Sutrima

Budi Usodo

Wahana MATEMATIKA

UNTUK SMA/MA KELAS XI

Program Ilmu Pengetahuan Alam

Program Ilmu Alam

2

PUSAT PERBUKUAN

Departemen Pendidikan Nasional

Sutrima Budi Usodo Wahana MATEMATIKA Program Ilmu Pengetahuan Alam UNTUK SMA/MA KELAS XI

Sutrima
Budi Usodo

Wahana
MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/ Madrasah Aliyah Kelas XI

Program Ilmu Pengetahuan Alam

PUSAT PERBUKUAN
Departemen Pendidikan Nasional

Wahana

MATEMATIKA

Untuk Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah Kelas XI

Program Ilmu Pengetahuan Alam

Penulis	:	Sutrima Budi Usodo
Editor	:	Giyarti
Setting/Lay-out	:	Lilis Handayani
Desain Cover	:	Romiyanto

510.07
SUT SUTRIMA
w
Wahana Matematika 2 : untuk SMA / MA Kelas XI Program Ilmu Pengetahuan Alam / penulis, Sutrima, Budi Usodo ; editor, Giyarti . — Jakarta : Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional, 2009x
ix, 352 hlm, : ilus. ; 25 cm

Bibliografi : hlm. 345
Indeks
ISBN 978-979-068-854-4 (No. Jil. Lengkap)
ISBN 978-979-068-856-8

1. Matematika-Studi dan Pengajaran
I. Judul II. Budi Usodo III. Giyarti

Diterbitkan oleh Pusat Perbukuan
Departemen Pendidikan Nasional
Tahun 2009

Diperbanyak oleh : ...

Kata Sambutan

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Allah SWT, berkat rahmat dan karunia-Nya, Pemerintah, dalam hal ini, Departemen Pendidikan Nasional, pada tahun 2009, telah membeli hak cipta buku teks pelajaran ini dari penulis/penerbit untuk disebarluaskan kepada masyarakat melalui situs internet (*website*) Jaringan Pendidikan Nasional.

Buku teks pelajaran ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan dan telah ditetapkan sebagai buku teks pelajaran yang memenuhi syarat kelayakan untuk digunakan dalam proses pembelajaran melalui Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Nomor 9 Tahun 2009 tanggal 12 Februari 2009.

Kami menyampaikan penghargaan yang setinggi-tingginya kepada para penulis/ penerbit yang telah berkenan mengalihkan hak cipta karyanya kepada Departemen Pendidikan Nasional untuk digunakan secara luas oleh para siswa dan guru di seluruh Indonesia.

Buku-buku teks pelajaran yang telah dialihkan hak ciptanya kepada Departemen Pendidikan Nasional ini, dapat diunduh (*down load*), digandakan, dicetak, dialihmediakan, atau difotokopi oleh masyarakat. Namun, untuk penggandaan yang bersifat komersial harga penjualannya harus memenuhi ketentuan yang ditetapkan oleh Pemerintah. Diharapkan bahwa buku teks pelajaran ini akan lebih mudah diakses sehingga siswa dan guru di seluruh Indonesia maupun sekolah Indonesia yang berada di luar negeri dapat memanfaatkan sumber belajar ini.

Kami berharap, semua pihak dapat mendukung kebijakan ini. Kepada para siswa kami ucapkan selamat belajar dan manfaatkanlah buku ini sebaik-baiknya. Kami menyadari bahwa buku ini masih perlu ditingkatkan mutunya. Oleh karena itu, saran dan kritik sangat kami harapkan.

Jakarta, Juni 2009
Kepala Pusat Perbukuan

Kata Pengantar

Matematika menurut sifatnya merupakan ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu, maka sebagai ratu matematika mempunyai struktur yang sistematis dan logis tidak dapat dipengaruhi oleh ilmu yang lain, sedangkan sebagai pelayan Matematika menyediakan alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada ilmu-ilmu yang lain. Buku ini ditekankan pada cara berpikir sistematis dan logis, di samping menyajikan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Dengan karakteristik ini diharapkan setelah mempelajari buku ini siswa-siswa dapat berpikir secara sistematis dan logis untuk mengambil kesimpulan.

Di dalam setiap awal bab buku ini disajikan tujuan yang hendak dicapai dalam mempelajari pokok bahasan yang bersangkutan dan informasi beberapa syarat yang diperlukan. Penjelasan materi disajikan secara singkat dengan menyertakan beberapa bukti dari sifat atau teorema yang dipandang perlu. Untuk mempermudahkan pemahaman konsep, disajikan juga pembahasan satu atau beberapa contoh soal. Di akhir setiap bab disajikan rangkuman, math info, dan uji kompetensi sebagai evaluasi bagi siswa di dalam memahami suatu konsep. Sebagai refleksi terhadap tingkat penguasaan konsep, setelah mengerjakan uji kompetensi siswa dapat melihat kunci jawaban untuk mengetahui tingkat penguasaan.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan banyak terima kasih kepada semua pihak yang membantu penerbitan buku ini. Semoga buku ini mampu memberikan motivasi belajar bagi Anda dan nilai tambah bagi para pemakainya. Kritik dan saran kepada penulis akan diterima dengan senang hati dan akan penulis perhatikan untuk perbaikan pada edisi berikutnya.

Surakarta, April 2008

Penulis

Petunjuk Penggunaan Buku

Tujuan Pembelajaran

Tujuan pembelajaran mencakup kemampuan dasar yang diharapkan Anda miliki setelah membaca materi pada bab yang bersangkutan.

Pengantar

Pada bagian awal bab dimulai dengan pengenalan masalah nyata (*contextual proplem*) dari materi yang akan dipelajari. Hal ini dimaksudkan untuk memotivasi Anda tentang pentingnya materi yang akan dipelajari.

Materi Bahasan

Meskipun matematika sendiri bersifat deduktif, namun pembelajarannya dapat menggunakan metode induktif. Oleh karena itu agar mudah Anda ikuti, materi bahasan dideskripsikan secara induktif, diawali dari kajian hal yang konkrit ke abstrak, dari sederhana ke kompleks, dan dari mudah ke sulit. Dengan metode ini Anda diharapkan dapat menemukan sendiri konsep, sifat, aturan, atau rumus dalam matematika. Meskipun masih dimungkinkan dengan bimbingan guru.

Contoh dan Pemecahan Masalah

Untuk membantu Anda memahami konsep, sifat, aturan, dan rumus yang telah dikaji dalam materi bahasan, diperlukan contoh soal pemecahan masalah. Contoh soal pemecahan masalah dalam buku ini dibedakan menjadi dua yaitu: mencari nilai suatu besaran yang tidak diketahui yang memenuhi syarat yang ditetapkan dalam soal, dan membuktikan kebenaran atau ketidakbenaran suatu pernyataan.

Soal Latihan

Sebagai evaluasi proses belajar Anda dalam menguasai materi bahasan, pada setiap akhir sub-bab diberikan latihan soal yang sajikan secara bergradasi. Latihan ini juga untuk melatih kecermatan, keakuratan dan kecepatan siswa dalam memecahkan masalah.

Soal Analisis

Soal ini bersifat masalah kontekstual yang berkaitan dengan permasalahan di dunia nyata. Hal ini bertujuan membantu Anda berpikir kritis, yang ditandai dengan keterampilan siswa memahami masalah, memilih pendekatan atau strategi pemecahan, menyelesaikan model matematika yang diperoleh, serta bagaimana menafsirkan solusi terhadap masalah semula.

Tugas Mandiri

Sesuai namanya tugas ini untuk mengevaluasi sejauh mana Anda secara mandiri dapat memecahkan masalah. Soal-soal untuk Tugas Mandiri bersifat terbuka, sehingga Anda dapat mencari jawaban atau strategi penyelesaian yang bervariasi. Tugas ini mendorong Anda untuk memperoleh informasi lebih lanjut dari berbagai sumber lain seperti internet, buku, atau artikel.

Tugas Kelompok

Tugas ini diberikan dengan tujuan untuk melatih Anda berdiskusi, bekerjasama dan berkomunikasi dengan teman Anda. Tugas dapat berbentuk gagasan tertulis, dengan menggunakan narasi, tabel, dan diagram serta lisan.

Math Info

Merupakan informasi tentang matematika untuk meningkatkan cakrawala pengetahuan yang relevan dengan materi bahasan yang bersangkutan.

Rangkuman

Merupakan kumpulan konsep kunci bab yang dinyatakan dengan kalimat ringkas dan bermakna, serta memudahkan Anda untuk memahami isi bab.

Uji Kompetensi

Untuk setiap materi bahasan diakhiri dengan uji kompetensi. Uji kompetensi terdiri atas soal-soal pemecahan masalah, untuk mengevaluasi sejauh mana kompetansi siswa terhadap pemahaman konsep, penggunaan sifat, aturan dan rumus matematika dalam pemecahan masalah yang berakitan dengan materi bahasan. Selain itu soal-soal Latihan Uji Kompetensi diharapkan dapat melatih ketrampilan Anda untuk meningkatkan kemampuan dalam pemecahan masalah.

Aktivitas Proyek

Merupakan kegiatan untuk mengaktifkan serta meningkatkan kreativitas dan kemampuan motorik Anda. Sajian materi memuat tugas observasi, investigasi, eksplorasi, inkuiri atau *hands-on activity*.

Teka-Teki Matematika

Teka-teki matematika bersifat *recreational mathematics* dan bertujuan menimbulkan minat Anda untuk mengkaji lebih jauh tentang matematika.

Latihan Ulangan Umum Semester

Latihan Ulangan Umum Semester terdiri atas soal-soal pemesahan masalah yang meliputi seluruh materi bahasan dalam kurun waktu satu semester atau satu tahun. Terdapat dua jenis soal yang disajikan dalam latihan ulangan umum semester ini, yaitu soal berbentuk pilihan ganda, dan soal berbentuk uraian terstruktur. Soal-soal ini dipersiapkan untuk digunakan sebagai pelatihan Anda dalam menghadapi ulangan umum semester maupun ulangan akhir tahun.

Glosarium

Merupakan kumpulan istilah penting beserta penjelasannya yang dilengkapi dengan nomor halaman kemunculan istilah dan disajikan secara alfabetis.

Indeks

Merupakan kumpulan kata penting, antara lain objek Matematika, nama tokoh atau pengarang, yang diikuti dengan nomor halaman kemunculan dan disajikan secara alfabetis.

Daftar Simbol dan Notasi

$\mathbb{N}$	: himpunan bilangan asli
$\mathbb{R}$	: himpunan bilangan real
$\mathbb{Z}$	: himpunan bilangan bulat
$\lvert a \rvert$	: nilai mutlak atau modulus dari bilangan a
$[\![a]\!]$	: bilangan bulat terbesar atau sama dengan a
D_f	: daerah asal atau domain dari fungsi f
K_f	: daerah kawan atau kodomain dari fungsi f
R_f	: daerah hasil atau range dari fungsi f
$f(A)$	: peta atau bayangan himpunan A oleh fungsi f
f^{-1}	: invers dari fungsi f
x_i	: urutan data ke-i
$x_{\min}$	: statistik minimum
x_{maks}	: statistik maksimum
f_i	: frekuensi dari data x_i
$\bar{x}$	: rataan dari kelompok data $x_1, x_2, \cdots, x_n$
Mo	: modus
Me	: median
Q_i	: kuartil ke-i
D_i	: desil ke-i
P_i	: persentil ke-i
R	: rentang atau *range*
H	: hamparan yang besarnya adalah $Q_3 - Q_1$
Q_d	: semi kuartil atau simpangan kuartil
RS	: rataan simpangan
S	: simpangan baku
S^2	: ragam atau variansi
$P(E)$	: peluang dari kejadian E
$F_h(E)$	: frekuensi harapan kejadian E
E^c	: komplemen kejadian dari E
$f'(c)$	: turunan fungsi f di bilangan c
$f^{(n)}$	: turunan ke-n dari fungsi f
$\dfrac{d^n y}{dx^n}$	: turunan ke-n dari fungsi y

Daftar Isi

BAB I

STATISTIKA

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. membaca dan menyajikan data dalam bentuk tabel dan diagram (diagram batang, diagram garis, diagram lingkaran, diagram kotak garis, diagram batang daun, dan *ogive*),
2. membaca dan menyajikan data dalam bentuk tabel distribusi frekuensi dan histogram,
3. menafsirkan kecenderungan data dalam bentuk tabel dan diagram,
4. menentukan ukuran pemusatan data (rataan, median, dan modus),
5. menentukan ukuran letak data (kuartil, desil, dan persentil),
6. menentukan ukuran penyebaran data (rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku),
7. memeriksa data yang tidak konsisten dalam kelompoknya,
8. memberikan penafsiran terhadap ukuran pemusatan, ukuran letak, dan ukuran penyebaran.

Pengantar

Sumber: www.nytimes

Gambar 1.1 Orang-orang yang terkena virus HIV

Pada suatu kota sudah terjangkit virus HIV. Untuk mengantisipasi semakin meluasnya bahaya tersebut, suatu Lembaga Swadaya Masyarakat (LSM) tentang HIV mencatat setiap orang yang terjangkit virus mematikan itu yang berada di kota tersebut. Setelah beberapa waktu akhirnya diperoleh catatan tentang banyaknya orang yang terkena HIV di kota itu. Untuk mencegah agar tidak semakin meluas bahaya virus itu, LSM tersebut mengamati, mengolah dan menganalisis hasil pencatatan tersebut. Setelah dilakukan penganalisaan yang cermat, LSM tersebut menyimpulkan bahwa penyebab awal menyebarnya virus HIV adalah pergaulan bebas.

Kegiatan di atas adalah contoh sederhana dari suatu aktivitas dari statistika. Apa statistika itu? Apa pula yang dimaksud dengan statistik? Apa perbedaan antara keduanya?

Untuk memahami dan menerapkan tentang dua hal itu, Anda perlu terlebih dahulu mengingat kembali konsep-konsep pada aljabar himpunan dan logika matematika. Setelah itu silakan Anda mengkaji materi bab ini, yang nantinya Anda diharapkan dapat memahami dan menerapkan statistika dalam memecahkan masalah yang muncul dalam kehidupan sehari-hari.

1.1 Populasi, Sampel, dan Data Statistika

Populasi, sampel, dan data merupakan tiga komponen penting dalam statistika. Sebelum membahas apa arti ketiga hal tersebut, kita akan bedakan lebih dahulu tentang pengertian statistik dan statistika.

Statistik adalah himpunan angka-angka mengenai suatu masalah, sehingga memberikan gambaran tentang masalah tersebut. Biasanya himpunan angka tersebut sudah disusun dalam suatu tabel. Misalnya, statistik penduduk, statistik lulusan sekolah, statistik penderita HIV, dan lain sebagainya.

Statistik juga dapat diartikan sebagai ukuran yang dihitung dari sekelompok data dan merupakan wakil dari data tersebut. Misalnya, *rata-rata* nilai ulangan matematika adalah 7,5. Sebanyak *75%* dari siswa kelas XI IPA hobinya sepakbola. Kematian di desa itu *kebanyakan* akibat demam berdarah. Dalam ketiga contoh ini, *rata-rata*, *persentase* dan *kebanyakan* termasuk ke dalam statistik.

Statistika adalah metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data, serta penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional. Aktifitas pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data disebut statistika deskriptif. Sedangkan aktifitas penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional disebut statistika inferensi.

Misalkan ada seorang peneliti ingin meneliti tentang hobi dari seluruh siswa Kelas XI IPA seluruh Indonesia. Seluruh siswa Kelas XI IPA yang akan diteliti atau keseluruhan objek penelitian ini disebut populasi. Namun demikian, dengan keterbatasan dana, tenaga dan waktu tidak mungkin meneliti satu-persatu siswa Kelas XI IPA se-Indonesia. Peneliti dengan cara tertentu cukup mengambil sebagian anggota dari populasi tersebut. Sebagian anggota yang diteliti itu yang disebut sampel. Teknik atau cara pengambilan sampel disebut sampling.

