tanda $f''(x)$ dengan Teorema 6.4.

Tabel 6.6

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < 0$		+	+	f naik, grafik cekung ke atas
$x = 0$	0	tidak ada	tidak ada	grafik mempunyai titik belok
$0 < x$		+	$-$	f naik, grafik cekung ke atas

Jadi, (0,0) adalah titik belok grafik fungsi f, grafik cekung ke atas pada interval $x < 0$ dan grafik cekung ke bawah pada interval $x > 0$.



Gambar 6.10

□

Selain bermanfaat untuk menentukan titik belok, keuntungan lain dari turunan kedua adalah bahwa turunan tersebut dapat digunakan sebagai uji ekstrim relatif.

Teorema 6.6 (Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif)

Misalkan f mempunyai turunan pada interval terbuka yang memuat c dan $f'(c) = 0$.

1. Jika $f''(c) < 0$, maka f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
2. Jika $f''(c) > 0$, maka f mempunyai nilai minimum relatif di c.

Contoh 6.2.5

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Tentukan titik-titik stasioner beserta jenisnya.

Penyelesaian:

Kita mempunyai

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{dan} \quad f''(x) = 6x - 6$$

Titik stasioner diperoleh apabila $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$$

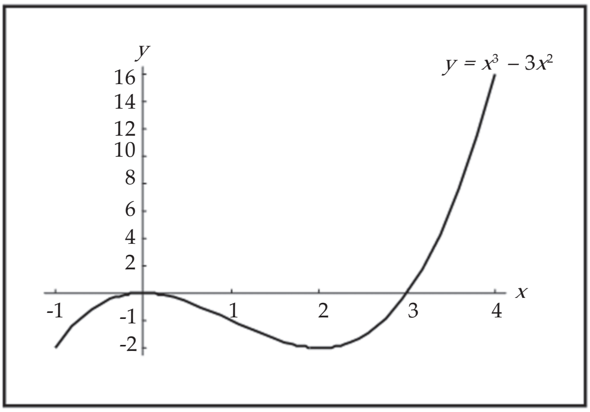
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

Dengan uji turunan kedua kita selidiki jenis ekstrimnya.

Tabel 6.7

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x = 0$	0	0	–	f mempunyai maksimum relatif
$x = 2$	–4	0	+	f mempunyai minimum relatif

Dari Tabel 6.7, kita menyimpulkan bahwa (0,0) dan (2,–4) adalah titik-titik stasioner, masing-masing merupakan titik maksimum relatif dan minimum relatif.



Gambar 6.11 Grafik Fungsi $y = x^3 - 3x^2$

□

Tugas Kelompok

Jika $K(t)$ merupakan ukuran pengetahuan yang Anda capai dalam belajar selama t jam untuk suatu ujian. Mana yang lebih besar, $K(8) - K(7)$ atau $K(3) - K(2)$? Apakah K cekung ke atas atau cekung ke bawah? Mengapa? Diskusikan dalam kelompok Anda.

Latihan 6.2

1. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tentukan titik-titik stasioner dan ekstrim relatif dengan uji turunan pertama.

   a. $f(x) = x^2 + 4x - 3$

   b. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

   c. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

   d. $f(x) = x^4 + 4x$

   e. $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x + 1$

2. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan ekstrim relatif dengan uji turunan pertama.

a. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)^2$

b. $f(x) = x\sqrt{3 - x}$

c. $f(x) = x - 3x^{1/3}$

d. $f(x) = x^{2/3}(x - 1)^2$

e. $f(x) = \begin{cases} 2x + 9 & , \text{ untuk } x \le -2 \\ x^2 + 1 & , \text{ untuk } x > -2 \end{cases}$

3. Tentukan ekstrim relatif dari fungsi pada soal nomor 1 dan nomor 2 dengan uji turunan kedua (jika mungkin).

4. Untuk setiap grafik dari fungsi berikut, tentukan titik beloknya (jika ada), interval di mana grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah.

a. $f(x) = x^3 + 9x$

b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

c. $h(x) = x^4 - 8x^3$

d. $F(x) = (x + 2)^3$

e. $G(x) = (x - 1)^3$

f. $H(x) = (x + 2)^{1/3}$

g. $f(x) = (x - 1)^{1/3}$

h. $g(x) = 2/(x^2 + 3)$

i. $h(x) = x/(x^2 + 4)$

j. $G(x) = x\sqrt{x+1}$

5. Tentukan nilai *a, b*, dan *c* sehingga grafik dari fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ mempunyai titik belok di (1, 2) dan gradien garis singgung di titik tersebut adalah –2.

6. Tentukan nilai *a* dan *b* sehingga fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ mempunyai ekstrim relatif di (2, 3).

7. Diketahui fungsi produksi suatu perusahaan adalah:

$$C(x) = 200 + 10x + 0{,}001x^3$$

a. Tentukan tingkat produksi x yang meminimumkan $C(x)$.

b. Tentukan di mana grafik fungsi produksi cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah.

c. Tentukan titik belok grafik fungsi produksi.

8 . Diketahui fungsi produksi suatu perusahaan adalah:

$$C(x) = 1800 + 25x - 0{,}2x^2 + 0{,}001x^3$$

a. Tentukan tingkat produksi x yang meminimumkan $C(x)$.

b. Tentukan di mana grafik fungsi produksi cekung ke atas dan di mana cekung ke bawah.

c. Tentukan titik belok grafik fungsi produksi.

9. Sebuah perusahaan yang membuat meja tulis dioperasikan dengan persaingan sempurna dan dapat menjual semua jenis meja tulis yang dibuatnya dengan harga Rp200.000,00 per meja. Misalkan x menyatakan banyaknya meja yang dijual setiap minggu dan $C(x)$ juta menyatakan biaya produksi setiap minggu dengan $C(x) = 3.000 + 400x + x^2$. Berapa banyak meja tulis yang harus dibuat setiap minggu sehingga perusahaan tersebut memperoleh keuntungan terbesar?

10. Suatu epidemi penyakit berjangkit di lingkungan masyarakat. Dalam x bulan setelah epidemi mulai berjangkit, P persen penduduk telah ketularan, dengan:

$$P = \frac{30x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Setelah berapa bulan paling banyak penduduk ketularan dan berapa persenkah ini dari penduduknya?

6.3 Ekstrim Mutlak pada Interval Tertutup

Pada subbab 6.2 kita telah membahas bahwa syarat perlu fungsi mempunyai ektrim relatif di c dalam daerah asal adalah bahwa c bilangan kritis. Tetapi jika daerah asal f adalah interval tertutup, maka kita dapat menemukan nilai fungsi terbesar atau terkecil pada interval tersebut. Kita perhatikan ilustrasi fungsi berikut. Misalkan f diberikan oleh:

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{, untuk } x<1 \\ x^2-6x+7 & \text{, untuk } x\geq 1 \end{cases}$$

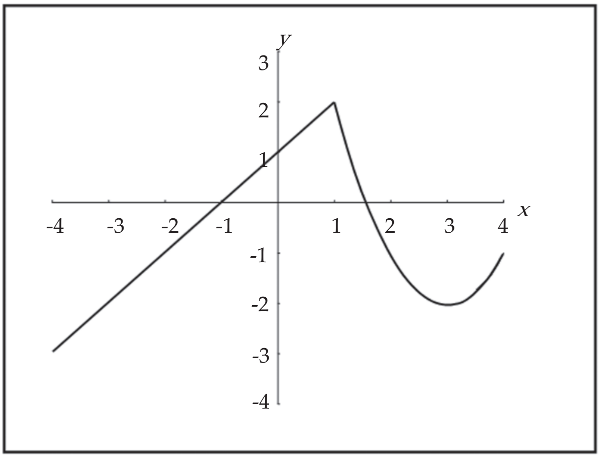
Sketsa grafik f pada interval [–4, 4] diberikan oleh Gambar 6.12. Perhatikan bahwa f mempunyai nilai ekstrim relatif di $x = 1$ dan $x = 3$ karena 1 dan 3 adalah bilangan kritis f, dengan:

$$f(1) = 2 \quad \text{dan} \quad f(3) = -2$$

Kemudian nilai f pada batas interval,

$$f(-4) = -3 \quad \text{dan} \quad f(4) = -1$$

Jadi, kita peroleh nilai terbesar dari f pada interval [–4, 4] adalah 2, dan nilai terkecil dari f pada interval tersebut adalah –3. Nilai ini masing-masing disebut sebagai nilai maksimum mutlak dan nilai minimum mutlak dari f pada [–4, 4].



Gambar 6.12

Definisi 6.6

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval tertutup dan c anggota interval.

1. Jika $f(c)\geq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak dari f pada interval tersebut.
2. Jika $f(c)\leq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai minimum mutlak dari f pada interval tersebut.
3. Jika $f(c)$ maksimum mutlak atau minimum mutlak, maka $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f.

Faktanya, fungsi f pada ilustrasi di atas adalah fungsi aljabar dengan daerah asal interval tertutup [–4, 4]. Hasil ini berlaku untuk sembarang fungsi aljabar dengan daerah asal interval tertutup.

> Teorema 6.7 (Teorema Nilai Ekstrim)
>
> Jika f fungsi aljabar dengan daerah asal interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada $[a, b]$.

Dari ilustrasi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa kemungkinan ekstrim mutlak dari fungsi aljabar pada interval tertutup terjadi di *bilangan kritis* atau di *batas interval*, sehingga kita mempunyai metode pencarian ekstrim berikut ini.