Dalam menyelidiki suatu masalah selalu diperlukan data. Data dapat diartikan sebagai keterangan yang diperlukan untuk memecahkan suatu masalah. Menurut sifatnya data dibagi menjadi dua, yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Data kualitatif adalah data yang berbentuk kategori atau atribut, contohnya : ”Nilai tukar rupiah hari ini mengalami penguatan”. Sedangkan data kuantitatif adalah data yang berbentuk bilangan, contohnya: ”Harga ponsel itu adalah Rp2.500.000,00”. Namum yang akan kita pelajari dalam buku ini adalah khusus data kuantitatif. Menurut cara memperolehnya, data kuantitatif dibedakan menjadi dua macam, yaitu data cacahan dan data ukuran. Data cacahan adalah data yang diperoleh dengan cara mencacah, membilang atau menghitung banyak objek. Sebagai contoh adalah data tentang banyak siswa suatu sekolah yang mempunyai *handphone* (HP). Data ukuran adalah data yang diperoleh dengan cara mengukur besaran objek. Sebagai contoh adalah data tentang tinggi siswa dan data tentang berat siswa suatu sekolah. Tinggi siswa diperoleh dengan mengukur panjangnya, sedangkan berat diperoleh dengan menimbangnya.

Latihan 1.1

1. Apa yang dimaksud dengan:
   a. statistik dan statistika,
   b. data, data kualitatif dan data kuantitatif,
   c. data cacahan dan data ukuran.
2. Manakah sampel dan populasi dari aktivitas-aktivitas berikut ini.
   a. Sekolah memilih 20 siswa dari seluruh siswa untuk mengikuti penyuluhan narkoba.
   b. Pembeli itu mencoba 5 laptop dari 50 *laptop* yang ditawarkan.
   c. Dari satu truk tangki bensin, pengecer membeli 2 dirigen.
3. Seorang peneliti ingin meneliti 10 orang kepala keluarga dari 57 kepala keluarga Desa Suka Rukun. Hasil penelitiannya dituangkan dalam tabel 1.1 berikut.

Tabel 1.1

No. Subjek	Tanggungan Keluarga (orang)	Penghasilan/bulan (dalam rupiah)	Luas Pekarangan (dalam m^2)	Pekerjaan
1	2	500.000	100	buruhkasar
2	2	750.000	120	karyawan pabrik
3	3	1.200.000	250	wiraswasta
4	1	2.000.000	200	wiraswasta
5	4	650.000	150	buruh kasar
6	3	800.000	200	karyawan pabrik
7	5	1.500.000	250	pegawai negeri
8	2	750.000	150	karyawan kantor
9	1	1.200.000	300	pegawai negeri
10	2	2.500.000	300	pengacara

   a. Dari penjelasan di atas manakah sampel dan manakah populasinya?
   b. Manakah yang termasuk data kualitatif dan manakah data kuantitatif?
   c. Manakah yang termasuk data cacahan dan data ukuran?

1.2 Menyajikan Data dalam Bentuk Tabel dan Diagram

Data yang telah kita kumpulkan dari penelitian, apakah itu data cachan atau data ukuran untuk keperluan atau analisis selanjutnya perlu kita sajikan dalam bentuk yang jelas dan menarik. Secara umum, terdapat dua cara penyajian data yaitu dengan tabel (daftar) dan dengan diagram (grafik).

Untuk menyusun sekumpulan data yang urutannya belum tersusun secara teratur ke dalam bentuk yang teratur, data itu disajikan dalam sebuah tabel. Sebuah tabel umumnya terdiri dari beberapa bagian: judul tabel, judul kolom, judul baris, badan tabel, catatan dan sumber data. Kita perhatikan contoh tabel perkiraan cuaca berikut.

Tabel 1.2 Perkiraan Cuaca Kota-kota Besar di Indonesia

Kota	Cuaca	Suhu (°C)	Kelembaban (%)
Ambon	berawan	23 – 33	61 – 95
Bandung	hujan	19 – 29	65 – 95
Denpasar	hujan	25 – 31	73 – 96
Jakarta	hujan	25 – 33	65 – 93
Jayapura	hujan	24 – 33	60 – 90
Makasar	hujan	24 – 33	66 – 90
Medan	hujan	24 – 30	63 – 93
Palembang	hujan	23 – 32	68 – 98
Pontianak	hujan	24 – 33	65 – 96
Semarang	hujan	24 – 32	58 – 92
Surabaya	hujan	24 – 33	56 – 92
Yogyakarta	hujan	24 – 33	58 – 93

Sumber: Seputar Indonesia, 22 Januari 2007

Dari contoh tabel 1.2:

Judul tabel : Perkiraan Cuaca Kota-kota Besar di Indonesia

Judul kolom : Kota, Cuaca, Suhu, dan Kelembaban

Judul baris : Ambon, Bandung, Denpasar, ...

Badan tabel : Data cuaca (berawan, hujan), data suhu, dan data kelembaban

Sumber : Seputar Indonesia, 22 Januari 2007

Dengan menyajikan data seperti itu, kita dapat dengan mudah membaca tabel itu, sebagai contoh; pada hari Senin, 22 Januari 2007, di Kota Denpasar diperkirakan hujan, suhu 25° – 31° , dan kelembaban 73% – 96%.

Contoh 1.2.1

Diberikan data jumlah lulusan dari empat SMA berdasarkan jurusan dan jenis kelamin, yang tertuang dalam tabel berikut.

Tabel 1.3

Sekolah	IPA		IPS		Bahasa		Jumlah
	Laki	Prp	Laki	Prp	Laki	Prp	
SMA 1	15	20	10	17	10	18	90
SMA 2	10	17	14	22	18	18	99
SMA 3	12	12	12	18	18	16	88
SMA 4	18	25	15	15	16	15	104
Jumlah	55	74	51	72	62	67	381

Dari tabel 1.2:

a) Berapakah jumlah lulusan dari SMA 1?
b) Berapa persen jumlah lulusan dari SMA 3?
c) Berapakah jumlah lulusan siswa laki-laki dari Jurusan IPA?
d) Berapa persen jumlah lulusan perempuan?

Penyelesaian:

a) Pada baris pertama dari badan tabel, kita dapat membaca bahwa jumlah lulusan dari SMA 1 adalah 90 siswa.

b) Pada baris ketiga dari badan tabel, kita membaca bahwa jumlah lulusan dari SMA 3 adalah 88 siswa. Sedangkan pada baris terakhir dan kolom terakhir kita peroleh bahwa jumlah seluruh lulusan adalah 381 siswa, sehingga persentase lulusan dari SMA 3 adalah

$$\frac{88}{381} \times 100\% = 23{,}1\%$$

c) Pada kolom pertama dari badan tabel, kita baca bahwa jumlah lulusan siswa laki-laki dari jurusan IPA adalah 55 siswa.

d) Pada kolom ke-1, ke-3 dan ke-5 kita peroleh jumlah lulusan siswa laki-laki adalah

$$55 + 51 + 62 = 168 \text{ siswa,}$$

sehingga persentasenya adalah

$$\frac{168}{381} \times 100\% = 44\%$$

□

Di samping dengan tabel, kelompok data juga dapat kita sajikan ke bentuk diagram atau grafik. Beberapa macam diagram yang biasa digunakan, antara lain: diagram batang, diagram lingkaran, dan diagram garis. Dengan penyajian semacam ini data akan mudah dibaca, dipahami, dan ditafsirkan.

1.2.1 Diagram Batang

Diagram batang adalah diagram yang berdasarkan data kelompok atau kategori, misalnya untuk menyajikan jumlah penduduk di beberapa tempat selang waktu tertentu, jumlah siswa di beberapa daerah pada waktu tertentu, dan sebagainya. Diagram batang dapat kita buat batang vertikal ataupun batang horizontal. Langkah-langkah untuk membuat diagram batang:

- kita buat sumbu mendatar dan sumbu vertikal;
- membuat batang untuk masing-masing jenis kategori dengan lebar sama dan panjang/ tingginya disesuaikan dengan nilai data atau frekuensinya, jarak antara batang yang satu dengan lainnya harus sama;
- setiap batang kita beri warna atau diarsir dengan corak yang sama, kemudian diberi nomor dan judul, sedangkan jika perlu di bawahnya diberi keterangan tentang catatan/ sumbu data.

Contoh 1.2.2

Data jumlah siswa pada setiap tingkat sekolah pada suatu kota pada tahun 2007 diberikan oleh tabel berikut.

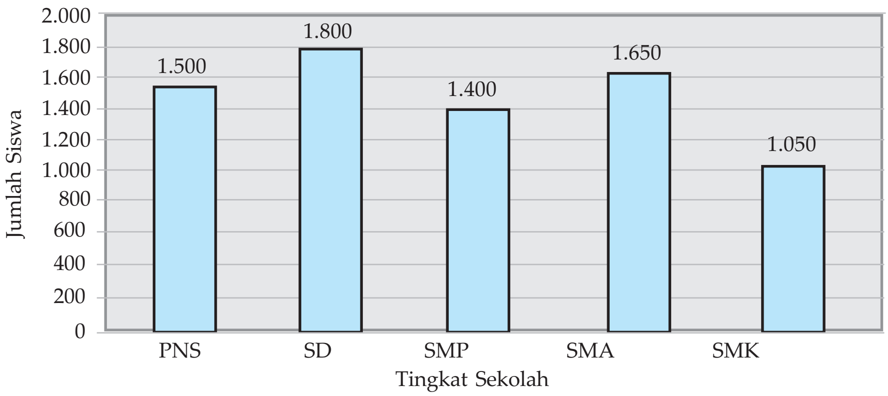
Tabel 1.4

Tingkat Sekolah	Jumlah Siswa
TK	1.500
SD	1.800
SMP	1.400
SMA	1.650
SMK	1.050

Sajikan data di atas ke dalam diagram batang.

Penyelesaian:

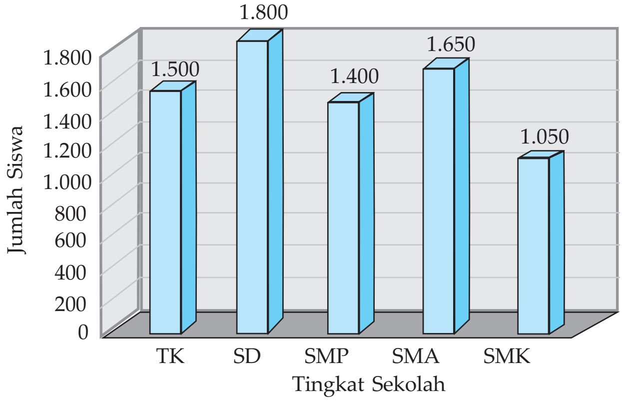
Diagram batang dari data di atas diberikan oleh gambar 1.1 berikut ini.



Gambar 1.2 Diagram batang jumlah siswa tahun 2007

□

Dengan kemajuan teknologi, kita mempunyai perangkat komputer untuk menggambarkan grafik dengan baik dan menarik, misalnya menggunakan *Microsoft Exel,* coba kita ingat kembali pelajaran itu ketika SMP dulu. Sebagai contoh, data pada contoh 1.2.2 dapat kita sajikan diagram batang dengan 3 dimensi.



Gambar 1.3 Diagram batang 3D jumlah siswa tahun 2007

1.2.2 Diagram Lingkaran

Jika bagian dari kelompok data yang satu terkait dengan bagian yang lainnya dalam satu kesatuan, maka kumpulan data itu dapat kita sajikan dalam diagram lingkaran. Misalnya, data tentang umur siswa suatu sekolah, pemakaian kendaraan menuju sekolah atau kantor, latar belakang pendidikan suatu daerah, hobi dari suatu kelompok siswa, dan lain sebagainya.

Telah kita ketahui bahwa besar sudut satu keliling lingkaran adalah 360°, dan luas juring lingkaran sebanding dengan sudut pusatnya. Cara membuat diagram lingkaran adalah lingkaran dibagi menjadi beberapa juring lingkaran yang luasnya proporsional terhadap setiap banyaknya data untuk setiap bagian. Persamaan ini akan sangat membantu kita,

$$\frac{\text{sudut pusat juring}}{360^\circ} = \frac{\text{banyak data diwakili juring}}{\text{total data seluruhnya}} \quad (1.1)$$

Contoh 1.2.3

Misalkan berikut ini adalah data hobi dari 1.200 siswa dari SMA Angkasa,

Tabel 1.5

Hobi	Jumlah Siswa
Sepak bola	300
Bola basket	150
Bola voli	200
Bulu tangkis	250
Karate	100
Lain-lain	200
Jumlah	1.200

Sajikan data di atas ke dalam diagram lingkaran dan tafsirkan.

Penyelesaian:

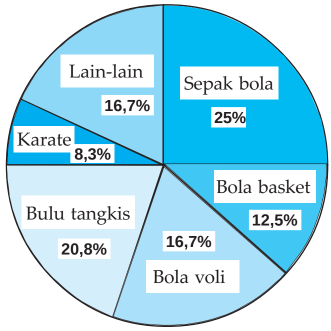
Karena luas juring lingkaran sebanding dengan sudut pusatnya, maka perlu kita tentukan besarnya sudut pusat untuk setiap kategori. Dengan persamaan (1.1) kita peroleh sudut pusat untuk kategori.

$$\text{Sepakbola} \approx \frac{300}{1.200} \times 360° = 90° \qquad \text{Bulu tangkis} \approx \frac{250}{1.200} \times 360° = 75°$$

$$\text{Bola Basket} \approx \frac{150}{1.200} \times 360° = 45° \qquad \text{Karate} \approx \frac{100}{1.200} \times 360° = 30°$$

$$\text{Bola Volly} \approx \frac{200}{1.200} \times 360° = 60° \qquad \text{Lain-lain} \approx \frac{200}{1.200} \times 360° = 60°$$

Dengan hasil ini kita dapat menggambarkan diagram lingkarannya,



Gambar 1.4 Diagram lingkaran hobi siswa SMA Angkasa

Dari diagram lingkaran ini kita dapat menyimpulkan bahwa siswa yang mempunyai hobi sepak bola paling banyak dibandingkan dengan cabang olahraga lainnya. Sedangkan cabang olahraga karate adalah olahraga yang sedikit peminatnya.

□

1.2.3 Diagram Garis

Diagram garis adalah salah satu cara untuk menyajikan data. Dengan diagram garis kita akan lebih mudah membaca data tersebut. Biasanya diagram garis digunakan untuk menyajikan kumpulan data yang diperoleh dari pengamatan dari waktu ke waktu yang berurutan. digambarkan berdasarkan data waktu.

Contoh 1.2.4

Dalam enam bulan pertama tahun 2007, pemakaian daya listrik dari koperasi Sabar Jaya seperti tertuang pada tabel berikut.

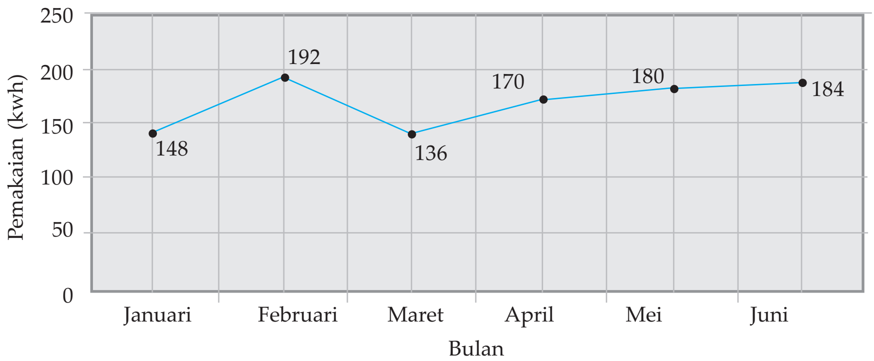
Tabel 1.6

Bulan	Pemakaian (Kwh)
Januari	148
Februari	192
Maret	136
April	170
Mei	180
Juni	184

Sajikan data di atas ke dalam diagram garis dan kemudian tafsirkan.

Penyelesaian:

Data di atas dapat disajikan dengan diagram garis seperti berikut.