> Metode Interval Tertutup
>
> Untuk mencari nilai maksimum dan minimum mutlak suatu fungsi aljabar f dengan daerah asal interval tertutup $[a, b]$:
> 1. Carilah nilai f di bilangan kritis f di dalam (a, b).
> 2. Carilah nilai f di titik batas interval.
> 3. Bandingkan nilai-nilai pada langkah 1 dan 2, yang terbesar adalah nilai maksimum mutlak; yang terkecil adalah nilai minimum mutlak

Contoh 6.3.1

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

pada interval tertutup [1, 4]. Tentukan ekstrim mutlak dari f pada interval tersebut.

Penyelesaian:

Karena f kontinu pada interval tertutup [1, 4], kita gunakan Metode Interval Tertutup.

Kita mempunyai $f'(x) = 3x^2 - 6x$, dan bilangan kritis terjadi apabila $f'(x) = 0$,

$$f'(x) = 0 \iff 3x(x-2) = 0$$

$$\iff x = 2 \text{ atau } x = 0 \text{ (tidak memenuhi karena di luar interval)}$$

Satu-satunya bilangan kritis untuk f pada interval [1, 4] adalah $x = 2$. Nilai f di bilangan kritis ini adalah:

$$f(2) = 2^3 - 3(2)^2 = -4$$

Nilai f di titik batas interval adalah:

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 = -2 \quad \text{dan} \quad f(4) = 4^3 - 3(4)^2 = 16$$

Dengan membandingkan ketiga bilangan ini, kita peroleh nilai maksimum mutlak adalah $f(4) = 16$, dan nilai minimum mutlak adalah $f(2) = -4$. Lihat kembali grafik f pada Gambar 6.11 pada interval [1, 4].

□

Contoh 6.3.2

Model pertumbuhan pendapatan (dalam jutaan rupiah) suatu perusahaan selama 26 bulan, yang mulai beroperasi pada 1 April 2005 mengikuti fungsi:

$$P(t) = 0{,}001302t^3 - 0{,}09029t^2 + 23{,}61t - 3{,}083, \quad 0 \le t \le 26$$

Dengan model ini, perkirakan nilai ekstrim mutlak dari laju pertumbuhan pendapatan tersebut.

Penyelesaian:

Laju pertumbuhan pendapatan adalah:

$$P'(t) = 0{,}003906t^2 - 0{,}18058t + 23{,}61$$

Kita terapkan Metode Interval Tertutup terhadap P' pada interval $0 \le t \le 126$. Turunannya adalah $P''(t) = 0{,}007812t - 0{,}18058$.

Bilangan kritis hanya terjadi ketika $P''(t) = 0$.

$$t_1 = \frac{0{,}18058}{0{,}007812} \approx 23{,}12$$

Dengan menghitung $P'(t)$ di bilangan kritis dan di titik ujung, kita peroleh:

$$P'(0) = 23{,}61 \qquad P'(t_1) \approx 21{,}52 \qquad P'(126) = 62{,}87$$

Jadi, laju pertumbuhan maksimum kira-kira 62,87 juta rupiah per bulan dan laju pertumbuhan minimum kira-kira 21,52 juta rupiah per bulan.

□

Latihan 6.3

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 10, tentukan (jika ada) ekstrim mutlak dari setiap fungsi yang diberikan pada interval yang ditentukan.

1. $f(x) = x^3 + 5x - 4, \quad [-3, -1]$
2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4, \quad [-2, 1]$
3. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \quad [-4, 0]$
4. $f(x) = 3x^5 - 5x^3 - 1, \quad [-2, 2]$
5. $f(x) = \ f(x) = x^2 + 2/x, \quad [1/2, 2]$
6. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}, \quad [-1, 2]$
7. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [-1, 2]$
8. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}, \quad [0, 1]$
9. $f(x) = (x+1)^{2/3}, \quad [-2, 1]$
10. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{, untuk } -1 \le x \le 2 \\ 1 - x^2 & \text{, untuk } 2 < x \le 4 \end{cases}$

11. Pada suatu monopoli, persamaan permintaan suatu barang tertentu adalah $x + p = 140$, dengan x banyaknya satuan barang yang diproduksi setiap hari dan p juta menyatakan harga setiap satuan. Biaya produksi dalam jutaan rupiah untuk memproduksi x satuan diberikan oleh:

$$C(x) = 300 + 20x + x^2 \text{ untuk } x \in [0,140]$$

   a. Tentukan fungsi keuntungan total.
   b. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biaya marginal.
   c. Tentukan maksimum keuntungan setiap hari.

12. Misalkan dalam suatu monopoli, persamaan permintaan suatu barang tertentu adalah $p = \frac{1}{5}\sqrt{x - 100}$, dengan p juta menyatakan harga x barang dengan $x \in [100,1000]$. Biaya produksi dalam jutaan rupiah untuk memproduksi x satuan diberikan oleh $C(x) = 100 + 2x$.
   a. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biaya marginal.
   b. Tentukan nilai x yang menghasilkan keuntungan maksimum.

6.4 Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

Sedemikian jauh kita telah membahas beberapa aspek tentang fungsi, kini pada gilirannya kita siap menuangkan aspek-aspek tersebut untuk menggambarkan grafik secara benar. Kita mempunyai pedoman untuk membuat sketsa grafik fungsi $y = f(x)$:

1. Daerah asal.
2. Perpotongan sumbu.
   Perpotongan sumbu-y adalah $f(0)$, dan perpotongan sumbu-x kita ambil untuk $y = 0$.
3. Interval naik dan turun.
4. Nilai ekstrim beserta jenisnya.
5. Kecekungan dan titik belok.
6. Gambarkan sketsa kurva.

Contoh 6.4.1

Gambarkan grafik dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Penyelesaian:

1. Daerah asal adalah $\mathbb{R}$ (himpunan semua bilangan real) karena f sukubanyak.
2. Titik potong grafik dengan sumbu-x, yaitu untuk $y = 0$,

$$\begin{aligned} y = 0 \ &\Leftrightarrow \ x^3 - 3x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ (x+1)^2(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x = -1 \text{ atau } x = 2 \end{aligned}$$

   Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-x adalah $(-1, 0)$ dan $(2, 0)$.
   Titik potong grafik dengan sumbu-y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3 \cdot 0 - 2 = -2$$

   Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-y adalah $(0, -2)$.

3. Kita mempunyai $f'(x) = 3x^2 - 3$ dan $f''(x) = 6x$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \ &\Leftrightarrow \ 3x^2 - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ 3(x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x = 1 \text{ atau } x = -1 \end{aligned}$$

dan

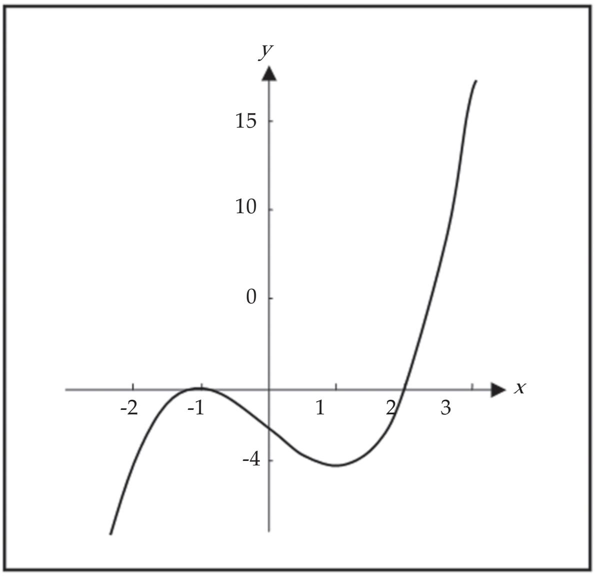
$$f''(x) = 0 \iff 6x = 0$$
$$\iff x = 0$$

Kita rangkum hasilnya sebagai berikut.

Tabel 6.8

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < -1$		+		f naik
$x = -1$	0	0	–	f mempunyai maksimum relatif
$x = 0$	–2		0	f mempunyai titik belok
$-1 < x < 1$	–4	–	+	f turun
$x = 1$		0		f mempunyai minimum relatif
$1 < x$		+		f naik

Dari Tabel 6.8, kita mempunyai (–1, 0) adalah titik maksimum relatif, dan (1,– 4) adalah titik minimum relatif.



Gambar 6.13

□

Contoh 6.4.2

Gambarkan grafik dari fungsi:

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3$$

Penyelesaian:

1. Karena f sukubanyak, maka daerah asalnya adalah $\mathbb{R}$.
2. Titik potong grafik dengan sumbu-x, yaitu untuk $y = 0$,

$$y = 0 \iff 3x^5 - 5x^3 = 0$$
$$\iff x^3(3x^2 - 5) = 0$$
$$\iff x = 0 \text{ atau } x = \sqrt{\tfrac{5}{3}} \approx 1{,}3 \text{ atau } x = -\sqrt{\tfrac{5}{3}} \approx -1{,}3$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-x adalah (0,0), (1,3, 0), dan (–1,3, 0).
Titik potong grafik dengan sumbu-y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Rightarrow y = 3 \cdot 0^5 - 5 \cdot 0^3 = 0$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-y adalah (0, 0).

3. Kita mempunyai $f'(x) = 15x^4 - 15x^2$ dan $f''(x) = 60x^3 - 30x$,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 15x^4 - 15x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 15x^2(x-1)(x+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1 \text{ atau } x = -1 \end{aligned}$$

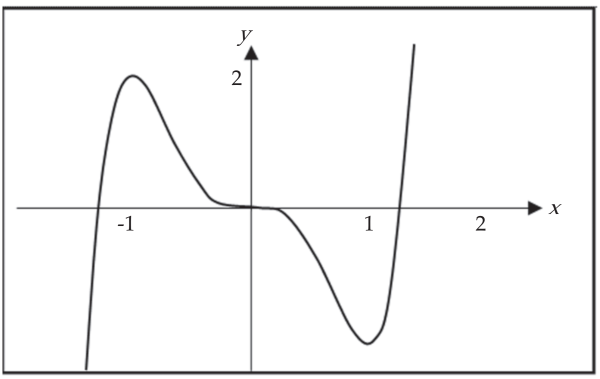
dan

$$\begin{aligned} f''(x) = 0 &\Leftrightarrow 60x^3 - 30x = 0 \\ &\Leftrightarrow 30x(2x^2 - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ atau } x = 1/\sqrt{2} \approx 0,7 \text{ atau } x = -1/\sqrt{2} \approx -0,7 \end{aligned}$$

Tabel 6.9

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < -1$		+		f naik
$x = -1$	2	0	–	f mempunyai maksimum relatif
$-1 < x < -0,7$		–	–	f turun
$x = -0,7$	–		0	f mempunyai titik belok
$-0,7 < x < 0$	1,2	–	+	f turun
$x = 0$		0	0	f mempunyai titik belok
$0 < x < 0,7$	0	–	–	f turun
$x = 0,7$			0	f mempunyai titik belok
$0,7 < x < 1$	1,2	–	+	f turun
$x = 1$		0	+	f mempunyai minimum relatif
$1 < x$	2	+		f naik

Dari Tabel 6.9, kita mempunyai (–1, 2) adalah titik maksimum relatif, dan (1, 2) adalah titik minimum relatif. Titik beloknya adalah (– 0,7, –1,2), (0, 0), dan (0,7, 1,2).



Gambar 6.14

□

Latihan 6.4

Gambarkan grafik dari setiap fungsi yang diberikan.

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$
3. $f(x) = (x - 1)^2 (x + 2)$
4. $f(x) = x^4 - 2x^3$
5. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
6. $f(x) = \frac{1}{4} x^4 - x^3$
7. $f(x) = \frac{1}{2} x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$
8. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
9. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$
10. $f(x) = (x + 1)^3(x - 2)^2$

6.5 Masalah Pengoptimuman

Metode yang telah kita pelajari dalam bab ini digunakan untuk mencari nilai ekstrim yang mempunyai penerapan praktis dalam banyak bidang kehidupan. Dalam memecahkan praktis tantangan terbesar adalah mengubah masalah dalam kalimat menjadi masalah pengoptimuman matematis dengan merancang fungsi yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan. Secara singkat, kita mempunyai tiga aktivitas utama dalam memecahkan masalah pengoptimuman, yaitu merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan penyelesaian. Berikut ini, kita rangkum langkah-langkah dalam memecahkan masalah pengotimuman.

1. Memahami permasalahan
   Baca dengan seksama sampai paham. Tanyakan pada diri Anda sendiri: Apa yang tidak diketahui? Apa besaran yang diketahui? Apa syarat yang diberikan?
2. Gambar diagram
   Jika memungkinkan gambarkan diagram.
3. Perkenalkan notasi
   Berikan simbol untuk besaran yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan (misalkan F). Pilih juga besaran-besaran yang tidak diketahui (misalkan: $a, b, c, ..., x, y$).
4. Buat persamaan F dalam simbol-simbol besaran yang tidak diketahui.
5. Gunakan metode penentuan maksimum dan minimum pada bab ini.

Contoh 6.5.1

Diketahui $y = 2x - 8$. Tentukan x sehingga xy minimum dan berapa besarnya.

Penyelesaian:

Kita subtitusikan $y = 2x - 8$ ke xy,

$$xy = x(2x - 8) = 2x^2 - 8x$$

Besaran yang akan kita minimumkan adalah:

$$f(x) = xy = 2x^2 - 8x$$

(fungsi dari x). Selanjutnya, kita mempunyai $f'(x) = 4x - 8$. Dengan Uji Turunan Pertama,

$$f'(x) = 0 \iff 4x - 8 = 0$$
$$\iff x = 2$$

Tabel 6.11

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 2$		$-$	f turun
$x = 2$	-8	0	f mempunyai minimum relatif
$2 < x$		+	f naik

Dari Tabel 6.11, kita simpulkan bahwa nilai x yang menyebabkan xy minimum adalah $x = 2$, dan besarnya adalah $f(2) = -8$.

□

Contoh 6.5.2

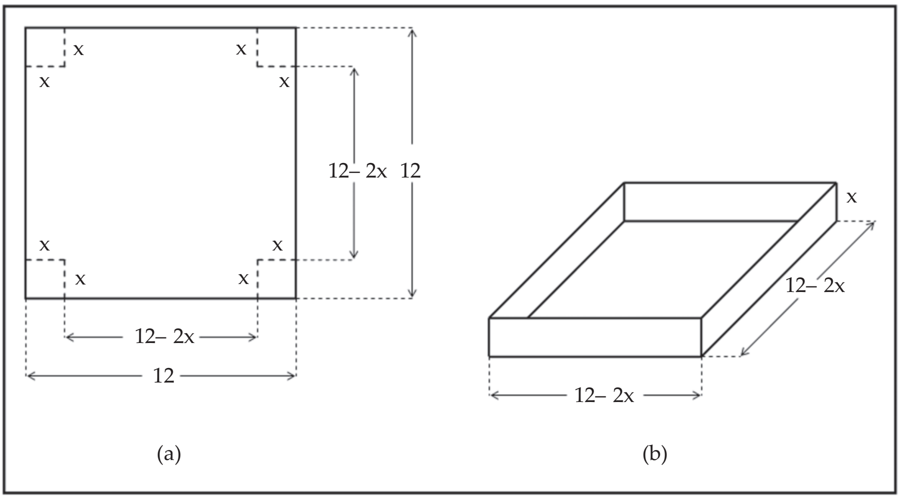
Suatu perusahaan kotak kardus akan membuat kotak tanpa tutup dari karton berbentuk persegi yang berukuran 12 inci. Pembuatan kotak dilakukan dengan cara memotong persegi-persegi yang ukurannya sama dari keempat sudutnya, kemudian melipat sisi-sisinya ke atas. Tentukan ukuran pemotongan agar diperoleh kotak kardus dengan isi terbesar.

Penyelesian:

Gambar 6.15 (a) menyatakan satu lembar karton dan Gambar 6.15 (b) menyatakan kotak yang dihasilkan dari karton tersebut. Misalkan x inci adalah sisi persegi-persegi dari keempat sudut karton. Setelah sisi-sisinya dilipat, maka terbentuk kotak dengan ukuran $(12 - 2x)$ inci, $(12 - 2x)$ inci, dan x inci. Perhatikan Gambar 6.15 (b). Jika $V(x)$ inci kubik menyatakan isi kotak, maka:

$$V(x) = (12 - 2x)(12 - 2x)\,x$$
$$= 144x - 48x^2 + 4x^3$$

Daerah asal V adalah interval tertutup [0, 6]. Mengapa?



Gambar 6.15

Kita akan menentukan maksimum mutlak dari V pada interval [0,6] dengan Metode Interval tertutup. Kita mempunyai $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$,

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 &\Leftrightarrow 144 - 96x + 12x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-6)(x-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = 6 \end{aligned}$$

Jadi, bilangan kritis V adalah 2 dan 6. Nilai V di bilangan kritis dan di titik batas interval adalah maksimum mutlak V terjadi di bilangan kritis atau pada batas interval,

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 128, \qquad V(6) = 0$$

Jadi, pemotongan sudut karton sepanjang 2 inci, akan memberikan volume kotak kardus maksimum sebesar 128 inci kubik.

□

Tugas Kelompok

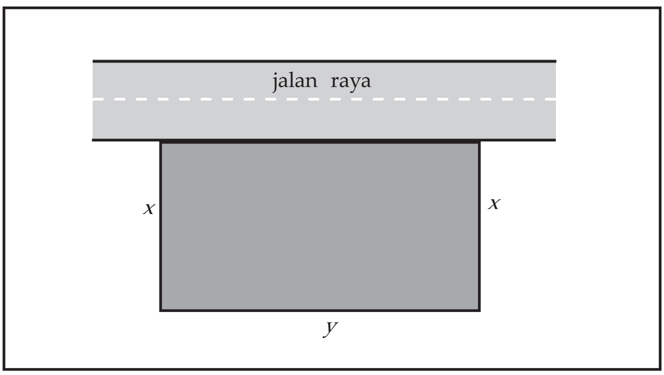
Kerjakan Contoh 6.5.2 apabila dibuat kotak dengan tutup. Diskusikan dalam kelompok Anda.

Contoh 6.5.3

Lapangan berbentuk empat persegi panjang yang terbentang di tepi jalan raya, hendak dipagari tetapi sepanjang tepi jalan tidak ikut dipagari. Harga material untuk pagar pada sisi yang sejajar dengan jalan adalah Rp120.000 per meter, dan harga material untuk pagar kedua sisi lainnya adalah Rp80.000 per meter. Tentukan ukuran lapangan yang luasnya terbesar yang dapat dipagari dengan pagar seharga Rp36.000.000.

Penyelesaian:

Misalkan x meter adalah panjang sisi lapangan yang tegak lurus dengan jalan, y meter adalah panjang sisi lapangan yang sejajar jalan, dan A m^2 luas lapangan, perhatikan Gambar 6.16, maka $A = xy$.