Gambar 1.5 Diagram garis pemakaian listrik koperasi Sabar Jaya

Dari diagram garis di atas dapat dibaca dan ditafsirkan, misalkan:

- Pada bulan Januari – Februari pemakaian listrik bertambah dengan kemiringan garisnya positif.
- Pada bulan Februari – Maret pemakaian listrik menurun dengan kemiringan garisnya negatif.
- Dari bulan Maret – Juni pemakaian listrik semakin meningkat dengan kemiringan garisnya positif untuk setiap bulannya, meskipun kemiringan ini masih lebih kecil dibandingkan dengan periode bulan Januari – Februari.

□

Diagram garis dapat pula digunakan untuk memprediksi suatu nilai yang belum diketahui. Terdapat dua pendekatan untuk memprediksi nilai yang belum diketahui ini, yaitu dengan interpolasi linear dan ekstrapolasi linear. Pendekatan interpolasi linear adalah memprediksi suatu nilai data yang berada di antara dua titik yang berdekatan. Sebagai contoh, pada diagram garis Gambar 1.4, kita dapat memprediksi pemakaian listrik Koperasi Sabar Jaya pada pertengahan bulan Februari 2007. Pendekatan ekstrapolasi linear adalah memprediksi suatu nilai data yang terletak sesudah titik data terakhir yang diketahui. Hal ini dapat kita lakukan dengan cara memperpanjang garis ke arah kanan atas atau ke kanan bawah tergantung kepada kecenderungan nilai-nilai sebelumnya. Sebagai contoh, dapat diprediksi berapa banyak pemakaian listrik Koperasi Sabar Jaya pada bulan Juli, Agustus dan seterusnya.

Tugas Kelompok

Kerjakan secara berkelompok. Carilah data yang berhubungan dengan tabel, diagram batang, diagram lingkaran dan diagram garis dari koran, majalah atau internet. Kemudian kumpulkan dalam bentuk kliping lengkap dengan judul, keterangan, sumber informasi. Diskusikan pada kelompok Anda dan berikan penafsiran dari setiap data yang Anda peroleh.

Latihan 1.2

Untuk soal no. 1-2 buatlah diagram batang dan diagram lingkaran dari data yang diberikan, kemudian tafsirkan.

1. Hasil penjualan toko elektronik dari merek tertentu (dicatat dalam unit) selama tahun 2007 adalah:

Tabel 1.7

Jenis Barang	Jumlah
Pompa air	40
Almari es	23
Televisi	38
Kipas angin	52
Seterika listrik	20
VCD	45

2. Hasil panen dari desa Tani Makmur selama setahun diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1.8

Jenis	Jumlah Panen (kuintal)
Padi	2.500
Jagung	1.250
Ubi	1.170
Kedelai	1.650
Kacang tanah	1.800
Semangka	2.000

Untuk soal no. 3 - 4 buatlah diagram garis dari data yang diberikan.

3. Hasil penjualan toko sepeda motor dari merek tertentu (dicatat dalam unit) selama enam tahun terakhir adalah:

Tabel 1.9

Tahun	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Jumlah	252	138	228	312	120	270

4. Data berikut adalah data hasil pemeriksaan suhu tubuh pasien selama dua puluh empat jam.

Tabel 1.10

Jam	Suhu (dalam °C)
06.00	37
09.00	39
12.00	36
15.00	40
18.00	42
21.00	37
24.00	36
03.00	35

5. Berikut ini data perkembangan harga jagung impor Indonesia dari Amerika Serikat selama 8 bulan pada tahun 2007.

Tabel 1.11

Bulan	Harga (dolar AS/ton)
Januari	220
Februari	227
Maret	235
April	217
Mei	226
Juni	235
Juli	230
Agustus	240

Sumber: Kompas, 8 November 2007

Pertanyaan:

a) Dengan bantuan komputer, buatlah diagram garis dari tabel di atas.

b) Tafsirkan dari grafik yang telah Anda buat.

c) Prediksikan harga impor jagung pada bulan September dan Oktober, beri alasan Anda.

1.3 Menyajikan Data dalam Tabel Distribusi Frekuensi

Seringkali kita menjumpai sekumpulan data amatan dalam jumlah atau ukuran yang besar untuk dianalisis. Ukuran data yang besar ini dapat kita sederhanakan dengan cara menentukan banyak nilai amatan yang sama, atau banyak nilai amatan yang terletak pada interval tertentu. Banyak nilai amatan yang sama atau banyak nilai amatan yang terletak pada interval tertentu itu disebut frekuensi.

Tabel yang memuat nilai amatan atau nilai amatan yang terletak pada interval tertentu bersama-sama frekuensinya disebut sebagai tabel distribusi frekuensi. Sebagai konsekuensi dua macam amatan ini, maka kita mempunyai dua macam tabel distribusi frekuensi tunggal dan tabel distribusi frekuensi terkelompok. Dengan menggunakan tabel distribusi frekuensi, data akan lebih mudah digunakan untuk keperluan perhitungan statistik.

1.3.1 Tabel Distribusi Frekuensi Tunggal

Untuk memahami cara membuat tabel ini, kita perhatikan hasil ujian semester mata pelajaran Matematika dari 30 siswa:

80	30	50	70	70	70	40	80	90	50
80	90	70	70	60	60	60	70	50	60
60	60	70	60	60	80	80	80	60	70

Kumpulan data ini secara langsung tidak begitu bermanfaat bagi penafsiran peristiwa-peristiwa yang bersifat kuantitatif, misalnya kita kesulitan mengetahui dengan cepat berapa banyak siswa yang memperoleh nilai di atas 80. Alternatif lain agar kumpulan data di atas mudah ditafsirkan adalah dengan menyusun secara urut mulai dari nilai data terkecil (30) hingga nilai data terbesar (90). Namun cara inipun tidak begitu efektif, karena kita masih kesulitan untuk mengetahui dengan cepat berapa jumlah siswa yang memperoleh nilai di antara 50 hingga 90.

Dari kumpulan data di atas, kita dapat membaca bahwa:
1 siswa mendapat nilai 30
1 siswa mendapat nilai 40
3 siswa mendapat nilai 50
9 siswa mendapat nilai 60
8 siswa mendapat nilai 70
6 siswa mendapat nilai 80
2 siswa mendapat nilai 90

Keterangan-keterangan ini tentu saja akan lebih praktis apabila kita sajikan seperti dalam tabel berikut ini.

Tabel 1.12

Nilai Ujian (x_i)	Turus	Banyaknya Siswa/Frekuensi (f_i)
30	I	1
40	I	1
50	III	3
60	~~IIII~~ IIII	9
70	~~IIII~~ III	8
80	~~IIII~~ I	6
90	II	2

Tabel 1.12 seperti ini selanjutnya disebut tabel distribusi frekuensi tunggal. Dengan tabel ini kita dengan cepat mengetahui berapa banyak siswa yang memperoleh nilai 30, siswa yang memperoleh nilai 40, …, dan seterusnya.

1.3.2 Tabel Distribusi Frekuensi Terkelompok

Jika kita dihadapkan pada kelompok data amatan yang sangat besar, maka pembuatan tabel distribusi frekuensi tunggal juga kurang efektif. Untuk kasus demikian ini akan lebih baik apabila kumpulan data tersebut kita kelompokkan ke dalam beberapa kelas interval lebih dahulu, baru ditentukan frekuensinya.

Bentuk umum tabel distribusi frekuensi terkelompok adalah:

Tabel 1.13

Nilai Data	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)
$a - b$	x_1	f_1
$c - d$	x_2	f_2
$e - f$	x_3	f_3
$g - h$	x_4	f_4
$i - j$	x_5	f_5
		$\sum f_i$

Beberapa istilah yang berkaitan dengan tabel distribusi frekuensi:

- Interval-interval pada kolom pertama dari Tabel 1.13 disebut kelas interval. Tabel 1.13 mempunyai 5 kelas interval, sebagai contoh, $c - d$ disebut kelas interval ke-2. Penentuan jumlah kelas hendaknya jangan terlalu besar dan jangan terlalu kecil. Jika data amatan berukuran n, dan jumlah kelas adalah k, maka Sturges menyarankan hubungan dua bilangan ini,

$$k \approx 1 + 3,3 \log n$$

- Bilangan $a, c, e, g,$ dan i masing-masing disebut batas bawah kelas, sedangkan bilangan $b, d, f, h,$ dan j masing-masing disebut batas atas kelas.
- Tepi bawah adalah batas bawah dikurangi dengan ketelitian data yang digunakan. Tepi atas adalah batas atas ditambah dengan ketelitian pengukuran. Jika data diukur dengan ketelitian sampai satuan terdekat, maka ketelitian pengukuran adalah 0,5, sehingga:

  tepi bawah = batas bawah – 0,5

  tepi atas = batas atas + 0,5

  Tepi bawah sering disebut batas bawah nyata dan tepi atas disebut batas atas nyata.

- Nilai tengah adalah nilai yang terletak ditengah-tengah antara batas bawah dan batas atas kelas interval, sehingga nilainya sama dengan ½(batas bawah +batas atas). Sebagai contoh, nilai tengah kelas interval ke-2 dari Tabel 1.13 adalah x_2 dengan $x_2 = \frac{1}{2}(c+d)$.
- Panjang kelas atau lebar kelas didefinisikan sebagai selisih antara tepi atas dengan tepi bawah, yaitu :

  panjang kelas = tepi atas – tepi bawah.

  Jika panjang kelas adalah p dan jumlah kelas, maka akan memenuhi persamaan

$$p = \frac{\text{nilai data terbesar} - \text{nilai data terkecil}}{k}$$

Dengan memperhatikan komponen-komponen penyusunan tabel distribusi di atas, maka langkah-langkah membuat tabel distribusi frekuensi adalah :

1) Tentukan nilai data terkecil dan nilai data terbesar,
2) Tentukan jumlah,
3) Tentukan panjang kelas,
4) Tentukan kelas-kelas interval dan titik tengahnya,
5) Tentukan frekuensi tiap kelas dengan sistem turus, kemudian susunlah tabel distribusi frekuensi terkelompok seperti tabel 1.13.

Contoh 1.3.1

Misalkan diberikan 80 data amatan dari pengukuran diameter pipa (dalam mm):

70	73	93	90	43	86	65	93	38	76
79	83	68	67	85	57	68	92	83	91
35	72	48	99	78	70	86	87	72	93
63	80	71	71	98	81	75	74	49	74
88	91	73	74	89	90	76	80	88	56
70	77	92	71	63	95	82	67	79	83
84	97	63	61	80	81	72	75	70	90
66	60	88	53	91	80	74	60	82	81

Buatlah tabel distribusi frekuensi dari kelompok data ini.

Penyelesaian:

1) Nilai data terkecil adalah 35 sedangkan nilai data terbesar adalah 99,
2) Menentukan jumlah kelas interval

   Ukuran data adalah $n = 80$,

$$k \approx 1 + 3,3 \log n = 1 + 3,3 \log 80 = 1 + 3,3(1,9) = 7,27$$

   Jumlah kelas yang digunakan 7 atau 8, sebagai contoh kita ambil $k = 7$.
3) Menentukan panjang kelas

$$p = \frac{\text{nilai data terbesar} - \text{nilai data terkecil}}{k} = \frac{99-35}{7} = 9,14$$

   Panjang kelas dapat kita ambil 9 atau 10. Sebagai contoh, kita pilih $p = 10$.
4) Menentukan kelas-kelas interval dan titik tengah

   Karena nilai data terkecil adalah 35, maka 35 kita tetapkan sebagai batas bawah kelas interval pertama (tidak harus demikian). Dengan panjang kelas 10, maka diperoleh kelas-kelas interval beserta titik tengahnya seperti pada tabel 1.14.

Tabel 1.14

Kelas Interval	Titik Tengah
35 – 44	39,5
45 – 54	49,5
55 – 64	59,5
65 – 74	69,5
75 – 84	79,5
85 – 94	89,5
95 – 104	99,5

5) Memasukkan frekuensi dengan sistem turus
Kita masukkan setiap nilai data ke kelas interval yang sesuai dengan sistem turus.

Tabel 1.15

Kelas Interval	Turus	Frekuensi
35 – 44	III	3
45 – 54	III	3
55 – 64	𝍸 II	7
65 – 74	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 III	23
75 – 84	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 I	21
85 – 94	𝍸 𝍸 𝍸 𝍸	20
95 – 104	III	3
Jumlah		80

Dengan demikian kita peroleh tabel distribusi secara lengkap,

Tabel 1.16

Kelas Interval	Titik Tengah	Frekuensi
35 – 44	39,5	3
45 – 54	49,5	3
55 – 64	59,5	7
65 – 74	69,5	23
75 – 84	79,5	21
85 – 94	89,5	20
95 – 104	99,5	3
Jumlah		80

1.3.3 Tabel Distribusi Frekuensi Kumulatif

Dengan tabel distribusi frekuensi terkelompok selanjutnya kita dapat menyusun tabel distribusi frekuensi kumulatif. Terdapat dua macam tabel distribusi frekuensi kumulatif, yaitu tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.

Frekuensi kumulatif kurang dari (f_k kurang dari) didefinisikan sebagai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang kurang dari atau sama dengan nilai tepi atas pada setiap kelas interval, dan dinotasikan dengan $f_k \leq$.

Frekuensi kumulatif lebih dari (f_k lebih dari) didefinisikan sebagai jumlah frekuensi semua nilai amatan yang lebih dari atau sama dengan nilai tepi bawah pada setiap kelas interval, dan dinotasikan dengan $f_k \geq$.

Sebagai ilustrasi, dari tabel distribusi frekuensi terkelompok pada tabel 1.16 kita dapat menyusun tabel distribusi kumulatifnya. Dengan menghapus kolom titik tengah dari tabel 1.16 dan menggantinya dengan kolom tepi bawah dan tepi atas kita peroleh tabel 1.17. Karena ketelitian pengukuran data sampai satuan terdekat, maka $\textit{tepi bawah} = \textit{batas bawah} - 0{,}5$ dan $\textit{tepi atas} = \textit{batas atas} + 0{,}5$.

Tabel 1.17

Kelas Interval	Frekuensi	Tepi Bawah	Tepi Atas
35 – 44	3	34,5	44,5
45 – 54	3	44,5	54,5
55 – 64	7	54,5	64,5
65 – 74	23	64,5	74,5
75 – 84	21	74,5	84,5
85 – 94	20	84,5	94,5
95 – 104	3	94,5	104,5

Selanjutnya dari tabel 1.17 kita memperoleh tabel distribusi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi kumulatif lebih dari berikut ini.

Tabel 1.18-a

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \leq$
$\leq$ 44,5	3
$\leq$ 54,5	6
$\leq$ 64,5	13
$\leq$ 74,5	36
$\leq$ 84,5	57
$\leq$ 94,5	77
$\leq$ 104,5	80

Tabel 1.18-b

Hasil Pengukuran (dalam mm)	Frekuensi Kumulatif $f_k \geq$
$\geq$ 34,5	80
$\geq$ 44,5	77
$\geq$ 54,5	74
$\geq$ 64,5	67
$\geq$ 74,5	44
$\geq$ 84,5	23
$\geq$ 94,5	3

Dengan tabel distribusi kumulatif kurang dari pada tabel 1.18-a, kita dapat membaca sebagai berikut.
- Ada 3 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 44,5 atau kurang.
- Ada 6 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 54,5 atau kurang.
- Ada 13 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 64,5 atau kurang, ... dan seterusnya.

Demikian pula, dengan tabel distribusi kumulatif lebih dari pada tabel 1.18-b, kita dapat membaca sebagai berikut.
- Ada 80 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 34,5 atau lebih.
- Ada 77 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 44,5 atau lebih.
- Ada 74 nilai pengukuran yang mempunyai nilai 54,5 atau lebih, ... dan seterusnya.