Gambar 6.16

Harga material untuk sisi lapangan yang tegak lurus jalan adalah Rp80.000 per meter. Karena panjangnya x meter, maka harga material untuk satu sisi tersebut adalah 80.000x rupiah. Harga material untuk sisi ketiga adalah 120.000y rupiah. Diketahui total biaya adalah Rp36.000.000, maka:

$$80.000x + 80.000x + 120.000y = 36.000.000$$

atau

$$4x + 3y = 900$$

Kita nyatakan y dalam x, $y = 300 - \frac{4}{3}x$, kemudian kita subtitusikan ke dalam A,

$$A = A(x) = x(300 - \frac{4}{3}x) = 300x - \frac{4}{3}x^2$$

Kita terapkan uji turunan pertama, $A'(x) = 300 - \frac{8}{3}x$

$$A'(x) = 0 \iff 300 - \frac{8}{3}x = 0$$
$$\iff x = 112{,}5$$

Untuk $x = 112{,}5$ akan menghasilkan $y = 300 - \frac{4}{3} \cdot (112{,}5) = 150$. Substitusi kedua harga ini ke dalam A, memberikan

$$A = (112{,}5)(150) = 16.875 \text{ m}^2$$

Jadi, luas terbesar yang dapat dipagari dengan harga Rp36.000.000 adalah 16.875m^2, yang diperoleh apabila sisi lapangan yang sejajar jalan 150 m dan panjang masing-masing sisi yang lain adalah 112,5 m.

Untuk mengakhiri bab, kita tinjau kembali masalah pemasangan kabel telepon di antara dua gedung yang berseberangan pada tepi danau, yang disampaikan pada awal bab.

Contoh 6.5.4

Titik A dan B adalah dua titik yang berhadapan pada masing-masing tepi danau yang lurus dengan lebar 3 km. Titik C terletak di tepi danau di mana B terletak dan jauhnya 6 km dari B. Perusahaan telekomunikasi ingin memasang kabel dari A ke C. Jika biaya pemasangan kabel per kilometer di bawah air 25 % lebih mahal daripada pemasangan kabel di daratan, bagaimanakah cara pemasangan kabel yang termurah untuk perusahaan tersebut?

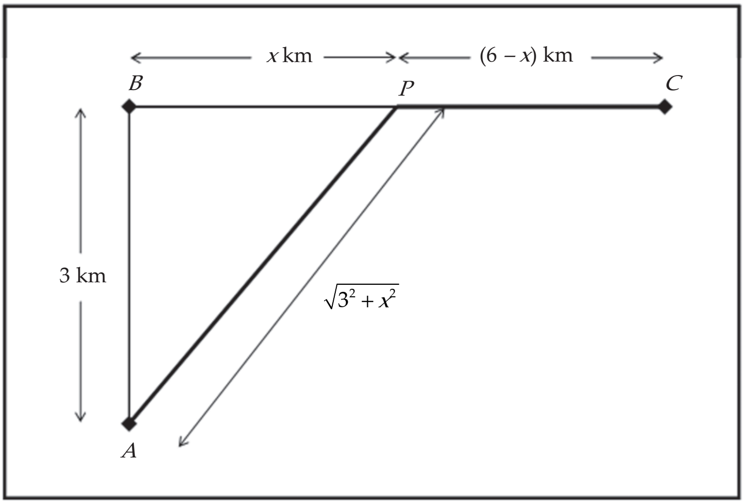
Penyelesian:

Dari informasi yang diberikan, kita awali dengan menempatkan titik P yang terletak di antara B dan C, sehingga kabel dipasang dari A ke P dan dari P ke C. Misalkan jarak B ke P adalah x km, maka jarak P ke C adalah $(6 - x)$ km, $x \in [0, 6]$. Kita sederhanakan sketsa dari Gambar 6.1 menjadi Gambar 6.17.

Kita akan menentukan x, yaitu posisi P, sehingga $C(x)$ minimum. Karena daerah asal $C(x)$ interval tertutup, kita dapat menggunakan Metode Interval Tertutup. Faktanya, fungsi $C(x)$ kontinu pada [0, 6], sehingga minimumnya ada.

Kita mempunyai

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k$$



Gambar 6.17

Dengan menyelesaikan $C'(x) = 0$ untuk x diperoleh:

$$\frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5x = 4\sqrt{9+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 25x^2 = 16(9+x^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \pm 4$$

Tetapi -4 bukan akar penyelesaian, sehingga bilangan kritis untuk $C(x)$ pada interval [0, 6] adalah 4. Nilai $C(x)$ di bilangan kritis dan titik batas interval adalah:

$$C(0) = \tfrac{39}{4}k, \qquad C(4) = \tfrac{33}{4}k, \qquad \text{dan} \qquad C(6) = \tfrac{15}{4}k\sqrt{5}$$

Tampak bahwa minimum mutlak dari $C(x)$ pada interval [0, 6] adalah $\tfrac{33}{4}k$, yang terjadi untuk $x = 4$. Jadi, agar biaya pemasangan kabel minimum, maka kabel harus dipasang dari A ke P di bawah air dahulu, kemudian dari P ke C di daratan, dengan biaya $33k/4$ juta rupiah, dengan k suatu konstanta.

□

Tugas Mandiri

Untuk menambah wawasan Anda tentang nilai ekstrim fungsi dan aplikasinya lebih lanjut, kunjungilah: http://en.wikipedia.org/wiki/maxima and minima

Latihan 6.5

1. Hasil kali dua bilangan positif adalah 16. Tentukan bilangan-bilangan itu, jika:
   a. jumlahnya minimum
   b. jumlah dari bilangan pertama dan kuadrat bilangan kedua minimum

2. Persegi panjang mana yang mempunyai luas terbesar, jika kelilingnya 100 cm? Berapa cm^2 luasnya yang maksimum?

3. Luas daerah persegi panjang ialah 48 cm^2.
   a. Jika panjang salah satu sisinya x cm, tulislah kelilingnya dalam x.
   b. Tentukan ukuran persegi panjang itu sehingga kelilingnya minimum.

4. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 inci dan panjang 8 inci. Pada keempat sudut karton itu dipotong persegi yang sisinya x inci. Dari bangun yang diperoleh, dibuat kotak tanpa tutup yang tingginya x inci. Tentukan ukuran kotak agar isinya maksimum.

5. Seorang pengusaha ingin membuat kaleng berbentuk tabung yang isinya 1.000 cm^3. Kaleng itu akan dibuat demikian hingga luasnya paling kecil. Tentukan jari-jari dan tinggi kaleng itu, apabila:
   a. kaleng itu tanpa tutup
   b. kaleng itu dengan tutup

6. Suatu kotak tanpa tutup, alasnya berbentuk persegi yang sisinya x cm. Isi kotak itu 64 cm^3.
   a. Tulislah tingginya dalam x.
   b. Jika luas permukaannya L, nyatakan L dalam x.
   c. Tentukanlah ukuran kotak itu agar bahan yang dibuat sedikit mungkin.

7. Sebuah lapangan persegi panjang yang luasnya 2.700 m^2 akan dipagari sekelilingnya dan pagar tambahan akan digunakan untuk membagi lapangan di tengah-tengahnya. Biaya pagar di tengah-tengah lapangan adalah Rp120.000,00 per meter dan di sepanjang sisinya adalah Rp180.000,00 per meter. Tentukan ukuran lapangan sehingga biaya pagar sekecil mungkin.

8. Sebuah karton untuk poster memuat 32 $inci^2$ daerah yang dicetak dengan batas (bebas cetak) 2 inci di atas dan di bawah serta 4/3 inci di sisi-sisinya. Tentukan ukuran kotak terkecil yang dapat digunakan untuk membuat poster.

9. Titik A merupakan suatu pulau yang terletak 6 km dari titik terdekat B pada pantai yang lurus. Seorang turis asing di pulau tersebut bermaksud pergi ke titik C di pantai yang jaraknya 9 km dari B. Turis tersebut dapat menggunakan perahu dengan sewa Rp15.000,00 per kilometer dan pergi ke suatu titik P di antara B dan C. Kemudian dari P menuju C, dia menyewa mobil beserta supirnya dengan sewa Rp12.000,00 per kilometer. Tentukan rute perjalanan yang paling murah dari titik A ke titik C.

Rangkuman

1. Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan pada interval tertutup $[a, b]$.
   a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$.
   b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f turun pada $[a,b]$.
2. Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval terbuka dan c anggota interval.
   a. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
   b. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
   c. Fungsi f yang mempunyai nilai maksimum relatif atau minimum relatif di c, dikatakan mempunyai ekstrim relatif di c.
3. Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval tertutup dan c anggota interval.
   a. Jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak dari f pada interval tersebut.
   b. Jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai minimum mutlak dari f pada interval tersebut.
   c. Jika $f(c)$ maksimum mutlak atau minimum mutlak, maka $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f.
4. Jika $f'(c) = 0$, maka fungsi f dikatakan stasioner di c. Nilai $f(c)$ disebut nilai stasioner dari f. Titik $(c, f(c))$ disebut titik stasioner dari f.
5. Jika f terdefinisi pada (a, b) dan mempunyai ekstrim relatif di c, $a < c < b$, maka $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.
6. Bilangan c di dalam daerah asal f sehingga $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada kita sebut sebagai bilangan kritis.
7. Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif. Misalkan f mempunyai turunan di sekitar c, kecuali mungkin di c sendiri.
   a. Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < c$, dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
   b. Jika $f'(x) < 0$ untuk $x < c$, dan $f'(x) > 0$ untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai minimum relatif di c.
8. Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif. Misalkan f mempunyai turunan pada interval terbuka yang memuat c dan $f'(c) = 0$.
   a. Jika $f''(c) < 0$, maka f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
   b. Jika $f''(c) > 0$, maka f mempunyai nilai minimum relatif di c.
9. Teorema Nilai Ekstrim. Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada $[a, b]$.

10. Metode Interval Tertutup. Untuk mencari nilai maksimum dan minimum mutlak suatu fungsi kontinu f pada interval tertutup $[a, b]$:
    (1) Carilah nilai f di bilangan kritis f di dalam (a, b).
    (2) Carilah nilai f di titik batas interval.
    (3) Bandingkan nilai-nilai pada langkah (1) dan (2), yang terbesar adalah nilai maksimum mutlak; yang terkecil adalah nilai minimum mutlak.

Math Info

Sumber: jbmain_indonesian.cri.cn-

Gambar 6.18 Burung Terbang

Pakar ilmu burung telah menetapkan bahwa beberapa jenis burung cenderung menghindari terbang melintasi genangan air luas selama siang hari. Dipercaya bahwa lebih banyak energi diperlukan untuk terbang melintasi air daripada tanah karena secara umum udara naik di atas tanah dan turun di atas air selama siang hari. Hal ini menunjukkan bahwa burung secara naluriah memilih jalur yang akan meminimumkan pengeluaran energi.

Uji Kompetensi

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Pada interval $-1 \le x \le 2$, fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 3$ mempunyai nilai maksimum … .

   A. –6 D. 6
   B. –1 E. 8
   C. 3

2. Jumlah dari bilangan pertama dan kuadrat bilangan kedua adalah 75. Nilai terbesar dari hasil kali kedua bilangan tersebut adalah ... .

   A. 50 D. 250
   B. 75 E. 350
   C. 175

3. Jarak terpendek titik (4, 2) ke kurva parabola $y^2 = 8x$ adalah ... .

   A. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$
   B. $2\sqrt{3}$ E. $3\sqrt{2}$
   C. $\sqrt{3}$

4. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $\left(3x - 900 + \dfrac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum, maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu ... hari.

   A. 40 D. 120
   B. 60 E. 150
   C. 90

5. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka $p =$ … .

   A. 8 D. 4
   B. 7 E. 3
   C. 5

6. Persamaan garis yang melalui titik (2, 3) dan membentuk segitiga di kuadran pertama dengan luas terkecil adalah ... .

   A. $y - 3 = \frac{3}{2}(x-2)$ D. $y - 3 = -\frac{2}{3}(x-2)$
   B. $y - 3 = -\frac{3}{2}(x-2)$ E. $y - 3 = -\frac{1}{3}(x-2)$
   C. $y - 3 = \frac{2}{3}(x-2)$

7. Jika nilai stasioner dari $f(x) = x^3 - px^2 - px - 1$ adalah $x = p$, maka nilai p adalah … .

   A. 0 atau 1 D. 1
   B. 0 atau 1/5 E. 1/5
   C. 0 atau –1

8. Pertumbuhan pendapatan suatu perusahaan setelah t tahun mengikuti fungsi:

$$s(t) = 120 + 5t - 3t^2 + \tfrac{1}{3}t^3$$

Laju pertumbuhan tertinggi perusahaan dicapai setelah waktu t = ...

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

9. Titik belok dari fungsi $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ adalah ... .

A. (–2, 3)
B. (–2, 7)
C. (–2, 5)
D. (2, 10)
E. (2, 5)

10. Kurva $y = x^3 + 6x^2 - 9x + 7$ naik untuk nilai-nilai x … .

A. $x > 0$
B. $-3 < x < 1$
C. $-1 < x < 3$
D. $x < -3$ atau $x > 1$
E. $x < -1$ atau $x > 3$

11. Kurva $y = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ turun untuk nilai-nilai x … .

A. $-1 < x < 4$
B. $1 < x < 4$ $x > 0$
C. $-4 < x < 1$
D. $x < -4$ atau $x > 1$
E. $x < -1$ atau $x > 4$

12. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun pada interval $-1 < x < 3$. Jika nilai maksimum dari $f(x)$ adalah 15, maka nilai minimumnya adalah ... .

A. – 24
B. –20
C. –17
D. –10
E. 2

13. Sebuah kerucut mempunyai jari-jari r dan tinggi t. Jika $r + t = 9$, maka volume maksimum kerucut tersebut adalah ... .

A. 24π
B. 27π
C. 33π
D. 36π
E. 42π

14. Dua bilangan, a dan b, memenuhi $a - 2b = 50$. Nilai minimum dari $a^2 - b^2$ adalah ... .

A. 300
B. 400
C. 500
D. 600
E. 700

15. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan kuadrat $x^2 - (a-1)x + a = 0$, maka nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^3$ dicapai untuk a = ...

A. 1 dan 2
B. 1 dan 3
C. 3 dan 2
D. –1 dan 2
E. –1 dan 2

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Dalam suatu monopoli, persamaan permintaan suatu barang tertentu adalah $p = \left(8 - \frac{1}{100}x\right)^2$, dengan p juta menyatakan harga x barang dengan $x \in [0, 800]$. Biaya produksi dalam jutaan rupiah untuk memproduksi x satuan diberikan oleh $C(x) = 18x - \frac{1}{100}x^2$.
    a. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biaya marginal.
    b. Tentukan nilai x yang menghasilkan keuntungan maksimum.

17. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$.

    Tentukan:
    a. interval di mana grafik f naik dan turun
    b. maksimum relatif dan minimum relatif
    c. titik belok grafik $y = f(x)$
    d. gambarkan grafik $y = f(x)$

18. Biaya untuk memproduksi x unit barang per hari adalah $(x^3 - 2000x^2 + 3000000x)$ rupiah. Jika barang itu harus diproduksi, berapakah biaya paling rendah untuk per unit?

19. Carilah dua bilangan bulat positif sehingga jumlahnya 12 dengan hasil kali keduanya sebesar mungkin.

20. Tentukan nilai maksimum mutlak dan nilai minimum mutlak dari $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ pada [0, 2].

Soal Analisis

1. Paket yang dapat diterima oleh suatu perusahaan pengiriman adalah paket yang jumlah panjang dan keliling penampang tegaknya tidak melebihi 100 inci. Bila paket berbentuk kotak tegak dengan penampang tegaknya berbentuk persegi, tentukan ukuran paket yang mempunyai volume terbesar yang dapat dikirimkan oleh perusahaan pengiriman tersebut.

2. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis produk, A dan B. Jika biaya total produksi untuk 8 jam sehari adalah C juta, maka $C = 3x^2 + 42y$, dengan x banyaknya mesin yang digunakan untuk memproduksi produk A dan y banyaknya mesin yang digunakan untuk memproduksi produk B. Misalkan selama 8 jam sehari terdapat 15 mesin yang bekerja. Tentukan banyaknya mesin yang harus digunakan untuk memproduksi A dan banyaknya mesin yang memproduksi B agar biaya total produksi minimum.

3. Perusahaan mobil ingin menentukan harga jual terbaik untuk mobil mewah baru. Perusahaan memperkirakan bahwa biaya awal perancangan mobil dan penyiapan pabrik tempat membangunnya menghabiskan biaya 500 miliar rupiah. Biaya tambahan pembuatan tiap mobil dapat dimodelkan oleh fungsi $m(x) = 20x - 5x^{3/4} + 0,01x^2$, dengan x adalah banyaknya mobil yang diproduksi dan m adalah biaya pembuatan, dalam miliar rupiah. Perusahaan memperkirakan bahwa dengan mematok harga p (dalam miliar rupiah) untuk setiap mobil, akan mampu menjual $x(p) = 320 - 7,7p$ buah mobil. Tentukan tingkat produksi dan harga jual mobil yang memaksimumkan keuntungan.

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	: ………………..	Tanggal	: …………
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Nilai Ekstrim dan Teknik Menggambar Grafik Fungsi
Kelompok	: ………………..	Semester	: 2 (dua)

Kegiatan : Membuat kaleng silinder

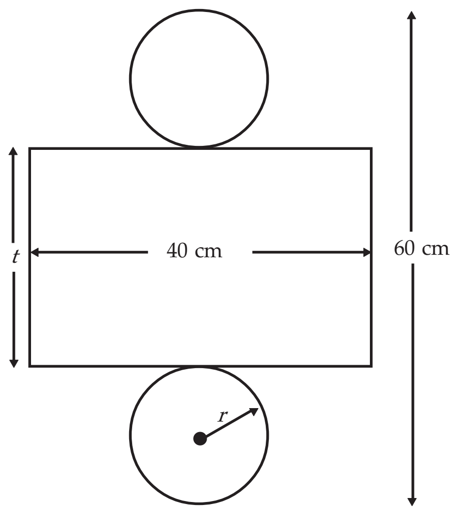
Tujuan : Menentukan ukuran kaleng silinder yang meminimumkan bahan jika volume diketahui

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. 1 lembar karton ukuran 40 × 60 cm
2. Gunting
3. Meteran
4. Alat tulis
5. Kertas perekat
6. Penggaris
7. Jangka

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok dengan anggota 5 siswa.
2. Gambarkan jaring-jaring kaleng silinder, seperti gambar di bawah.
3. Rekatkan jaring-jaring kaleng silinder tersebut dengan kertas perekat.



4. Kaleng yang diperoleh mempunyai jari-jari alas r cm dan tingi t cm.

5. Tentukan nilai r dan t yang mungkin, jika volume kotak adalah V dan A adalah luas jaring-jaring kaleng, lengkapi tabel berikut ini.

No.	r	t	V	A
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

C. Analisis

1. Dari data yang Anda peroleh di atas, manakah yang memberikan luas minimum.
2. Tentukan rumus volume kaleng dalam r.
3. Jika volume kaleng adalah 1 liter, nyatakan A sebagai fungsi dari r.
4. Apakah daerah asal fungsi A?
5. Jika kaleng dimaksudkan untuk mengepak 1 liter minyak, tentukan nilai r yang menyebabkan biaya pembuatan minimum.
6. Manakah hasil percobaan Anda di atas yang mendekati A untuk nilai r tersebut?