Di samping frekuensi kumulatif mutlak seperti di atas, kita kadang-kadang perlu menghitung nilai frekuensi kumulatif relatif dari suatu nilai amatan yang kurang dari atau lebih terhadap suatu batas nilai tertentu. Frekuensi kumulatif relatif dinyatakan dengan persen (%), dengan rumus berikut.

$$\text{Frekuensi kumulatif relatif} = \frac{\text{frekuensi kumulatif}}{\text{ukuran data}} \times 100\%$$

Sebagai contoh:
- frekuensi kumulatif relatif kurang dari 54,5 adalah
$$\frac{6}{80} \times 100\% = 7,5\%,$$
- frekuensi kumulatif relatif kurang dari 64,5 adalah
$$\frac{13}{80} \times 100\% = 16,25\%,$$
- frekuensi kumulatif relatif lebih dari 74,5 adalah
$$\frac{44}{80} \times 100\% = 55\%,$$
- frekuensi kumulatif relatif lebih dari 84,5 adalah
$$\frac{23}{80} \times 100\% = 28,75\%.$$

Makna dari persentase di atas adalah bahwa:
- 7,5% nilai pengukuran letaknya di bawah nilai 54,5,
- 16,25% nilai pengukuran letaknya di bawah nilai 54,5,
- 55% nilai pengukuran letaknya di atas 74,5,
- 28,75% nilai pengukuran letaknya di atas 84,5.

1.3.4 Histogram dan *Ogive*

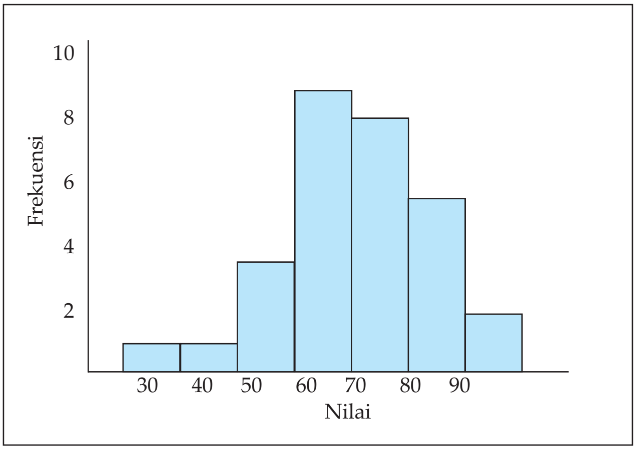
Pada bagian awal kita dapat menyajikan suatu kumpulan data statistik dapat dinyatakan dalam bentuk gambar diagram diagram batang, diagram lingkaran dan diagram garis atau dalam bentuk tabel. Kumpulan data statistik yang telah dianalisis dan disajikan dalam tabel distribusi frekuensi atau tabel distribusi frekuensi kumulatif dapat pula kita sajikan dalam bentuk diagram.

Gambar diagram dari tabel distribusi frekuensi disebut histogram, yang dapat lanjutkan ke gambar poligon frekuensi. Sedangkan diagram dari tabel distribusi frekuensi kumulatif disebut *ogive*.

❖ Histogram

Histogram adalah salah satu cara untuk menyajikan data statistik dalam bentuk gambar. Histogram sering disebut sebagai grafik frekuensi yang bertangga, yang terdiri dari serangkaian pesegi panjang yang mempunyai alas sepanjang interval antara kedua tepi kelas intervalnya dan mempunyai luas yang sebanding dengan frekuensi yang terdapat dalam kelas-kelas interval yang bersangkutan. Bedakan ini dengan diagram batang. Dengan histogram yang baik dan benar, kita dengan mudah dapat membaca data statistik. Cara menggambarnya, antara persegi panjang yang berdekatan berimpit pada satu sisi.

Sebagai contoh, kita perhatikan kembali tabel distribusi frekuensi tunggal pada tabel 1.12. Tabel ini dapat kita sajikan dengan histogram seperti di bawah ini.



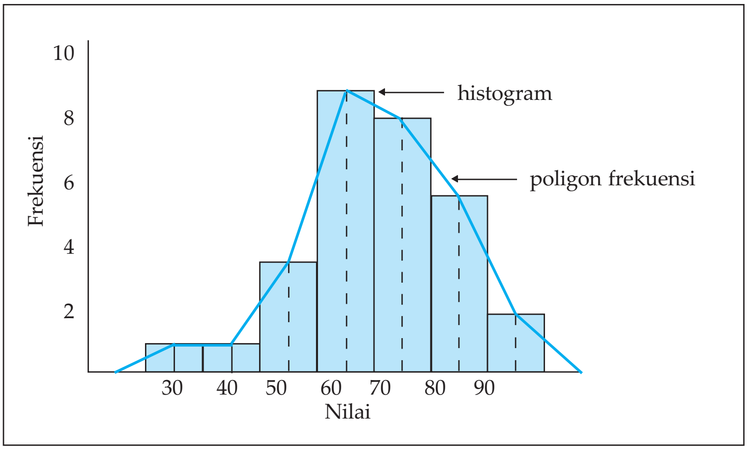
Gambar 1.6 Histogram nilai ujian

Agar diperhatikan di sini, bahwa setiap persegi panjang pada suatu histogram mewakili kelas tertentu, dengan pengertian:

- lebar persegi panjang menyatakan panjang kelas,
- tinggi persegi panjang menyatakan frekuensi kelas dan digambarkan secara vertikal.

Oleh karena itu, jika setiap kelas mempunyai panjang yang sama, maka luas setiap persegi panjang itu berbanding lurus dengan frekuensinya. Selanjutnya, jika setiap titik tengah dari bagian sisi atas persegi panjang pada histogram itu dihubungkan, maka kita peroleh diagram garis. Diagram garis semacam ini disebut poligon frekuensi.

Jika titik-titik tengah dari sisi atas persegi panjang dihubungkan, terjadilah poligon frekuensi, seperti yang terlihat pada gambar 1.7.



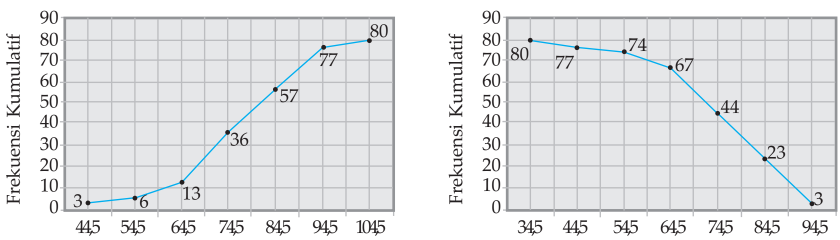
Gambar 1.7 Poligon frekuensi nilai ujian

❖ *Ogive (Ozaiv)*

Telah disebutkan bahwa tabel distribusi frekuensi kumulatif dapat digambarkan diagramnya berupa *ogive.* Karena tabel distribusi frekuensi kumulatif ada dua macam, yaitu tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari, sebagai konsekuensinya kita mempunyai dua macam *ogive*, yaitu *ogive* positif dan *ogive* negatif. Cara adalah dengan menempatkan nilai-nilai tepi kelas pada sumbu mendatar dan nilai-nilai frekuensi kumulatif pada sumbu tegak. Titik-titik yang diperoleh (pasangan nilai tepi kelas dengan nilai frekuensi kumulatif) dihubungkan dengan garis lurus, maka diperoleh diagram garis yang disebut poligon frekuensi kumulatif. Kurva frekuensi kumlatif inilah yang disebut *ogive*.

Sebagai contoh, kita perhatikan kembali tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari pada tabel 1.18.

Kurva frekuensi kumulatif untuk tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari diperlihatkan pada gambar 1.8-a, kurva ini disebut *ogive* positif. Sedangkan kurva frekuensi kumulatif untuk tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari diperlihatkan pada Gambar 1.8-b, dan kurva ini disebut *ogive* negatif.



Gambar 1.8 Ogive *nilai hasil ujian*

Latihan 1.3

1. Dari 20 orang siswa yang mengikuti ulangan sejarah diperoleh nilai sebagai berikut.

81	81	60	60	84	67	81	75	72	75
72	67	87	90	75	81	84	90	81	90

Dari kumpulan data ini,
   a. Tentukan tabel distribusi frekuensi tunggalnya.
   b. Berapa persen siswa yang memiliki nilai :
      (i) 70 atau kurang(ii) 80 atau kurang
   c. Berapa persen siswa yang memiliki nilai
      (i) 75 atau lebih (ii) 85 atau lebih

2. Data tinggi badan (dalam cm) pada suatu RT diberikan oleh data berikut.

Tabel 1.19

Tinggi Badan	Banyak Orang
160,0 – 162,0	8
162,1 – 164,1	11
164,2 – 166,2	15
166,3 – 168,3	12
168,4 – 170,4	10
170,5 – 172,5	6
Jumlah	60

Berdasarkan tabel 1.19 ini,
   a. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan terletak pada kelas interval ke-4 ?
   b. Berapa banyak warga yang mempunyai tinggi badan kurang dari 166,3 cm?
   c. Berapa banyak warga yang mempunyai tinggi badan paling kecil 164,2 cm?
   d. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan kurang dari 168,4 cm?
   e. Berapa persen warga yang mempunyai tinggi badan paling kecil 166,3 cm?

3. Diketahui data terkelompok:

Tabel 1.20

Nilai	Frekuensi
55 – 59	8
60 – 64	14
65 – 69	35
70 – 74	29
75 – 79	9
80 – 84	5

Berdasarkan tabel 1.20 ini,

a. Sebutkan jumlah kelas interval dan sebutkan kelas-kelas interval itu.
b. Tentukan batas bawah dan batas atas untuk setiap kelas interval.
c. Tentukan tepi bawah dan tepi atas untuk masing-masing kelas interval.
d. Tentukan panjang kelas dan titik tengah untuk setiap kelas interval.
e. Tentukan frekuensi dan frekuensi relatif untuk setiap kelas interval.
f. Tentukan kelas interval yang mempunyai frekuensi terbesar dan kelas interval yang mempunyai frekuensi terkecil.

4. Diberikan kumpulan data hasil pengukuran (dalam mm) diameter pipa :

80	72	66	78	66	73	75	69	74	73
74	71	74	72	73	70	70	75	74	79
80	60	74	72	77	74	77	79	79	72
74	74	71	76	72	62	70	67	68	75

Dengan kumpulan data ini :

a. Urutkan kumpulan data di atas mulai dari nilai data terkecil hingga nilai data terbesar.
b. Buatlah tabel distribusi frekuensi dengan panjang kelas interval 3 mm.
c. Dari tabel jawaban b, buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif :
(i) kurang dari (ii) lebih dari.
d. Tentukan frekuensi kumulatif relatif kurang dari :
(i) 70 (ii) 76
e. Tentukan frekuensi kumulatif relatif lebih dari :
(i) 64 (ii) 73

5. Diketahui kumpulan data terkelompok:

Tabel 1.21

Nilai	Frekuensi
42 – 46	1
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	8
67 – 71	4
72 – 76	2

Dari tabel 1.21 ini,

a. Buatlah tabel distribusi frekuensi kumulatif kurang dari dan tabel distribusi frekuensi kumulatif lebih dari.
b. Gambarkan histogram dan poligon frekuensinya.
c. Gambarkan *ogive*nya.

1.4 Ukuran Pemusatan (Tendensi Sentral)

Misalkan diberikan data umur dari 10 siswa calon paskibraka

18	16	15	15	17
16	16	17	18	18

Dari kumpulan data mentah di atas, kita belum dapat menafsirkan atau menyimpulkan apa-apa tentang nilai-nilai data itu. Terdapat tiga nilai statistik yang dapat dipakai untuk menjelaskan tentang kumpulan data tersebut, yaitu rataan, median dan modus. Ketiga nilai ini adalah parameter yang dapat digunakan untuk menafsirkan suatu gejala pemusatan nilai-nilai dari kumpulan data yang diamati. Karena alasan inilah, maka ketiga nilai statistik ini selanjutnya disebut sebagai ukuran pemusatan atau ukuran tendensi sentral.

1.4.1 Rataan (Mean)

Nilai rataan adalah salah satu ukuran yang memberikan gambaran yang lebih jelas dan singkat tentang sekelompok data mengenai suatu masalah, baik tentang sampel atau populasi. Rataan yang diperoleh dari hasil pengukuran sampel disebut statistik, sedangkan rataan yang diperoleh dari populasi disebut parameter. Rataan dibedakan menjadi rataan hitung, rataan ukur dan rataan harmonis. Notasi $\overline{x}$ (dibaca : $x$bar) adalah simbol untuk rataan sampel, sedangkan μ (dibaca : *mu*) adalah notasi rataan untuk populasi. Namun yang akan kita pelajari di dalam buku ini hanyalah rataan hitung dari sampel.

a. Rataan atau Rataan Hitung

Rataan atau rataan hitung dari suatu kumpulan data diberikan sebagai perbandingan jumlah semua nilai data dengan banyak nilai data. Jadi,

$$\text{Rataan} = \frac{\text{jumlah semua nilai data yang diamati}}{\text{banyak data yang diambil}}$$

Untuk data umur dari 10 siswa calon paskibraka di atas, diperoleh

$$\text{rataan} = \frac{18+16+15+15+17+16+16+17+18+18}{10} = \frac{166}{10} = 16{,}6$$

Secara umum, untuk kumpulan dari n data, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, rataan diberikan oleh rumus

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{1.2}$$

dengan:

$\overline{x}$ = menyatakan rataan dari kumpulan data

x_i = nilai data amatan ke-i

n = banyak data yang diamati, atau ukuran data

Notasi $\sum$ (dibaca: sigma) menyatakan penjumlahan suku-suku.

Contoh 1.4.1

Hitunglah rataan dari kumpulan data berikut.

9, 10, 12, 9, 8, 12, 9, 11

Penyelesaian:

Banyak data yang diamati adalah $n = 8$. Dengan menggunakan rumus (1.2),

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

$$= \frac{9+10+12+9+8+12+9+11}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

Jadi, rataan dari kumpulan data di atas adalah $\bar{x} = 10$.

□

Contoh 1.4.2

Rataan nilai ujian matematika dari suatu kelas adalah 6,9. Jika dua siswa baru yang nilainya 4 dan 6 digabungkan dengan kelompok tersebut, maka rataannya menjadi 6,8. Berapa banyaknya siswa kelas semula?

Penyelesaian:

Misalkan banyak siswa kelas semula adalah *n*, sehingga kita peroleh

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 6,9 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i = 6,9\,n$$

Simbol "$\Leftrightarrow$" dibaca "*jika dan hanya jika*". Setelah nilai dua siswa baru digabungkan, maka jumlah siswa sekarang adalah $n + 2$ dengan nilai rataan 6,8. Dalam hal ini kita mempunyai persamaan

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + 4 + 6}{n+2} = 6,8 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i + 10 = 6,8(n+2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i + 10 = 6,8n + 13,6$$

$$\Leftrightarrow 6,9n + 10 = 6,8n + 13,6 \quad \left(\text{subtitusi } \sum_{i=1}^{n} x_i = 6,9\,n\right)$$

$$\Leftrightarrow 6,9n - 6,8n = 13,6 - 10$$

$$\Leftrightarrow 0,1n = 3,6$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{3,6}{10} = 36$$

Jadi, banyaknya siswa semula adalah 36.

□

Kita perhatikan kembali data umur dari 10 siswa calon paskibraka

18	16	15	15	17
16	16	17	18	18

Nilai rataan dari kumpulan data ini adalah:

$$\bar{x} = \frac{18+16+15+15+17+16+16+17+18+18}{10} = \frac{166}{10} = 16,6$$

Bagian pembilang pada perhitungan di atas dapat kita tuliskan dengan

$$2\times15+3\times16+2\times17+3\times18=166$$

Formula ini adalah penjumlahan dari perkalian frekuensi dengan nilai data. Perhatikan tabel 1.22.

Tabel 1. 22

Nilai (x_i)	Banyak Siswa/Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
15	2	30
16	3	48
17	2	34
18	3	54
	$\sum f_i = n = 10$	$\sum f_i \cdot x_i = 166$

Oleh karena itu, rataan dari suatu tabel distribusi frekuensi (tunggal atau terkelompok) dapat ditentukan menggunakan rumus:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} \qquad (1.3)$$

dengan f_i menyatakan frekuensi untuk nilai x_i.

Contoh 1.4.3

Hitunglah nilai rataan dari data berikut.

Tabel 1.23

Nilai Ujian (x_i)	Frekuensi (f_i)
53	8
61	17
72	47
85	32
94	6

Penyelesaian:

Kita lengkapi dahulu tabel distribusi frekuensi di atas.