Teka-Teki Matematika

Sumber: *np.cpami.gov.tw*

Gambar 6.19

Seorang pelari maraton dikenai aturan bahwa yang pertama harus dapat menyelesaikan ½ dari jarak yang harus ditempuh, langkah kedua harus menyelesaikan ½ dari sisanya, kemudian ½ dari sisanya lagi, proses ini dilanjutkan terus-menerus. Menurut aturan tersebut, maka setiap pelari tidak akan dapat menyelesaikan lomba lari tersebut karena proses yang harus dilalui tidak akan berhenti. Tetapi dalam kenyataannya, setiap lomba lari pasti ada yang menjadi juara atau dapat menyelesaikannya. Berikan penjelasan terhadap masalah ini.

LATIHAN ULANGAN UMUM SEMESTER 2

Mata pelajaran	:	Matematika
Kelas	:	XI
Program	:	IPS
Semester	:	II
Waktu	:	150 menit
Jumlah Soal	:	50
Jenis Soal	:	Bentuk Objektif dan Bentuk Uraian

I. PETUNJUK

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 40, pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Manakah dari fungsi berikut yang memenuhi sifat $f(x+y)=f(x)+f(y)$ untuk setiap x dan y anggota $\mathbb{R}$?

   A. $f(t)=t^2+2t$
   B. $f(t)=2t+4$
   C. $f(t)=3t^2$
   D. $f(t)=t^2+1$
   E. $f(t)=3t$

2. Daerah hasil dari fungsi $f(x)=3+\sqrt{16-x^2}$ adalah ... .

   A. $\{x\in\mathbb{R}\mid -4\le x\le 4\}$
   B. $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x\le 4\}$
   C. $\{x\in\mathbb{R}\mid -2\le x\le 2\}$
   D. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge 4\}$
   E. $\{x\in\mathbb{R}\mid 3\le x\le 7\}$

3. Manakah di antara fungsi berikut yang merupakan fungsi ganjil?

   A. $\dfrac{x^3+3x}{x^3-2x+8}$
   B. $\dfrac{x^3+3x}{x^4-2x^2+8}$
   C. $\dfrac{3x}{x+8}$
   D. $\dfrac{x^2+3x}{x^4-2x^2+8}$
   E. $\dfrac{x^2+3x}{x^3+8}$

4. Fungsi $f(x)=\dfrac{3}{2x^2-8}$ daerah asal alaminya adalah ... .

   A. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge 2\}$
   B. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\le -2\}$
   C. $\{x\in\mathbb{R}\mid -2<x\le 2\}$
   D. $\{x\in\mathbb{R}\mid x\ne -2,\ x\ne 2\}$
   E. $\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x<2\}$

5. Jika $f(x)=\dfrac{8}{x+2}$ dan $g(x)=x^2$ untuk $x \geq 0$, maka daerah asal $(f \circ g)^{-1}(x)$ adalah ... .

A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 4\}$
B. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$
C. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4\}$
D. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
E. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 4\}$

6. Jika $f(x)=4x+2$ dan $g(x)=3$, maka $(g \circ f)(0)= \ldots$.

A. 0
B. 3
C. 4
D. 6
E. 10

7. Jika $f(x)=\sqrt{x+1}$ dan $g(x)=x^2-1$, maka $(g \circ f)(x)= \ldots$.

A. x
B. $x-1$
C. $x+1$
D. $2x-1$
E. x^2+1

8. Jika $(g \circ f)(x)=-\dfrac{x}{2}+1$ dan $g(x)=4x$, maka $f(x)= \ldots$.

A. $\frac{1}{8}(-x+2)$
B. $\frac{1}{8}(-x-2)$
C. $\frac{1}{8}(x-2)$
D. $\frac{1}{4}(x-1)$
E. $\frac{1}{4}(-x+2)$

9. Jika $(g \circ f)(x)=2x^2+4x+7$ dan $f(x)=x^2+2x-1$, maka $g(x)= \ldots$.

A. $2x-1$
B. $2x-3$
C. $2x+3$
D. $2x+9$
E. $2x-9$

10. Jika $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ dan $(f \circ g)(x)=\dfrac{1}{x-2}\sqrt{x^2-4x+5}$, maka $g(x-3)= \ldots$.

A. $1/(x-5)$
B. $1/(x-1)$
C. $1/(x+1)$
D. $1/(x-3)$
E. $1/(x+3)$

11. Jika $f(x)=\dfrac{2x-5}{3x-2}$, maka $f^{-1}(1)= \ldots$.

A. 11
B. 2/3
C. –3
D. –7
E. –11

12. Jika $(g \circ f)(2x+3) = 3x-6$ dan $g(x) = x+4$, maka $f^{-1}(8) = \dots$.

A. 5
B. 10
C. 15
D. 20
E. 25

13. Jika $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x-1)$ dan $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(3-x)$, maka $(f \circ g)^{-1}(6) = \dots$.

A. 3
B. 2
C. 1
D. –1
E. –2

14. Jika $f(x) = 2x+3$ dan $g(x) = x^3+1$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 2$, maka $a = \dots$.

A. 21
B. 18
C. 15
D. 12
E. 9

15. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, x \neq 0$, dan p adalah banyaknya faktor prima dari 210, maka $f^{-1}(p) = \dots$.

A. 4
B. 3
C. 1/3
D. 1/4
E. 1/5

16. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-8}{x-2} - \dfrac{x^2-2x}{2x-4} \right) = \dots$.

A. 5
B. 6
C. 8
D. 9
E. ∞

17. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2+(3-a)x-3a}{x-a} = \dots$.

A. a
B. $a+1$
C. $a+2$
D. $a+3$
E. $a+4$

18. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{2x+1}{2-\sqrt{4x+6}} = \dots$.

A. 4
B. 2
C. 0
D. –1
E. –2

19. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2} = \ldots$.

A. $-1/2$
B. $-1/4$
C. 0
D. $1/4$
E. $1/2$

20. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x-5x^3}{4x^3+6x} = \ldots$.

A. $-3/4$
B. $3/4$
C. $-5/6$
D. $5/6$
E. $1/2$

21. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3x-2-\sqrt{9x^2-2x+5}\right) = \ldots$.

A. $-5/6$
B. $-7/3$
C. $-5/3$
D. $7/3$
E. $5/6$

22. Jika $f(x) = x^2$, maka $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \ldots$.

A. $-4/5$
B. 0
C. $2/5$
D. $5/2$
E. ∞

23. Jika $f(x) = \sqrt{6x+7}$, maka nilai $f\,'(3)$ adalah ... .

A. $2/3$
B. $3/5$
C. $5/7$
D. $7/9$
E. $9/11$

24. Jika $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x}}$, maka $f\,'(x) = \ldots$.

A. $3\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$
B. $5\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$
C. $3\sqrt{x} + \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$
D. $5\sqrt{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$
E. $3\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

25. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{2(5+h)^3-2(5)^3}{h} = \ldots$

A. 0
B. 25
C. 50
D. 125
E. 150

26. Turunan dari $f(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^3$ adalah ...

A. $15(2x+2)^2$
B. $15(x^2 + 2x - 1)^2$
C. $10(x+1)(x^2 + 2x - 1)^2$
D. $30(x+1)(x^2 + 2x - 1)^2$
E. $15(2x+2)^2(x^2 + 2x - 1)^2$

27. Jika $f(x) = \dfrac{2}{x^4 + 1} + \dfrac{3}{x}$, maka $f'(x) = \ldots$.

A. $\dfrac{-8x^3}{(x^4+1)^2} + \dfrac{3}{x}$
B. $\dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2} + \dfrac{3}{x}$
C. $\dfrac{8x^3}{(x^4+1)^2} - \dfrac{3}{x^2}$
D. $\dfrac{-8x^3}{(x^4+1)^2} + \dfrac{3}{x^2}$
E. $\dfrac{-8x^3}{(x^4+1)^2} - \dfrac{3}{x^2}$

28. Persamaan garis singgung pada kurva $y = 1/(x^2 + 4)$ di titik (1, 1/5) adalah ... .

A. $2x + 25y - 7 = 0$
B. $2x + 25y + 7 = 0$
C. $2x - 25y - 7 = 0$
D. $25x + 2y + 7 = 0$
E. $25x + 2y - 7 = 0$

29. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 2/x$ di titik (1, –1) adalah ... .

A. $4x - y - 4 = 0$
B. $4x - y - 5 = 0$
C. $4x + y - 4 = 0$
D. $4x + y - 5 = 0$
E. $4x - y - 3 = 0$

30. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 4x - 5$ yang sejajar dengan garis $y = 2x + 3$ adalah ... .

A. $y - 2x - 10 = 0$
B. $y - 2x + 6 = 0$
C. $y - 2x + 2 = 0$
D. $y - 2x + 8 = 0$
E. $y - 2x + 12 = 0$

31. Pada interval $-1 \le x \le 2$, fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ mempunyai nilai maksimum ... .

A. –6
B. –1
C. 3
D. 6
E. 8

32. Grafik fungsi $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 3x^2$ naik untuk x yang memenuhi ... .

A. $1 < x < 6$
B. $1 < x < 12$
C. $-6 < x < 6$
D. $x < 0$ atau $x > 12$
E. $x < 1$ atau $x > 6$

33. Jika kurva $y = 2x^5 - 5x^4 + 20$ mencapai nilai minimum di titik (*a, b*), maka $a = \ldots$.

A. –1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3

34. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + kx + k = 0$, maka $x_1^2 + x_2^2$ mencapai minimum untuk $k = \ldots$.

A. –1
B. 0
C. 1/2
D. 1
E. 2

35. Jika $f(x) = (1-2x)^3$, maka grafik cekung ke atas untuk ... .

A. $x < 1/2$
B. $x > 1/2$
C. $x < 0$
D. $0 < x < 1/2$
E. $x > 0$

36. Jika $y = x^{1/3}(x+4)^{-2/3}$, maka $dy/dx = \ldots$.

A. $\dfrac{x-4}{3x^{2/3}(x+4)^{5/3}}$

B. $\dfrac{4-x}{3x^{2/3}(x+4)^{5/3}}$

C. $\dfrac{x-2}{3x^{2/3}(x+4)^{5/3}}$

D. $\frac{1}{3}x^{-2/3}(x+4)^{-5/3}$

E. $\frac{5}{9}x^{-2/3}(x+4)^{-5/3}$

37. Titik belok dari grafik fungsi $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ adalah ... .

A. (–2, 3)
B. (–2, 7)
C. (–2, 5)
D. (2, 10)
E. (2, 5)

38. Suatu karton berbentuk persegi dengan sisi *a* cm akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara menggunting keempat pojoknya sebesar *h* cm. Volume kotak maksimum untuk $h = \ldots$.

A. $\frac{1}{2}a$ atau $\frac{1}{6}a$
B. $\frac{1}{3}a$
C. $\frac{1}{4}a$
D. $\frac{1}{8}a$
E. $\frac{1}{6}a$

39. Jika biaya untuk memproduksi dan menjual n satuan barang per minggu adalah $C(n) = 100 + n^2/1.200$ ribu rupiah, maka biaya marginal untuk memproduksi 900 satuan per minggu adalah ... rupiah.

A. 1.500
B. 1.200
C. 3.000
D. 6.000
E. 9.000

40. Dalam memproduksi dan menjual x satuan komoditi tertentu, fungsi harga p dan fungsi biaya C (dalam ribuan rupiah) adalah $p(x) = 5 - 0,002x$ dan $C(x) = 3 + 1,1x$. Tingkat produksi yang menghasilkan keuntungan maksimum adalah ... satuan.

A. 795
B. 597
C. 759
D. 975
E. 957

II. PETUNJUK

Untuk soal nomor 41 sampai dengan nomor 50, kerjakan dengan singkat dan jelas!

41. Jika f mempunyai turunan di c, dengan $c > 0$, hitunglah limit dalam bentuk $f'(c)$:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{\sqrt{x} - \sqrt{c}}$$

42. Hitunglah nilai dari $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{x}} - \sqrt{2-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

43. Biaya operasi sebuah truk adalah $(25 + x/4)$ ribu rupiah per kilometer, apabila truk melaju dengan x km/jam. Sebagai tambahan pengemudi memperoleh Rp12.000,00 per jam. Berapa laju paling ekonomis untuk mengoperasikan truk pada jarak tempuh 400 km, apabila laju jalan raya harus di antara 40 dan 55 kilometer tiap jam?

44. Tentukan titik pada kurva $y = x^3 - 3x + 4$ dan $y = 3(x^2 - x)$ yang mempunyai garis singgung bersama.

45. Tentukan nilai a dan b sehingga (1, 6) adalah titik belok dari grafik fungsi:

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

46. Misalkan diketahui bahwa $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = -1$, $g(2) = 2$, dan $g'(2) = 5$. Carilah tiap nilai berikut.

a. $\dfrac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ di $x = 2$

b. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ di $x = 2$

c. $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ di $x = 2$

47. Suatu proyek akan diselesaikan dalam x hari, dengan biaya proyek per hari $\left(2x + \frac{1.500}{x} - 80\right)$ ribu rupiah. Berapakah biaya minimum dari proyek itu?

48. Misalkan $f(x) = \sqrt{x-2}$ dengan $g = f^{-1}$.
    a. Tentukan g dengan daerah asal dan daerah hasilnya.
    b. Tentukan $g'(x)$.
    c. Nyatakan $g'(x)$ dalam $f'(x)$.

49. Carilah dua bilangan bulat positif sehingga jumlah bilangan pertama dengan empat kali bilangan kedua adalah 1.000 dan hasil kali bilangan tersebut sebesar mungkin.

50. Untuk fungsi harga $p(x) = (182 - x/36)^{1/2}$, carilah banyaknya satuan x yang memaksimumkan pendapatan total.

Daftar Pustaka

Abdul Kodir, et al. 1979. *Matematika untuk SMA, Jilid 8^{s} dan 12*. Jakarta: Departemen Pendidikan dan Kebudayaan.

Alders, C. J. 1962. *Ilmu Ukur Segitiga*. Diterjemahkan oleh Bahar Azis. Jakarta: Noor Komala d/h Noordhoff-Kolff, N. V.

Alders, C. J. 1974. *Ilmu Aljabar*. Diterjemahkan oleh Bahar Azis. Jakarta: Pradnya Paramita.

Anto Dayan. 1991. *Pengantar Metode Statistik*. Jilid 1. Jakarta: LP3ES.

Ayres, F., Jr. 1957. *First Year College Mathematics*. Schaum's Outilne Series. New York: McGraw-Hill Book Company.

Ayres, F., Jr. 1964. *Calculus*. Schaum's Outilne Series. New York: McGraw-Hill Book Company.

Ayres, F., Jr. 1965. *Modern Algebra*. Schaum's Outilne Series. New York: McGraw-Hill Book Company.

Bob Foster. 2006. 1001 $^{\text{Plus}}$ *Soal dan Pembahasan Matematika untuk SPMB*. Jakarta: Erlangga.

Budi Nurochman. 2005. *Teori Ringkas dan Latihan Soal Pembahasan Matematika SMA*. Yogyakarta: Intersolusi Pressindo dan Pustaka Pelajar.

Coleman, A. J. dkk. 1979. *Algebra, Second Edition*. Toronto: Gage Publishing Limited.

Departemen Pendidikan Nasional. 2007. *Kurikulum Mata Pelajaran Matematika untuk Sekolah Menengah Atas*.

Hogg Robert, V dan Craig Allen, T. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. New York: Macmillan Publishing Co. Inc.

Leithold, L. 1986. *The Calkulus with Analytic Geometry, 5th*. Harper & Row, Publishers, Inc.

Lipschutz, S. 1974. *Theory and Problems of Probability, Schaum's Outline Series.* Singapura: McGraw-Hill Internasional Book Company.

Lipschutz, S. 1981. *Set Theory, Schaum's Outline Series.* Singapura: McGraw-Hill Internasional Book Company.

Lipschutz, S. 1983. *Finite Mathematics, Schaum's Outline Series.* Singapura: McGraw-Hill Internasional Book Company.

Nasoetion, Andi Hakim. 1982. *Landasan Matematika*. Jakarta: Bharata karya Aksara.

Nasoetion, Andi Hakim. 1994. M*atematika 1*. Jakarta: Balai Pustaka.

Negoro, ST. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.

Philip, H. (1991). *Maths Exercises for GCSE*. London: Thomas Nelson & Sosns Ltd.

Pinter, C. C. 1970. *Set Theory*. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Purcell, E. J, dkk. 2003. *Kalkulus*. Jilid 1. Alih Bahasa: I Nyoman Susila, Ph.D. Jakarta: Erlangga.

Spiegel, M. R. 1981. *Statistics, Schaum's Outline Series.* Singapura: McGraw-Hill Internasional Book Company.

Spiegel, M. R. 1982. *Probability and Statistics, Schaum's Outline Series.* Singapura: McGraw-Hill Internasional Book Company.

Stewart, J. 1998. *Kalkulus, Edisi Keempat*. Alih Bahasa: Drs. I Nyoman Susila, M.Sc dan Hendra Gunawan, Ph.D. Jakarta: Erlangga.

Soerjadi PA. 1983. *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika.* Bandung: ITB.

Sudjana. 1984. *Metoda Statistika.* Bandung: Tarsito.

Wijdeness, P. dkk. (tt). *Ilmu Aljabar buat Sekolah Menengah, Jilid II.* Jakarta: Noordhoff-Koolff N. V.

Glosarium

absis	:	bilangan pertama dari pasangan berurutan pada sistem koordinat Cartesius.
akar	:	akar pangkat n dari suatu bilangan (n bilangan asli) adalah suatu bilangan yang bila dipangkatkan n menghasilkan bilangan yang ditarik akarnya tersebut. Secara matematika akar pangkat n dari bilangan a adalah bilangan x sedemikian hingga $x^n = a$.
asimtot	:	asimtot suatu garis lengkung adalah garis yang tidak pernah dipotong oleh garis.
data	:	sesuatu yang diketahui atau dianggap.
data kualitatif	:	data yang tidak berbentuk angka.
data kuantitatif	:	data dalam bentuk angka.
derajat	:	satuan ukuran sudut, tekanan udara, dan suhu.
desil	:	ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi 10 bagian yang sama.
diagram	:	gambar yang menyajikan data tentang sesuatu masalah.
diagram lingkaran	:	diagram yang menggunakan daerah lingkaran untuk menggambarkan suatu keadaan.
diameter	:	garis tengah lingkaran atau ruas garis yang melalui titik pusat suatu lingkaran.
dispersi	:	ukuran jauh dekatnya nilai pengamatan dari rata-rata hitungnya.
frekuensi	:	banyaknya nilai muncul.
frekuensi nisbi atau relatif	:	terkaan tentang seringnya suatu data muncul.
frekuensi kumulatif	:	frekuensi yang dijumlahkan.
fungsi	:	fungsi merupakan relasi khusus. Sering disebut juga "Relasi fungsional". Karena itu tidak semua relasi merupakan fungsi. Suatu relasi antara A dan B disebut fungsi apabila setiap unsur (anggota) himpunan A dipasangkan tepat satu unsur (anggota) himpunan B.
fungsi ganjil	:	fungsi f dikatakan ganjil jika berlaku hubungan $f(-x) = -f(x)$.
fungsi genap	:	fungsi f dikatakan genap jika berlaku hubungan $f(-x) = f(x)$.
fungsi identitas	:	suatu fungsi I yang dinyatakan dengan rumus $I(x) = x$.
fungsi invers	:	bila f fungsi dari A ke B yang merupakan korespondensi satu-satu, maka ada fungsi f^{1} dari B ke A sehingga $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$, I fungsi identitas. Fungsi f^{-1} ini disebut fungsi invers dari f.
fungsi konstan	:	suatu fungsi f yang dinyatakan dengan rumus $f(x) = a$, dengan a suatu konstanta.
fungsi kuadrat	:	fungsi f dalam R yang didefinisikan dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan $c \in R$, $a \neq 0$.
fungsi kubik	:	fungsi yang peubah bebasnya berpangkat tiga.
fungsi linear	:	fungsi f yang dinyatakan dengan rumus $f(x) = ax + b$, a dan b konstanta, dan $a \neq 0$.
fungsi onto	:	bila A dan B himpunan-himpunan, maka pemetaan A kepada B adalah fungsi onto, yaitu memasangkan setiap anggota A kepada anggota B, di mana setiap anggota B merupakan bayangan dari sedikitnya satu anggota A.
fungsi satu-satu	:	fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu, jika $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) \neq f(a_2)$.
gradien	:	koefisien arah suatu garis lurus.
grafik	:	gambar-gambar yang menunjukkan secara visual data berupa angka yang biasanya juga berasal dari tabel-tabel yang telah dibuat.