Tabel 1.24

Nilai Ujian (x_i)	Frekuensi (f_i)	$f_i \cdot x_i$
53	8	424
61	17	1.037
72	47	3.384
85	32	2.720
94	6	560
	$\sum f_i = n = 110$	$\sum f_i \cdot x_i = 8.129$

Dengan menggunakan rumus (1.3) kita peroleh,

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{8129}{110} = 73,9$$

Jadi, nilai rataan data di atas adalah $\bar{x} = 73,9$.

□

Menghitung Rataan dengan Rataan Sementara

Terdapat cara lain yang lebih efektif untuk menghitung rataan untuk data terkelompok, yaitu dengan memilih rataan sementara. Dengan cara ini kita tidak perlu menghitung nilai $\sum f_i x_i$ yang pada umumnya nilainya besar. Rataan sementara yang dipilih adalah titik tengah dari sembarang kelas interval. Misalkan $\bar{x}_s$ adalah rataan sementara yang dipilih, dan d_i adalah simpangan dari setiap nilai titik tengah terhadap $\bar{x}_s$, yaitu $d_i = x_i - \bar{x}_s$. Rataan sebenarnya kita peroleh dengan menjumlahkan rataan sementara dengan simpangan rataan.

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \qquad (1.4)$$

Contoh 1.4.4

Tentukan rataan dengan rataan sementara dari data berikut ini.

Tabel 1.25

Nilai	Frekuensi (f_i)
30 – 34	2
35 – 39	4
40 – 44	10
45 – 49	16
50 – 54	8

Penyelesaian:

Jika kita ambil rataan sementara $\bar{x}_s = 42$, maka dari data di atas diperoleh

Tabel 1.26

Nilai	Titik Tengah (x_i)	Frekuensi (f_i)	Simpangan (d_i)	$f_i \cdot d_i$
30 – 34	32	2	–10	–20
35 – 39	37	4	–5	–20
40 – 44	42	10	0	0
45 – 49	47	16	5	80
50 – 54	52	8	10	80
		$\sum f_i = 40$		$\sum f_i \cdot d_i = 120$

Dalam hal ini $d_1 = 32 - 42 = -10$, $d_2 = 37 - 42 = -5$, $d_3 = 42 - 42 = 0$, dan seterusnya. Dengan demikian,

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} = 42 + \frac{120}{40} = 45$$

□

1.4.2 Modus

Misalkan kita mempunyai kumpulan data:

2	3	5	4	6
4	3	4	8	10

maka nilai data 3 mempunyai frekuensi 2 dan 4 mempunyai frekuensi 3, sedangkan frekuensi yang lainnya 1. Karena 4 mempunyai frekuensi tertinggi maka dalam statistik data 4 disebut modus dari kumpulan data di atas. Jadi, modus (disimbolkan dengan *Mo*) didefinisikan sebagai angka statistik yang mempunyai frekuensi tertinggi.

Contoh 1.4.5

Tentukan modus dari data ulangan matematika berikut.

a) Kumpulan data : 2, 3, 7, 4, 8, 6, 12, 9 tidak mempunyai modus, karena tidak satupun data yang mempunyai frekuensi tertinggi.

b) Kumpulan data : 23, 20, 25, 25, 23, 27, 26 mempunyai modus 23 dan 25.

□

Dari uraian dan contoh di atas kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat data statistik yang tidak mempunyai modus, ada yang mempunyai satu modus, dan ada yang mempunyai lebih dari satu modus.

Untuk data terkelompok, nilai modus ditentukan oleh rumus berikut.

$$Mo = Bb + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right) \tag{1.5}$$

dengan:

Bb = tepi bawah kelas interval yang mempunyai frekuensi tertinggi

b_1 = selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sebelumnya

b_2 = selisih frekuensi tertinggi dengan frekuensi sesudahnya

p = panjang kelas interval

Contoh 1.4.6

Tentukan modus dari data terkelompok berikut.

Tabel 1.27

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)
42 – 48	3
49 – 55	10
56 – 62	20
63 – 69	13
70 – 76	4

Penyelesaian:

Dari kumpulan data di atas kita peroleh

$Bb = 56 - 0.5 = 55{,}5, \qquad b_1 = 20 - 10 = 10, \; b_2 = 20 - 13 = 7$ dan $p = 7$.

Dengan rumus (1.5) kita peroleh modusnya,

$$Mo = Bb + p\left(\frac{b_1}{b_1 + b_2}\right) = 55{,}5 + 7\left(\frac{10}{10+7}\right) = 59{,}62$$

□

1.4.3 Median

Median adalah data yang terletak di tengah setelah data itu disusun menurut urutan nilainya sehingga membagi dua sama besar. Notasi untuk ukuran pemusatan ini adalah *Me*. Nilai *Me* sering dipakai untuk menjelaskan kecenderungan pemusatan data apabila pada data tersebut ditemukan nilai-nilai yang ekstrim, sehingga tidak cukup dijelaskan melalui nilai rataannya saja.

Jika banyak data ganjil, maka *Me* merupakan nilai data yang terletak ditengah-tengah. Misalkan untuk data yang sudah terurut

2, 3, 5, 8, 11, 13, 20,

Me adalah 8.

Jika banyak data genap, maka setelah data diurutkan, *Me* diambil sebagai rataan dari dua data tengah. Misalkan untuk data yang sudah terurut

3, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8,

maka

$$Me = \frac{5+5}{2} = 5$$

Secara umum, jika kita mempunyai n data yang sudah terurut dari yang terkecil hingga yang terbesar,

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

maka median dari kumpulan data itu ditentukan dengan cara berikut.

a. Jika n adalah bilangan ganjil, maka median adalah nilai data ke-$\frac{n+1}{2}$, ditulis $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$.

b. Jika n adalah bilangan genap, maka Me adalah rataan dari nilai data ke-$\frac{n}{2}$ dan nilai data ke-$\frac{n}{2}+1$, ditulis

$$Me = \tfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n+1}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) \qquad (1.6)$$

Contoh 1.4.7

Data penjualan suatu toko *hand phone* dalam dua minggu berturut-turut adalah:
(a) Minggu pertama : 10, 8, 12, 9, 9, 12, 8, 10, 4.
(b) Minggu kedua : 20, 3, 9, 11, 4, 12, 1, 10, 9, 12, 8, 10.
Berapakah median kumpulan data di atas dari setiap minggunya?

Penyelesaian:

(a) Ukuran kumpulan data minggu pertama adalah n = 9 ganjil, dan setelah diurutkan menjadi

4, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 12, 12.

Oleh karena itu, $Me = x_{\frac{n+1}{2}} = x_5 = 9$.

(b) Ukuran kumpulan data minggu kedua adalah n = 12 genap, dan setelah diurutkan menjadi

1, 3, 4, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12, 12, 20.

Jadi, $Me = \tfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right) = \tfrac{1}{2}(x_6 + x_7) = \tfrac{1}{2}(9+10) = 9{,}5$.

□

Untuk data terkelompok, median dapat kita hitung dengan rumus:

$$Me = Bb + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m} \right) \qquad (1.7)$$

dengan:
Bb = tepi bawah kelas interval yang memuat Me
f_m = frekuensi kelas interval yang memuat Me
F = frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat Me
p = panjang kelas interval

Contoh 1.4.8

Hitunglah median untuk data terkelompok berikut.

Tabel 1.28

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frekuensi Kumulatif
42 – 48	3	3
49 – 55	10	13
56 – 62	20	33
63 – 69	13	46
70 – 76	4	50
Jumlah	50	

Penyelesaian:

Karena ukuran datanya adalah 50, maka *Me* terletak pada kelas interval 56 – 62, sehingga

$$Bb = 56 - 0.5 = 55{,}5; \qquad f_m = 20; \quad F = 13; \qquad p = 7.$$

Oleh karena itu,

$$Me = Bb + p\left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f_m}\right) = 55{,}5 + 7\left(\frac{\frac{50}{2} - 13}{20}\right) = 59{,}7$$

□

Latihan 1.4

1. Tentukan rataan dari data berikut.
   a. 9, 7, 12, 6, 14, 8, 10, 11.
   b. 15, 18, 16, 20, 17, 16, 17, 19, 16, 15.
2. Tentukan median dan modus dari data berikut.
   a. 8, 7, 6, 7, 5, 6, 8, 9, 8, 9.
   b. 22, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 22, 23, 24, 25, 27, 25.
3. Tentukan rataan dari data berikut.

a. Tabel 1.29

Nilai	Frekuensi
42 – 46	1
47 – 51	5
52 – 56	5
57 – 61	15
62 – 66	8
67 – 71	4
72 – 76	2
	40

b. Tabel 1.30

Berat	Frekuensi
61 – 65	2
66 – 70	5
71 – 75	8
76 – 80	22
81 – 85	6
86 – 90	5
91 – 95	2
	50

4. Tentukan median dan modus data pada soal no. 3.

5. Hitunglah nilai rataan data terkelompok berikut dengan dua cara.

Tabel 1.31

Kelas Interval	f_i
20 – 24	3
25 – 29	8
30 – 34	13
35 – 39	20
40 – 44	17
45 – 49	9
Jumlah	70

6. Suatu percobaan jenis makanan yang diberikan kepada ayam pedaging memberikan kenaikan berat badan seperti pada tabel berikut.

Tabel 1.32

Minggu ke-	Berat Badan (g)
1	250
2	490
3	990
4	1.890
5	3.790

Berapakah rataan kenaikan berat badan ayam tiap minggu?

7. Nilai rataan kelas A adalah 8,5 dan nilai rataan kelas B adalah 6,5. Perbandingan jumlah siswa kelas $A : B = 5 : 4$. Barapakah nilai rataan kelas A dan B?

8. Tabel di bawah ini adalah hasil tes suatu bidang studi. Peserta dinyatakan lulus jika nilainya lebih besar 60. Berapakah banyak yang lulus?

Tabel 1.33

Nilai	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	8
41 – 50	4
51 – 60	6
61 – 70	8
71 – 80	6
81 – 90	4

9. Nilai rataan ujian matematika dari 40 siswa SMA adalah 70. Jika seorang siswa yang nilainya 100 dan 3 orang siswa yang masing-masing nilainya 30 tidak diikutkan dalam perhitungan, berapa nilai rataannya?

10. Rataan jam belajar harian siswa laki-laki dan perempuan dari suatu sekolah masing-masing adalah 3 jam dan 7 jam. Jika rataan jam belajar harian seluruh siswa sekolah tersebut adalah 6 jam, dan jumlah siswa sekolah tersebut adalah 800 orang, berapakah jumlah siswa laki-laki?

1.5 Ukuran Letak

Pada bagian sebelumnya kita telah mempelajari tentang median. Median adalah nilai statistik yang terletak ditengah-tengah kelompok data setelah data kita urutkan. Dengan demikian nilai ini membagi dua sama banyak keliompok data. Dengan kata lain, median adalah ukuran perduaan.

1.5.1 Kuartil

Telah kita pahami bahwa median adalah ukuran perduaan. Selanjutnya, kita mempunyai 3 buah nilai statistik yang membagi kelompok data yang terurut menjadi 4 bagian yang sama banyak. Ketiga nilai ini kita sebut sebagai kuartil,

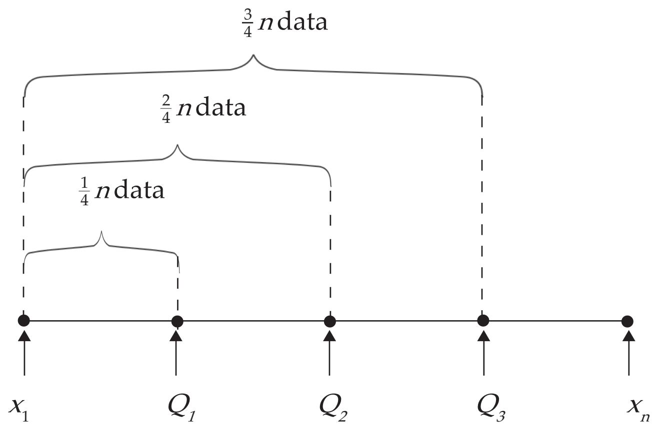
- kuartil pertama atau kuartil bawah dinotasikan dengan Q_1,
- kuartil kedua atau kuartil tengah dinotasikan dengan Q_2, dan
- kuartil ketiga atau kuartil atas dinotasikan dengan Q_3.

Oleh karena itu, *kuartil* adalah ukuran perempatan, dengan $Q_2 = Me$.

Misalkan kita mempunyai suatu kumpulan data dengan ukuran n yang telah diurutkan

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Letak dari kuartil Q_1, Q_2, dan Q_3 dari kumpulan data ini dapat kita cermati ilustrasi pada gambar 1.9 berikut.



Gambar 1.9 Letak Kuartil-kuartil

Dengan memperhatikan gambar di atas, maka dapat kita simpulkan bahwa:

- kuartil pertama Q_1 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{1}{4}(n+1)$,
- kuartil kedua Q_2 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{2}{4}(n+1)$,
- kuartil ketiga Q_3 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{3}{4}(n+1)$.

Secara umum, untuk $i = 1, 2, 3$,

letak kuartil Q_i terletak pada nilai urutan yang ke $\dfrac{i}{4}(n+1)$

Jika nilai urutan yang kita peroleh bukan bilangan asli, maka untuk menghitung kuartil kita gunakan pendekatan interpolasi linear. Untuk lebih jelasnya kita perhatikan contoh berikut.

Contoh 1.5.1

Tentukan nilai kuartil-kuartilnya dari kelompok data:

65, 28, 90, 70, 45, 37, 45, 65, 70, 85.

Penyelesaian:

Kita urutkan dahulu kelompok data tersebut,

$$\begin{array}{cccccccccccc} 28 & 37 & \bullet & 45 & 45 & 65 & \bullet & 65 & 70 & 70 & \bullet & 85 \quad 90. \\ & & \uparrow & & & & \uparrow & & & & \uparrow & \\ & & Q_1 & & & & Q_2 & & & & Q_3 & \end{array}$$

Ukuran kelompok data adalah $n = 10$, maka Q_1 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{1}{4}(10+1) = 2\frac{3}{4}$. Karena nilai urutan bukan bilangan asli, maka Q_1 kita tentukan dengan interpolasi linear,

$$Q_1 = \text{nilai data ke-2} + \tfrac{3}{4}(\text{nilai data ke-3} - \text{nilai data ke-2})$$

$$= 37 + \tfrac{3}{4}(45 - 37) = 43$$

Letak kuartil kedua Q_2 pada nilai urutan yang ke $\frac{2}{4}(10+1) = 5\frac{1}{2}$ (bukan bilangan asli), sehingga

$$Q_2 = \text{nilai data ke-5} + \tfrac{1}{2}(\text{nilai data ke-6} - \text{nilai data ke-5})$$

$$= 65 + \tfrac{1}{2}(65 - 65) = 65$$

Kuartil Q_3 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{3}{4}(10+1) = 8\frac{1}{4}$ (bukan bilangan asli), sehingga

$$Q_3 = \text{nilai data ke-8} + \tfrac{1}{4}(\text{nilai data ke-9} - \text{nilai data ke-8})$$

$$= 70 + \tfrac{1}{4}(85 - 70) = 71\tfrac{1}{4}$$

Makna dari kuartil-kuartil ini adalah bahwa terdapat 25% dari banyak data yang nilainya di bawah 43, terdapat 50% dari banyak data nilainya di bawah 65, dan 75% dari banyak data nilainya di bawah $71\frac{1}{4}$.

□

Untuk data terkelompok kita mempunyai mempunyai rumus yang merupakan pengembangan dari rumus median, yaitu:

$$Q_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{4}n - F}{f_{Q_i}}\right) \qquad (1.8)$$

dengan:

Bb = tepi bawah kelas interval yang memuat Q_i

f_{Q_i} = frekuensi kelas interval yang memuat Q_i

F = frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat Q_i

p = panjang kelas interval

Contoh 1.5.2

Diketahui data terkelompok seperti tabel berikut.

Tabel 1.34

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frek. Kum. (f_k)
10 – 14	2	2
15 – 19	3	5
20 – 24	6	11
25 – 29	7	18
30 – 34	8	26
35 – 39	5	31
40 – 44	11	42
45 – 49	10	52
50 – 54	12	64
55 – 59	4	68
60 – 64	8	76
65 – 69	2	78
70 – 74	2	80
	$\sum f_i = 80$	

Tentukan Q_1 dan Q_3.

Penyelesaian:

Karena ukuran kelompok data adalah $n = 80$, maka Q_1 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{1}{4}(80+1) = 20\frac{1}{4}$, pada kolom frekuensi kumulatif nilai ini terletak pada kelas interval 30 – 34. Dalam hal ini

$$Bb = 29{,}5; \qquad p = 5\,; \qquad F = 18\,; \qquad f_{Q_i} = 8\,.$$

Jadi

$$Q_1 = Bb + p\left(\frac{\frac{1}{4}n - F}{f_{Q_1}}\right) = 29{,}5 + 5\left(\frac{\frac{1}{4}\times 80 - 18}{8}\right) = 30{,}75$$

Kuartil Q_3 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{3}{4}(80+1) = 60\frac{3}{4}$ pada kolom frekuensi kumulatif, yang terletak pada kelas interval 50 – 54. Kita peroleh

$$Q_3 = Bb + p\left(\frac{\frac{3}{4}n - F}{f_{Q3_1}}\right) = 49{,}5 + 5\left(\frac{\frac{3}{4}\times 80 - 52}{8}\right) = 52{,}83$$

Jadi, $Q_1 = 30{,}75$ dan $Q_3 = 52{,}83$.

□

1.5.2 Desil dan Persentil

Jika data yang sudah terurut dibagi menjadi 10 bagian yang sama banyak, maka tiap bagian itu disebut desil, sehingga akan terdapat 9 desil, D_1, D_2, …, D_9. Tetapi jika data itu dibagi menjadi seratus bagian yang sama banyak, maka disebut persentil. Seperti halnya desil, maka ada 99 persentil, P_1, P_2, …, P_{99}.

Seperti halnya pada kuartil, dengan cara yang serupa kita mempunyai rumus untuk menentukan letak desil D_i dan persentil P_i, yaitu:

D_i terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{i}{10}(n+1)$, $i = 1, 2, \cdots, 9$

dan

P_i terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{i}{100}(n+1)$, $i = 1, 2, \cdots, 99$

Seperti halnya pada kuartil, jika nilai urutan yang kita peroleh bukan bilangan asli, maka untuk menghitung kuartil kita gunakan pendekatan interpolasi linear.

Contoh 1.5.3

Diketahui kelompok data tersebar:

7, 9, 12, 12, 12, 16, 18, 21, 21, 22, 23, 23, 23,
28, 28, 29, 32, 33, 34, 35, 35, 35, 35, 38, 39, 40.

Tentukan D_7 dan P_{62}.

Penyelesaian:

Ukuran data adalah n = 26. Desil D_7 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{7}{10}(26+1) = 18\frac{1}{5}$ (bukan bilangan asli), maka untuk menentukan desil kita gunakan pendekatan interpolasi linear,

D_7 = nilai data ke-18 + $\frac{1}{5}$ (nilai data ke-19 – nilai data ke-18)

= 33 + $\frac{1}{5}$ (34 – 33) = 33,2

Persentil P_{62} terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{62}{100}(26+1) = 16\frac{37}{50}$ (bukan bilangan asli), sehingga

$$P_{62} = \text{nilai data ke-16} + \tfrac{37}{50}\,(\text{nilai data ke-17} - \text{nilai data ke-16})$$

$$= 29 + \frac{37}{50}\,(32 - 29) = 30{,}24$$

Makna dari $D_7 = 33{,}2$ adalah terdapat 70% dari banyak data yang nilainya di bawah 33,2. Sedangkan $P_{62} = 30{,}24$ bermakna bahwa 62% dari banyak data nilainya di bawah 30,24.

□

Sedangkan untuk data terkelompok nilai D_i dan P_i diberikan oleh:

$$D_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{10}n - F}{f_{D_i}}\right),\ i = 1, 2, \ldots, 9 \qquad (1.9)$$

dengan:

Bb = tepi bawah kelas interval yang memuat D_i

f_{D_i} = frekuensi kelas interval yang memuat D_i

F = frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat D_i

p = panjang kelas interval

dan

$$P_i = Bb + p\left(\frac{\frac{i}{100}n - F}{f_{P_i}}\right),\ \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, 99 \qquad (1.10)$$

dengan:

Bb : tepi bawah kelas interval yang memuat P_i

f_{P_i} : frekuensi kelas interval yang memuat P_i

F : frekuensi kumulatif sebelum kelas interval yang memuat P_i

p : panjang kelas interval

Contoh 1.5.4

Diketahui data terkelompok dengan dengan distribui seperti berikut.

Tabel 1.35

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)	Frek. Kum. (f_k)
11 – 17	2	2
18 – 24	1	3
25 – 31	4	7
32 – 38	13	20
39 – 45	14	34
46 – 52	17	51
53 – 59	15	66
60 – 66	6	72
67 – 73	3	75
74 – 80	5	80

Hitunglah D_8 dan P_{87}.

Penyelesaian:

Ukuran data adalah n = 80. Nilai D_8 terletak pada nilai urutan yang ke $\frac{8}{10}(80+1)=64\frac{4}{5}$ pada kolom frekuensi kumulatif , yaitu pada kelas interval 53 – 59, sehingga

$$Bb=52{,}5\,; \qquad p=7; \qquad F=51; \qquad f_{D_8}=15;$$

$$D_8 = Bb+p\left(\frac{\frac{8}{10}n-F}{f_{D_8}}\right)=52{,}5+7\left(\frac{64-51}{15}\right)=58{,}56$$

Nilai P_{87} terletak pada kelas interval 60 – 66, karena nilai ini pada kolom frekuensi kumulatif pada urutan ke $\frac{87}{100}(80+1)=70\frac{47}{100}$. Dengan

$$Bb=59{,}5; \qquad p=7; \qquad F=66; \qquad f_{P_{87}}=7;$$

$$P_{87} = Bb+p\left(\frac{\frac{87}{100}n-F}{f_{P_{87}}}\right)=59{,}5+7\left(\frac{69{,}6-66}{7}\right)=63{,}1$$

Jadi, $D_8 = 58{,}56$ dan $P_{87} = 63{,}1$.

□

Latihan 1.5

1. Diketahui data tersebar:

50	21	49	26	60	30	77	37	85	43	45	78
25	69	52	59	29	65	21	72	40	33	77	45

Tentukan Q_3, D_5, dan P_{72}.

2. Nilai ulangan kimia dari 15 orang murid disajikan dalam data berikut.

   7 9 7 5 8 9 5 4 6 6 7 8 7 8 6

   a. Tentukan rataan dan mediannya.
   b. Tentukan Q_1, Q_2, dan Q_3.
   c. Bandingkan nilai rataan terhadap median. Apa yang dapat kamu simpulkan?
3. Jelaskan arti dari $Q_3 = 16$, $D_6 = 63$, dan $P_{78} = 32$?
4. Suatu bilangan terdiri dari 15 unsur. Tentukan pada unsur keberapa letak Q_3, D_6 dan P_{81}?
5. Diketahui tabel distribusi berikut ini.

Tabel 1.36

Kelas Interval	Frekuensi (f_i)
30 – 39	2
40 – 49	12
50 – 59	22
60 – 69	20
70 – 79	14
80 – 89	4
90 – 99	1

   Hitunglah nilai dari Q_3, D_6, dan P_{81}.
6. Hasil tes dari 100 orang pelamar pekerjaan diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1.37

Nilai Tes	53	61	72	85	94
Frekuensi	12	22	25	32	9

   Pelamar yang diterima 45%, berapakah nilai seseorang agar diterima?
7. Berikut ini adalah data besar pengeluaran (dalam ribuan rupiah) untuk internet dalam satu minggu dari 30 orang siswa suatu SMA.

   30 40 35 25 35 50 40 45 40 20
   20 35 45 25 40 30 45 45 25 33
   20 20 20 45 35 34 15 30 25 40

   a. Tentukan kuartil bawah, kuartil tengah dan kuartil atas.
   b. Tentukan desil ke-3 dan desil ke-8.
8. Nilai ekspor-impor (dalam milyar dollar AS) Indonesia melalui Tanjung Priok untuk periode tahun 2001- 2006 diberikan oleh tabel berikut.

Tabel 1.38

Tahun	Ekspor	Impor
2001	17,5	15
2002	17,5	15
2003	18	15
2004	22	22
2005	24	24
2006	26	24

Sumber: Badan Pusat Statistik (BPS), dikutif dari Kompas, 19 Maret 2008.

   a. Tentukan rataan, Q_1, Q_2, dan Q_3 dari data ekspor-impor di atas.
   b. Berdasarkan jawaban (a), bandingkan statistik dari kedua kumpulan data tersebut.

1.6 Ukuran Penyebaran (Dispersi)

Sebagaimana telah kita pelajari pada bagian sebelumnya, nilai rataan merupakan salah satu dari kecenderungan memusat yang banyak dipakai. Meskipun ia adalah wakil dari semua nilai data, tetapi ketepatan nilai itu masih dipertanyakan. Sebagai pelengkap informasi data itu perlu pertimbangan nilai lain. Nilai yang kita maksud adalah nilai penyimpangan, artinya sejauh mana penyimpangan-penyimpangan antara nilai data dengan nilai rataan.

1.6.1 Rentang dan Simpangan Kuartil

Pada data kuantitatif terdapat nilai data terkecil dan nilai data terbesar, kedua nilai masing-masing disebut sebagai statistik minimum (x_{min}) dan statistik maksimum (x_{maks}). Jarak antara kedua nilai itu disebut rentang atau *range* yang diberi simbol "R". Nilai R inilah yang disebut penyebaran dengan rentang,

$$R = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} \tag{1.11}$$

Selain rentang antara kedua nilai ekstrim dalam suatu kelompok data dikenal juga rentang antar-kuartil. Rentang antar-kuartil disebut hamparan (disimbolkan dengan H) didefinisikan sebagai selisih antara nilai Q_3 dengan nilai Q_1,

$$H = Q_3 - Q_1 \tag{1.12}$$

Selain hamparan terdapat nilai penyebaran lain yaitu, semi kuartil atau simpangan kuartil, disimbolkan dengan Q_d, yang didefinisikan sebagai

$$Q_d = \tfrac{1}{2}H = \tfrac{1}{2}(Q_3 - Q_1) \tag{1.13}$$

Dengan Q_d ini kita dapat menjustifikasi suatu data termasuk data yang konsisten (data normal) atau tidak dalam kelompoknya. Setiap nilai data yang terletak di dalam interval $[Q_1 - 3Q_d,\ Q_3 + 3Q_d]$ dikatakan konsisten atau data normal. Nilai data dalam interval ini memiliki informasi yang relatif sama dengan data-data lainnya dalam kelompok tersebut. Setiap nilai data yang terletak di luar interval $[Q_1 - 3Q_d,\ Q_3 + 3Q_d]$ kita katakan tidak konsisten atau data pencilan. Tidak selamanya data yang tidak konsiten dalam kelompoknya itu jelek, justru barangkali data tersebut memberikan informasi yang sangat kita perlukan.

Terdapat beberapa kemungkinan penyebab munculnya data pencilan dalam suatu kelompok data, antara lain :

- Terjadinya kesalahan ketika mencatat data,
- Terjadinya kesalahan ketika melakukan pengukuran, kesalahan membaca alat ukur atau kesalahan menggunakan alat ukur,
- Terjadi memang data itu diperoleh dari objek yang menyimpang atau aneh (anomali).

Contoh 1.6.1

Panitia penerimaan tentara menimbang 14 calon yang masing-masing beratnya (dalam kg):

70	56	61	72	69	67	54
60	65	57	66	62	63	59.

Untuk kumpulan data ini,

a) Tentukan rentang, hamparan, simpangan kuartilnya.

b) Jika salah satu panitia menimbang dua orang calon masing-masing beratnya 45 kg dan 81 kg, apakah kedua nilai data ini konsisten dalam kumpulan data yang diperoleh terdahulu?

Penyelesaian:

Dari kelompok data ini kita peroleh (coba Anda hitung sendiri):

$Q_1 = 59{,}5$; $Q_2 = 62{,}5$; $Q_3 = 67{,}5$; $x_{\text{min}} = 54$; dan $x_{\text{maks}} = 72$.

Berdasarkan hasil ini maka kita peroleh:

a) Rentang $R = x_{\text{maks}} - x_{\text{min}} = 72 - 54 = 18$,

Hamparan $H = Q_3 - Q_1 = 67{,}5 - 59{,}5 = 8$,

Simpangan kuartil $Q_d = \frac{1}{2}H = \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$.

b) Kita tentukan dahulu interval kekonsistenan dari kelompok data ini,

$Q_1 - 3Q_d = 59{,}5 - 12 = 47{,}5$ dan $Q_3 + 3Q_d = 67{,}5 + 12 = 79{,}5$.

Jadi, interval kekonsistenan adalah [47,5 , 79,5]. Karena nilai data 45 dan 81 di luar interval ini maka kedua nilai data tidak konsisten.

□

1.6.2 Diagram Kotak-Garis

Untuk menjelaskan letak relatif ukuran pemusatan median dan ukuran letak dari data dapat ditunjukkan dengan diagram kotak-garis. Diberi nama diagram kotak-garis karena diagram ini tersusun atas sebuah kotak persegi panjang dalam arah horisontal dan garis yang berupa ekor ke kiri dan ke kanan, yang digambarkan di atas garis berskala.

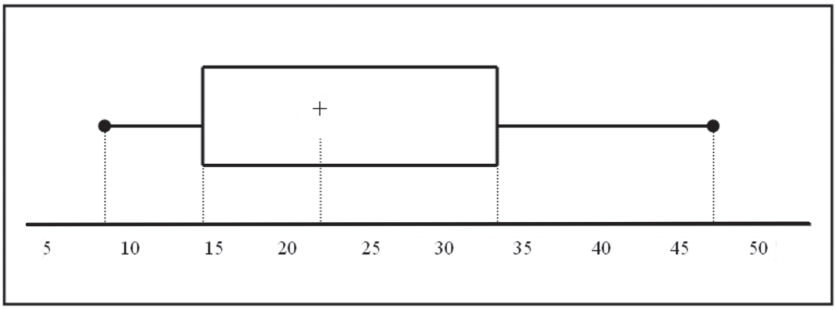
Panjang kotak sama dengan rentang antar-kuartil atau hamparan $H = Q_3 - Q_1$. Sisi tegak bagian kiri kotak menandakan letak dari Q_1 dan sisi tegak bagian kanan menandakan letak kuartil ketiga Q_3. Kuartil kedua atau median Q_2 berada di dalam kotak yang diberi tanda plus (+).

Batas ujung ekor kiri dari garis mendatar arah ke kiri tepat berada pada nilai data terkecil, dan batas ujung kanan dari garis mendatar ke kanan tepat berada pada nilai data terbesar. Ketentuan ini berlaku apabila semua nilai data yang normal (bukan pencilan). Jika kelompok data memuat pencilan, maka pencilan itu berada di luar kedua garis dan diberi tanda asteris (*).

Untuk memahami penyusunan diagram kotak-garis, kita perhatikan contoh berikut ini. Misalkan diketahui kelompok data tersebar yang berukuran $n = 20$.

9	9	10	13	14	17	19	19	21	22
23	25	25	29	33	35	35	39	43	47

Dari kelompoak data ini kita peroleh nilai $Q_1 = 14\frac{3}{4}$, $Me = Q_2 = 22\frac{1}{2}$ dan $Q_3 = 34\frac{1}{2}$. Diagram kotak-garis diperlihatkan pada gambar 1.10.



Gambar 1.10 Diagram kotak-garis

Sisi kiri dari kotak menandakan letak dari $Q_1 = 14\frac{3}{4}$, tanda (+) menandakan letak $Me = Q_2 = 22\frac{1}{2}$, dan sisi kanan kotak menandakan letak dari $Q_3 = 34\frac{1}{2}$.

Ekor ke kanan lebih panjang menyatakan bahwa nilai-nilai di atas Q_3 lebih beragam. Sedangkan ekor lebih pendek menggambarkan bahwa nilai-nilai di bawah Q_1 mengumpul di sekitar data terkecil dan Q_1.