histogram : jenis grafik batangan yang khusus untuk penyajian data yang merupakan tabel distribusi frekuensi.
himpunan : disebut juga "kumpulan, kelompok, gugus, atau set".
invers fungsi : invers fungsi *f* adalah relasi *r* sedemikian hingga $f^{-1} \circ f = I$, dengan *I* fungsi identitas.
jangkauan : ukuran tertinggi dikurangi ukuran terendah.
jari-jari lingkaran : jarak dari pusat lingkaran ke sembarang titik pada lingkaran.
juring : daerah yang dibatasi oleh 2 jari-jari dan satu busur pada suatu lingkaran.
kejadian : kumpulan dari satu atau lebih hasil dari sebuah eksperimen.
kejadian saling bebas : terjadinya dua kejadian yang tidak saling mempengaruhi.
kombinasi : susunan dari beberapa elemen di mana urutan tidak diperhatikan.
koordinat : koordinat Cartesius terdiri atas absis dan ordinat. Absis diwakili oleh titik-titik di sumbu-*x*, dan ordinat diwakili oleh titik-titik di sumbu-*y*.
kuartil : ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi empat bagian yang sama.
lingkaran : kurva tertutup sederhana yang khusus. Tiap titik pada lingkaran itu mempunyai jarak yang sama dari suatu titik yang disebut pusat lingkaran.
limit : nilai pendekatan, $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = L$ mempunyai arti nilai *f(n)* mendekati *L* apabila *n* membesar tak terbatas.
mean : jumlah semua ukuran yang diamati dibagi oleh banyaknya ukuran.
median : nilai yang ada di tengah-tengah sekelompok data, jika nilai-nilai tersebut diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar.
modus : nilai dari sekelompok data yang mempunyai frekuensi tertinggi atau nilai yang paling banyak terjadi (muncul) dalam suatu kelompok nilai.
nilai ekstrim : nilai maksimum atau nilai minimum. Nilai ekstrim ditemukan dalam fungsi nonlinear, misalnya dalam fungsi kuadrat dan fungsi trigonometri.
nilai maksimum : nilai tertinggi.
nilai minimum : nilai terendah.
ordinat : titik-titik yang dikorespondensikan dengan bilangan-bilangan di sumbu-*y* pada sistem koordinat Cartesius.
peubah : disebut juga variabel.
pencerminan : adalah pencerminan dalam arti geometri. Pencerminan disebut juga refleksi, menggambarkan bayangan cermin suatu bangun.
permutasi : suatu pengaturan atau urutan beberapa elemen atau objek di mana urutan itu penting.
persentil : ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi 100 bagian yang sama.
poligon : grafik garis yang diperoleh dengan menghubungkan titik tengah dari setiap batangan pada histogram.
populasi : kumpulan seluruh elemen yang sejenis tetapi dapat dibedakan satu sama lain.
produk Cartesius : hasil kali dari dua himpunan, dinyatakan dengan "X".
range : range dalam statistik disebut jangkauan ialah selisih antara data tertinggi dengan data terendah.
relasi : hubungan. Dua himpunan yang berbeda mungkin mempunyai hubungan. Hubungan (relasi) itu diperlihatkan oleh masing-masing anggota kedua himpunan itu.
sampel : bagian dari populasi.
simpangan baku : akar kuadrat positif dari variansi.
statistik (statistika) : nilai yang diperoleh dari sampel.
tabel : kumpulan angka-angka yang disusun menurut kategori-kategori sehingga memudahkan untuk pembuatan analisis data.
variabel : karakteristik yang menunjukkan variasi atau sesuatu yang nilainya berubah-ubah.
variansi : rata-rata hitung dari kuadrat simpangan setiap pengamatan terhadap rata-rata hitungnya.
volume : ukuran bangun ruang.

Indeks

Kunci Matematika XI IPS SMA

BAB I

STATISTIKA

Uji Kompetensi

1. A
3. B
5. B
7. E
9. D
11. C
13. B
15. B
17. 11 tahun
19. (57,886 – 58,126) kg

BAB II

PELUANG

Uji Kompetensi

1. B
3. D
5. E
7. B
9. B
11. A
13. B
15. A
17. 120
19. 1/10

LATIHAN ULANGAN UMUM SEMESTER 1

1.	B	15.	C
3.	B	17.	A
5.	E	19.	C
7.	A	21.	E
9.	D	23.	D
11.	D	25.	C
13.	D	27.	E
29.	B	41.	a. 4 : 7 b. 120 anak
31.	E		
33.	B	43.	$n = 9$
35.	B	45.	0,02
37.	A	47.	1/4
39.	B	49.	135/466

BAB III

KOMPOSISI FUNGSI DAN INVERS FUNGSI

Uji Kompetensi

1. C
3. C
5. D
7. C
9. B
11. E
13. D
15. C
17. $-4 < x \le 1$ atau $x > 4$
19. a. $P(t) = \sqrt{t + \sqrt{t} + 27}$

    b. $P(25) = \sqrt{57}$

BAB IV

LIMIT FUNGSI

Uji Kompetensi

1.	B	11.	D
3.	C	13.	D
5.	B	15.	C
7.	D	17.	1/3
9.	B	19.	3/4

BAB V

TURUNAN

Uji Kompetensi

1. D
3. B
5. D
7. A
9. A
11. E
13. C
15. A
17. $y' = 5\left(x + 1/x^2\right)^4 (1 - 2/x^3)$
19. $a = -1;$
    $b = 18$

BAB VI

NILAI EKSTRIM FUNGSI DAN TEKNIK MEMBUAT GRAFIK FUNGSI

Uji Kompetensi

1. C
3. D
5. B
7. A
9. C
11. C
13. D
15. B
17. a. Naik: $x < -4$ atau $x > 1$;
    Turun: $-4 < x < 1$
    b. Maksimum = 117, minimum = –8
    c. $(-3/2, 38\frac{3}{4})$
19. Kedua bilangan adalah 6.

LATIHAN ULANGAN UMUM SEMESTER 2

1. E
3. B
5. A
7. A
9. D
11. C
13. C
15. C
17. D
19. D
21. C
23. B
25. E
27. E
29. B
31. C
33. D
35. A
37. C
39. A
41. $2\sqrt{c}\, f\,'(c)$
43. 55 km/jam
45. $a = -3$ dan $b = 7$
47. 700 ribu rupiah
49. 400 dan 125

Wahana

MATEMATIKA 2

Program Ilmu Pengetahuan Sosial

Matematika menurut sifatnya merupakan ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu, maka sebagai ratu matematika mempunyai struktur yang sistematis dan logis tidak dapat dipengaruhi oleh ilmu yang lain, sedangkan sebagai pelayan matematika menyediakan alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada ilmu-ilmu yang lain. Buku ini ditekankan pada cara berpikir sistematis dan logis, di samping menyajikan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Dengan karakteristik ini diharapkan setelah mempelajari buku ini siswa dapat berpikir secara sistematis dan logis untuk mengambil kesimpulan.

Buku ini disusun sesuai dengan kurikulum yang berlaku dan dengan harapan dapat mengembangkan keragaman potensi, minat, kecerdasan intelektual, emosional, spritual, dan kinestetik siswa secara optimal sesuai dengan tingkat perkembangan siswa tersebut. Beberapa keunggulan buku matematika ini adalah sebagai berikut.

1. Materi disajikan secara sederhana, sistematis, inspiratif, dan realistis. Siswa diajak berpikir logis dan melihat aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari.
2. Untuk mempermudah pemahaman konsep materi, buku ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaian. Selain itu, soal-soal pelatihan disajikan dalam berbagai bentuk untuk meningkatkan kemampuan daya pikir, analisis, komunikasi, dan kreativitas.
3. Buku ini dilengkapi dengan math info dan teka-teki matematika.Dengan demikian diharapkan dapat membangkitkan rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika.
4. Buku ini disusun dengan memenuhi kaidah-kaidah tipografi, tata letak, dan pewarnaan yang memenuhi standar "Human Computer Interactive". Hal ini dimaksudkan untuk merangsang minat dalam membaca dan mempelajari materi.

Buku matematika ini peduli dengan proses pendidikan yang dapat diterima dengan baik oleh semua kelompok siswa; kelompok normal (novice), kelompok sedang (intermediate), dan kelompok tinggi (advance). Buku ini berusaha menjadi sarana penunjang yang baik demi kemajuan pendidikan Indonesia.

ISBN 978-979-068-854-4 (No. Jld lengkap)
ISBN 978-979-068-923-7

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 9 Tahun 2009 Tanggal 12 Februari 2009 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp.15.083,-