Diagram kotak-garis dapat digambarkan secara bertingkat untuk menjelaskan dua kelompok data sekaligus pada garis skala yang sama.

Contoh 1.6.2

Berikut ini adalah kumpulan data yang diperoleh dari hasil penimbangan berat badan terhadap 30 calon tentara, yang dilakukan oleh dua orang panitia: penerimaan tentara menimbang 14 calon Hasil penimbangan Panitia A (dalam kg):

70	56	61	72	69	67	54	45
60	65	57	66	62	63	59.	

Hasil penimbangan Panitia B (dalam kg):

60	56	61	58	46	67	54	65
65	60	64	57	62	63	59.	

Penyelesaian:

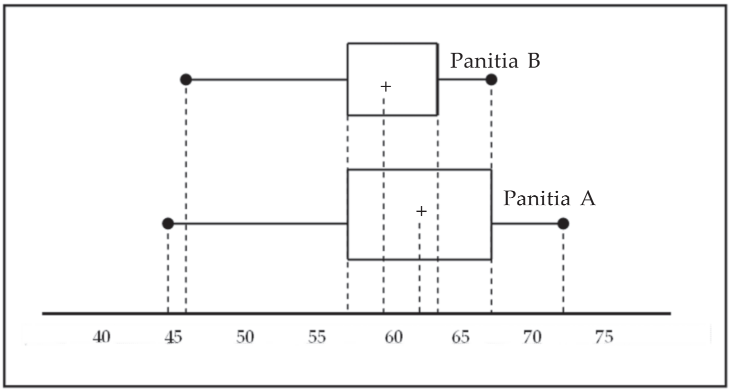
Kelompok data dari Panitia A mempunyai:

$Q_1 = 57$; $Q_2 = 62$; $Q_3 = 67$; $Q_d = 5$; $x_{\min} = 45$; dan $x_{\text{maks}} = 72$.
Semua nilai data konsisten, kenapa? Jelaskan.

Kelompok data dari Panitia B mempunyai:

$Q_1 = 57$; $Q_2 = 60$; $Q_3 = 64$; $Q_d = 3$; $x_{\min} = 46$; dan $x_{\text{maks}} = 67$.

Nilai data 46 tidak konsisten, sehingga nilai ini adalah data pencilan, kenapa? Jelaskan.



Gambar 1.11 Diagram kotak-garis

□

1.6.3 Rataan Simpangan, Ragam, dan Simpangan Baku

Jika kita mempunyai data $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan rataan $\overline{x}$, maka kita dapat menentukan selisih dari setiap data dengan $\overline{x}$, sehingga diperoleh urutan data baru:

$$(x_1 - \overline{x}), (x_2 - \overline{x}), \ldots, (x_n - \overline{x})$$

Urutan data itu tentu ada yang positif atau negatif. Karena jarak atau selisih tidak membedakan nilai yang bertanda positif atau negatif, maka nilai data itu dapat kita ambil harga mutlaknya,

$$|x_1 - \overline{x}|, |x_2 - \overline{x}|, \ldots, |x_n - \overline{x}|$$

Jika urutan data di atas kita jumlahkan kemudian kita bagi dengan ukuran data (n), akan kita peroleh apa yang disebut rataan simpangan (RS),

$$RS = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n} \qquad (1.14)$$

dengan:

RS = rataan simpangan x_i = nilai data amatan ke-i

$\overline{x}$ = rataan n = ukuran data

Untuk data terkelompok rataan simpangan dirumuskan dengan

$$RS = \frac{\sum f_i |x_i - \overline{x}|}{\sum f_i} \qquad (1.15)$$

dengan:

RS = rataan simpangan x_i = titik tengah kelas interval ke-i

$\overline{x}$ = rataan f_i = frekuensi dari kelas interval ke-i

Kelemahan dari nilai rataan simpangan adalah kita bekerja dengan bilangan harga mutlak, sehingga kita tidak dapat membedakan data yang mempunyai rentang yang lebih besar dengan rentang yang kecil meskipun mempunyai rataan simpangan yang sama. Sebagai contoh,

$$\frac{|-2|+|-7|+|4|}{3}=\frac{13}{3},$$

rentang data adalah 11. Tetapi lain halnya,

$$\frac{2+7+4}{3}=\frac{13}{3},$$

yang mempunyai rentang 5.

Untuk mengatasi kelemahan rataan simpangan, kita menggunakan simpangan baku, yang dinotasikan dengan S. Kuadrat dari simpangan baku disebut ragam atau variansi.

Misalkan $\overline{x}$ adalah rataan dari kelompok data, , $x_1, x_2, \ldots, x_n$, maka ragam atau variansi dari kumpulan data itu ditentukan oleh rumus:

$$S^2=\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n} \qquad (1.16)$$

dengan:

S^2 = ragam atau variansi $\qquad$ x_i = nilai data amatan ke-i

$\overline{x}$ = rataan $\qquad$ n = ukuran data

Sedangkan simpangan baku atau deviasi baku didefinisikan sebagai akar dari ragam, sehingga

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i-\overline{x})^2}{n}} \qquad (1.17)$$

Untuk data terkelompok simpangan baku diberikan oleh

$$S=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\overline{x})^2}{n}} \qquad (1.18)$$

dengan:

S = simpangan baku $\qquad$ x_i = titik tengah kelas interval ke-i

$\overline{x}$ = rataan $\qquad$ f_i = frekuensi kelas interval ke-i

Tugas Mandiri

Dengan menguraikan suku $(x_i-\overline{x})^2$, tunjukkan bahwa rumus simpangan baku (1.17) dapat dituliskan sebagai

$$S=\sqrt{\frac{\sum(x_i)^2-n(\overline{x})^2}{n}}$$

Contoh 1.6.4

Misalkan diketahui data tersebar:
35, 47, 39, 45, 40, 32, 42.
Tentukan: rataan simpangan, ragam dan simpangan bakunya.

Penyelesaian:

Dengan rumus (1.14) kita memperoleh rataan simpangan

$$RS = \frac{|32-40|+|35-40|+|39-40|+|40-40|+|42-40|+|45-40|+|47-40|}{7} = \frac{28}{7} = 4 .$$

Sedangkan ragam yang dapat kita peroleh dari rumus (1.20) adalah

$$S^2 = \frac{(32-40)^2+(35-40)^2+(39-40)^2+(40-40)^2+(42-40)^2+(45-40)^2+(47-40)^2}{7}$$

$$= \frac{168}{7} = 24$$

Jadi, simpangan bakunya adalah $S = \sqrt{24} = 4,9$.

□

Contoh 1.6.5

Hitung rataan simpangan dari kelompok data berikut.

Tabel 1.39

Kelas Interval	f_i
30 – 34	2
35 – 39	6
40 – 44	10
45 – 49	16
50 – 54	6
	$\sum f_i = 40$

Penyelesaian:

Kita gunakan rumus (1.15),

Tabel 1.40

Kelas Interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
30 – 34	2	32	64	–12,25	12,25	24,5
35 – 39	6	37	222	–7,25	7,25	43,5
40 – 44	10	42	420	–2,25	2,25	22,5
45 – 49	16	47	752	2,75	2,75	44
50 – 54	6	52	312	7,75	7,75	46,5
Jumlah	40		1.770			181

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1770}{40} = 44,25 ; \qquad RS = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum f_i} = \frac{181}{40} = 4,525$$

Jadi, rataan simpangan adalah 4,525.

□

Contoh 1.6.6

Tentukan ragam dan simpangan baku dari kelompok data pada contoh 1.6.5.

Penyelesaian:

Untuk menghitung ragam dan simpangan baku, kita gunakan rumus (1.16) dan (1.17),

Tabel 1.41

Kelas Interval	f_i	x_i	$f_i \cdot x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i\,(x_i - \bar{x})^2$
30 – 34	2	32	64	–12,25	150,06	300,12
35 – 39	6	37	222	–7,25	52,56	315,36
40 – 44	10	42	420	–2,25	5,06	50,6
45 – 49	16	47	752	2,75	7,56	120,96
50 – 54	6	52	312	7,75	60,06	360,36
Jumlah	40		1.770			1.147,4

Kita peroleh,

$$S^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1147,4}{40} = 28,685 \text{ dan } S = 5,36$$

Jadi, ragam S^2 = 28,685 dan simpangan baku S = 5,36.

□

Seperti pada perhitungan rataan yang dapat kita lakukan dengan menentukan lebih dahulu rataan sementara, simpangan baku dapat pula kita hitung dengan cara ini. Dengan metode ini, kita gunakan rumus

$$S = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2} \qquad (1.19)$$

dengan:

S = simpangan baku

f_i = frekuensi kelas interval ke-i

d_i = $x_i - \bar{x}$

Contoh 1.6.7

Tentukan simpangan baku data pada contoh 1.6.6 dengan rataan sementara 42.

Penyelesaian:

Kita gunakan rumus (1.18)

Tabel 1.42

Kelas Interval	f_i	x_i	d_i	$f_i \cdot d_i$	$f_i \cdot d_i^2$
30 – 34	2	32	–10	–20	200
35 – 39	6	37	–5	–30	150
40 – 44	10	42	0	0	0
45 – 49	16	47	5	80	400
50 – 54	6	52	10	60	600
Jumlah	40			90	1.350

$$S=\sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{n}-\left(\frac{\sum f_i d_i}{n}\right)^2}=\sqrt{\frac{1350}{40}-\left(\frac{90}{40}\right)^2}=5,36$$

Jadi, simpangan bakunya adalah S = 5,36, yang sama seperti pada contoh 1.6.6.

□

Latihan 1.6

1. Hitung rentang, simpangan kuartil, rataan simpangan, dan simpangan baku dari kelompok data berikut.

   a. Tabel 1.43

Nilai	3	4	5	6	7	8	9
Frekuensi	1	3	4	5	3	3	1

   b. Tabel 1.44

Tinggi	60	65	70	75	80	85	90
Banyak Anak	1	2	8	6	3	3	7

2. Hitung rataan simpangan dan simpangan baku dari data terkelompok berikut.

   a. Tabel 1.45

Tinggi	f_i
151 – 155	5
156 – 160	8
161 – 165	22
166 – 170	12
171 – 175	3

   b. Tabel 1.46

Kelas Interval	f_i
51 – 55	2
56 – 60	5
61 – 65	9
66 – 70	6
71 – 75	3

3. Hitung simpangan baku dari data-data pada soal no.2 dengan memakai rataan sementara.
4. Panjang papan diukur lima kali pengukuran dengan hasil pengukuran berbeda-beda, yaitu 12,01 m, 11,97 m, 12,14 m, 11,97 m, 12,00 m. Tentukan interval yang memuat panjang papan sebenarnya.
5. Tentukan nilai data yang tidak konsisten dalam kelompoknya kelompok data berikut ini.
   a. 4, 5, 5, 7, 8, 4, 6, 6, 9, 3, 9, 12, 20, 10.
   b. 20, 25, 26, 28, 30, 32, 33, 33, 32, 28, 29, 30, 30, 30.
6. Tentukan nilai data yang tidak konsisten dalam kelompoknya, dari data pada soal 2.

7. Berikut ini adalah data hasil panen (dalam kwintal) dari seorang peternak ayam selama tahun 2007.

Tabel 1.47

Bulan	TV Merpati	TV Rajawali
Januari	100	95
Februari	102	98
Maret	102	99
April	105	103
Mei	106	105
Juni	107	106
Juli	107	106
Agustus	108	108
September	110	109
Oktober	115	110
november	116	111
Desember	116	115

a. Buatlah diagram kotak-garis bersama dari dua kelompok data tersebut.
b. Bandingkan karakteristik dari kelompok data tersebut.

Rangkuman

1. Statistika adalah metode ilmiah yang mempelajari pengumpulan, pengaturan, perhitungan, penggambaran dan penganalisaan data, serta penarikan kesimpulan yang valid berdasarkan penganalisaan yang dilakukan dan pembuatan keputusan yang rasional.
2. Statistika dibedakan menjadi dua, statistika deskriptif dan statistika inferensi.
3. Populasi adalah keseluruhan anggota obyek penelitian. Sampel adalah wakil dari anggota populasi yang diteliti langsung. Sampling adalah teknik atau cara pengambilan sampel.
4. Menurut sifatnya data dibedakan menjadi dua, yaitu data kualitatif dan data kuantitatif. Data kuantitatif dibedakan menjadi dua, data cacahan dan data ukuran.
5. Data dapat diasjikan dalam tabel atau diagram. Macam diagram: diagram batang, lingkaran, garis, diagram batang daun, digram kotak-garis, histogram, dan *ogive*.
6. Ukuran pemusatan (tendensi sentral) adalah rataan atau mean ($\overline{x}$), median (*Me*), dan modus (*Mo*). Rataan adalah jumlah semua nilai data yang diamati dibagi oleh ukuran data. Median adalah titik tengah data setelah data diurutkan. Modus adalah data yang sering muncul.
7. Termasuk ukuran letak adalah kuartil, desil, dan persentil. Kuartil adalah ukuran perduaan, desil adalah ukuran persepuluhan, dan persentil adalah ukuran perseratusan.
8. Termasuk ukuran penyebaran (dispersi) adalah rentang, simpangan kuartil, dan simpangan baku.

Math Info

Penggunaan istilah statistika berakar dari istilah istilah dalam aljabar fungsi aturan pencacahan. Bahasa latin moderen statisticum collegium ("dewan negara") dan bahasa Italia statista ("negarawan" atau "politikus").

Gottfried Achenwall (1749) menggunakan Statistik dalam bahasa Jerman untuk pertama kalinya sebagai nama bagi kegiatan analisis data kenegaraan, dengan mengartikannya sebagai "ilmu tentang negara (state)". Pada awal abad ke-19 telah terjadi pergeseran arti menjadi "ilmu mengenai pengumpulan dan klasifikasi data". Sir John Sinclair memperkenalkan nama (Statistics) dan pengertian ini ke dalam bahasa Inggris. Jadi, statistika secara prinsip mula-mula hanya mengurus data yang dipakai lembaga-lembaga administratif dan pemerintahan. Pengumpulan data terus berlanjut, khususnya melalui sensus yang dilakukan secara teratur untuk memberi informasi kependudukan yang berubah setiap saat.

Gambar 1.12 Sir John Sinclair

Sumber: sinclair.quarterman.org

Pada abad ke-19 dan awal abad ke-20 statistika mulai banyak menggunakan bidang-bidang dalam matematika, terutama probabilitas. Cabang statistika yang pada saat ini sangat luas digunakan untuk mendukung metode ilmiah, statistika inferensi, dikembangkan pada paruh kedua abad ke-19 dan awal abad ke-20 oleh Ronald Fisher (peletak dasar statistika inferensi), Karl Pearson (metode regresi linear), dan William Sealey Gosset (meneliti problem sampel berukuran kecil). Penggunaan statistika pada masa sekarang dapat dikatakan telah menyentuh semua bidang ilmu pengetahuan, mulai dari astronomi hingga linguistika. Bidang-bidang ekonomi, biologi dan cabang-cabang terapannya, serta psikologi banyak dipengaruhi oleh statistika dalam metodologinya. Akibatnya lahirlah ilmu-ilmu gabungan seperti ekonometrika, biometrika (atau biostatistika), dan psikometrika.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Dari rataan, median, modus, dan kuartil yang merupakan ukuran pemusatan adalah ... .
   A. rataan, median, dan modus
   B. rataan median, dan kuartil
   C. rataan, modus, dan kuartil
   D. median, modus, dan kuartil
   E. rataan median, modus, dan kuartil

2. Simpangan kuartil dari data:

   $$5 \quad 6 \quad a \quad 3 \quad 7 \quad 8$$

   adalah $1\frac{1}{2}$. Jika median data adalah $5\frac{1}{2}$, maka rataan data adalah ... .
   A. 4   D. $4\frac{1}{2}$
   B. $5\frac{1}{2}$ E. 6
   C. 5

3. Rata-rata penghasilan setiap hari dari penduduk di desa Ramah Hati adalah Rp25.000,00. Yang dimaksud dengan kata rata-rata dalam kalimat ini adalah ... .
   A. median   D. kuartil
   B. modus   E. jangkauan
   C. rataan

4. Jika diberikan data statistik median = 76 dan modus = 73, maka ... .
   A. 50% data bernilai 76 dan 50% lagi bernilai 73
   B. umumnya data bernilai 73 sedangkan nilainya 50% saja yang bernilai 76
   C. 50% data bernilai di atas 76 dan 50% lagi bernilai di bawah 73
   D. umumnya data bernilai 76 sedangkan nilainya 50% saja yang bernilai 73
   E. 50% data bernilai di atas 76 dan 50% lagi bernilai di bawahnya tetapi pada umunya bernilai 73

5. Rataan nilai dari 20 bilangan adalah 14,2. Jika rataan dari 12 bilangan pertama adalah 12,6 dan rataan dari 6 bilangan berikutnya adalah 18,2, maka rataan 2 bilangan terakhir adalah ... .
   A. 10,4   D. 12,8
   B. 11,8   E. 13,4
   C. 12,2

6. Pada ulangan matematika, rataan kelas adalah 58. Jika rataan nilai matematika untuk siswa pria adalah 65 sedang untuk siswa wanita rataannya 54, maka perbandingan jumlah siswa pria dan wanita pada kelas itu adalah ... .
   A. 11 : 7   D. 7 : 15
   B. 4 : 7   E. 9 : 12
   C. 11 : 4

7. Suatu data dengan rataan 16 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikalikan dengan p kemudian dikurangi dengan q diperoleh data baru dengan rataan 20 dan jangkauan 9, maka nilai $2p + q = \dots$.

A. 3
B. 4
C. 7
D. 8
E. 9

8. Tahun yang lalu gaji permulaan 5 orang karyawan dalam ribuan rupiah adalah ... .

480 360 650 700260

Tahun ini gaji mereka naik 15% bagi yang sebelumnya bergaji kurang dari Rp500.000,00 dan 10% untuk yang sebelumnya bergaji lebih dari Rp500.000,00. Rataan besarnya kenaikan gaji mereka per bulan adalah ... .

A. Rp60.000,00
B. Rp64.000,00
C. Rp62.000,00
D. Rp65.000,00
E. Rp563.000,00

9. Dalam suatu kelas terdapat 22 siswa. Nilai rataan matematikanya 5 dan jangkauan 4. Jika seorang siswa yang nilainya terendah dan seorang siswa yang nilainya tertinggi tidak disertakan, maka rataannya berubah menjadi 4,9. Nilai siswa yang paling rendah adalah ... .

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

10. Modus dari data dalam tabel berikut adalah ... .

Tabel 1.48

Interval	Frekuensi
61 – 65	8
66 – 70	12
71 – 75	18
76 – 80	14

A. 72,5
B. 72,75
C. 73,5
D. 73,75
E. 74,5

11. Diketahui data:

2 3,5 5 7 7,5

Rataan simpangan data di atas adalah ... .

A. 0
B. 1,0
C. 1,8
D. 2,6
E. 5

12. Dari hasil nilai ujian 50 siswa, diperoleh nilai rataan 54 dan jangkauan 70. Karena nilai rataannya terlalu rendah, maka setiap nilai dikali 2 kali dan dikurangi 32. Nilai baru mempunyai ... .

A. rataan 76, jangkauan 108
B. rataan 76, jangkauan 140
C. rataan 76, jangkauan 36
D. rataan 108, jangkauan 140
E. rataan 108, jangkauan 108

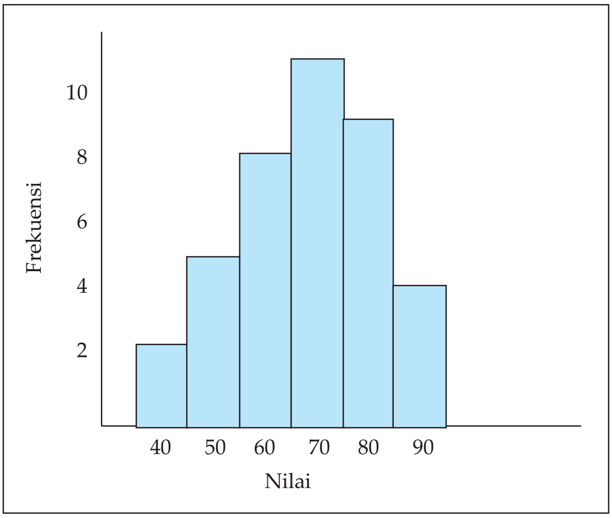
13. Sekumpulan data mempunyai rataan 12 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai data dikurangi dengan a kemudian hasilnya dibagi dengan b ternyata menghasilkan data baru dengan rataan 2 dan jangkauan 3, maka nilai a dan b masing-masing adalah ... .

    A. 10 dan 2
    B. 8 dan 2
    C. 8 dan 4
    D. 6 dan 4
    E. 4 dan 4

14. Suatu bilangan terdiri dari 11 unsur, maka letak nilai Q_2 dan P_{57} pada unsur ke ... .

    A. 6 dan ke 6,84
    B. 6 dan ke 10
    C. 5,5 dan ke 9,5
    D. 5,5 dan ke 10,5
    E. 5,5 dan ke 10

15. Suatu kelompok data mempunyai histogram seperti di bawah ini.



Gambar 1.13 Histogram

    A. kuartil ketiga 80 dan rataan 68,25
    B. kuartil bawah 50 dan rataan 68,25
    C. median 65 dan kuartil ketiga 80
    D. median 65 dan rataan 68,25
    E. modus 68,25 dan median 65

B. *Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!*

16. Tiga buah kelompok data yang sejenis mempunyai ukuran dan rataan yang berbeda-beda:

    a. Kelompok pertama mempunyai ukuran n_1 dengan rataan $\bar{x}_1$,
    b. Kelompok kedua mempunyai ukuran n_2 dengan rataan $\bar{x}_2$, dan

c. Kelompok ketiga mempunyai ukuran n_3 dengan rataan $\bar{x}_3$.

Buktikan bahwa rataan dari ketiga kelompok data itu adalah

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2 + n_3\bar{x}_3}{n_1 + n_2 + n_3}$$

17. Suatu keluarga mempunyai 5 orang anak. Anak bungsu berumur $\frac{1}{2}$ dari umur anak sulung, sedangkan 3 anak lainnya masing-masing berumur lebih 2 tahun dari anak bungsu, lebih 4 tahun dari anak bungsu, dan kurang dari 3 tahun dari anak sulung. Jika rataan umur mereka adalah 16, berapa tahun umur anak sulung?
18. Nilai rataan ujian kelas A dan kelas B berturut-turut adalah $\bar{x}_A$ dan $\bar{x}_B$. Setelah kedua kelas digabung nilai rataannya adalah $\bar{x}$. Jika $\bar{x}_A : \bar{x}_B = 10 : 9$ dan $\bar{x} : \bar{x}_B$ = 85 : 81, maka berapakah perbandingan banyak siswa kelas A dan kelas B?
19. Hasil menimbang sebuah benda dengan 5 kali penimbangan menghasilkan hasil yang berbeda-beda: 57,87 kg, 58,09 kg, 58,17 kg, 57,96 kg, dan 57, 89 kg. Tentukan interval yang memuat berat benda sebenarnya.
20. Simpangan baku dari suatu kumpulan data ditentukan dengan rumus (1.21), yaitu

$$S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

Dengan menguraikan suku $(x_i - \bar{x})^2$, tunjukkan bahwa rumus ini dapat disajikan sebagai

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (x_i)^2 - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$$

Soal Analisis

1. Nilai rataan ujian matematika dari 39 orang siswa adalah 45. Jika nilai dari seorang siswa lainnya yang bernama Fadia digabungkan dalam kelompok itu, maka nilai rataan ujian matematika dari 40 orang siswa sekarang menjadi 46. Berapakah nilai Fadia dalam ujian tersebut?
2. Sebuah keluarga mempunyai 5 orang anak. Anak yang bungsu berumur x tahun dan yang sulung berumur 2 x tahun. Tiga anak yang lain masing-masing berumur (x + 2) tahun, (x + 4) tahun, dan (2 x – 1) tahun. Rataan umur dari ke lima anak itu adalah 11,5 tahun.
   a. Berapa umur anak bungsu dan anak sulung?
   b. Urutkan data umur kelima anak itu, kemudian tentukan mediannya.
   c. Bandingkan nilai median yang Anda peroleh pada soal b) dengan nilai rataannya. Apa yang dapatAnda simpulkan?
   d. Apakah kumpulan data umur kelima anak itu mempunyai modus? Jika ada, tentukan modusnya.

3. Nilai ujian dari peserta seleksi pegawai di suatu instansi diberikan pada tabel 1.55.

Tabel 1.49

Interval	Frekuensi
21 – 30	2
31 – 40	4
41 – 50	6
51 – 60	20
61 – 70	10
71 – 80	5
81 – 90	2
91 – 100	1

a. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.
b. Hitunglah rataannya dengan menggunakan rataan sementara.
c. Hitunglah simpangan bakunya.
d. Seorang calon dikatakan lulus apabila nilainya sama dengan atau diatas rataan. Berapa banyak calon yang lulus?
e. Adakah nilai data pencilan?

4. Rataan pendapatan suatu perusahaan Rp300.000,00 per bulan. Jika rataan pendapatan karyawan pria Rp320.000,00 dan karyawan wanita Rp285.000,00, berapakah perbandingan jumlah karyawan pria dengan wanita?

5. Suatu percobaan jenis makanan yang diberikan kepada ayam pedaging memberikan kenaikan berat badan sebagai berikut.

Tabel 1.50

Minggu ke-	Berat Badan (dalam gram)
1	250
2	490
3	990
4	1.890
5	3.790

Berapakah kira-kira rataan kenaikan berat badan ayam pedaging itu tiap minggunya?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ....
Kelas : XI
Kelompok : ....
Kegiatan : Survei data pemanfaatan waktu di luar sekolah
Tujuan : Menentukan nilai-nilai statistik

Tanggal : ....
Materi Pokok : Statistika
Semester : 1 (satu)

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Alat tulis
2. Buku catatan
3. Daftar isian
4. Wilayah yang disurvei

B. Cara kerja

1. Buat kelompok yang terdiri 4 atau 5 siswa.
2. Ambillah wilayah survei sekolahmu. Lakukan survei terhadap minimal 40 siswa di sekolahmu (tidak boleh teman satu kelas), tentang penggunaan waktu (dalam jam) di luar jam sekolah dalam satu hari.
3. Lakukan isian seperti tabel berikut.

No.	Nama	Belajar	Membantu Keluarga	Olahraga
1.				
2.				
3.				
4.				

4. Berdasarkan data yang Anda peroleh tentang belajar dan olah raga, tentukan:
   a. rerata, median, dan modus,
   b. statistik minimum dan statistik maksimum,
   c. kuartil dan simpangan baku.
5. Berdasarkan data tentang membantu keluarga, tentukan:
   a. persentase siswa yang rajin (minimal 3 jam) membantu keluarga.
   b. persentase siswa yang malas membantu keluarga.
6. Buatlah tabel distribusi frekuensi dan tabel distribusi frekuensi kumulatif data.
7. Dengan bantuan komputer gambarkan histogram dan poligon frekuensinya.

C. Analisis

Berdasarkan data yang telah Anda olah tadi, buatlah analisis tentang setiap kategori aktivitas siswa.

BAB

II

PELUANG

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. merumuskan dan menerapkan aturan perkalian,
2. merumuskan dan menerapkan aturan permutasi,
3. merumuskan dan menerapkan aturan kombinasi,
4. menentukan ruang sampel suatu percobaan acak,
5. menentukan dan menafsirkan peluang kejadian untuk berbagai situasi,
6. merumuskan dan menerapkan aturan penjumlahan pada kejadian majemuk,
7. merumuskan dan menggunakan aturan perkalian pada kejadian majemuk.

Pengantar

Gambar 2.1 Anak-anak SMA sedang ujian olimpiade matematika
Sumber: www.bmw.co.id

Dari hasil penjaringan tim olimpiade matematika suatu SMA, panitia memperoleh 10 orang calon yang kemampuan matematika mereka berimbang. Dari sejumlah itu, 6 siswa pandai komputer, dan 4 siswa pandai bahasa Inggris. Kemudian panitia akan membentuk anggota tim olimpiade matematika yang terdiri dari 3 siswa. Jika panitia bermaksud membentuk tim yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai bahasa Inggris, berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk? Pertanyaan selanjutnya, jika panitia memilih 3 siswa tersebut secara acak, berapa besar peluang terbentuk tim dengan susunan seperti itu?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda perlu terlebih dahulu mengingat kembali konsep-konsep dari himpunan, aljabar, dan logika matematika.
Dengan demikian Anda akan dapat menyelesaikan permasalahan di atas.

"Berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk" adalah salah satu contoh kaidah pencacahan, dan "berapa besar kemungkinan" adalah contoh tentang tingkat keyakinan dari kejadian yang belum pasti terjadi. Untuk mempelajari kaidah pencacahan dan mengukur tingkat keyakinan tentang kepastian akan muncul atau tidak munculnya suatu kejadian dipelajari dalam cabang matematika Ilmu Hitung Peluang. Asal mula ilmu ini adalah dari pertanyaan seorang penjudi Chevalier de Mere kepada Blaise Pascal (1623-1662) mengenai suatu masalah pembagian uang taruhan pada suatu perjudian, apabila permainan itu terpaksa dihentikan sebelum selesai karena sesuatu hal. Dari kejadian ini Pascal dan Fermat (1601-1665) saling berdiskusi yang akhirnya memunculkan cabang matematika Ilmu Hitung Peluang.

Kehadiran Ilmu Hitung peluang disambut baik oleh para ahli matematika maupun ahli-ahli ilmu lain seperti fisika dan ekonomi, karena kontribusinya yang cukup besar terhadap ilmu-ilmu tersebut.

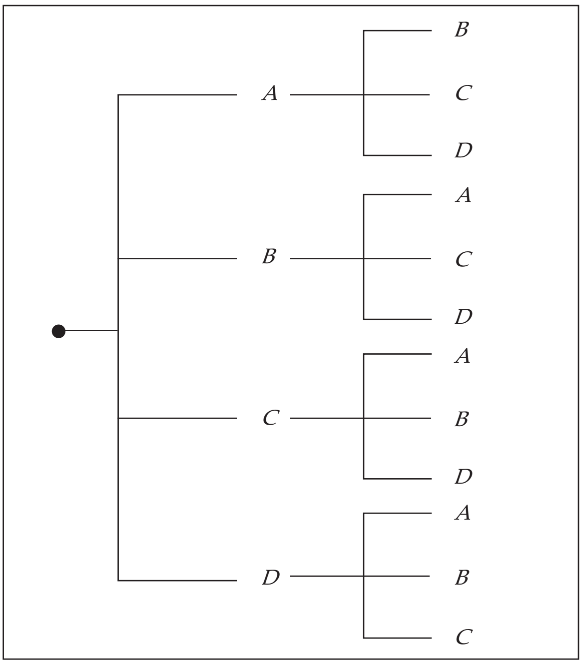
Sebagai dasar dalam mengkaji hitung peluang adalah aturan pencacahan. Oleh karena itu, akan kita kaji lebih dahulu tentang aturan pencacahan ini.

2.1 Aturan Pencacahan

Dalam pengukuran ketidakpastian, ketidakpastian muncul dapat disebabkan karena suatu tindakan atau karena sebagai akibat yang lain. Sebagai contoh, jika sebuah uang logam dilemparkan, maka sebagai akibatnya akan muncul sisi angka atau sisi gambar. Sisi mana yang akan muncul, tidak dapat kita katakan secara pasti. Kegiatan melempar uang logam ini disebut tindakan. Tindakan itu dapat diulang beberapa kali dan rangkaian tindakan itu disebut percobaan.

Banyaknya hasil yang mungkin muncul pada berbagai macam percobaan akan ditelusuri dalam kaidah-kaidah pencacahan. Misalnya, pada pemilihan pengurus OSIS terdapat empat anak yang lolos untuk putaran terakhir, yaitu Anwar (*A*), Badu (*B*), Cindy (*C*), Dana (*D*). Pada putaran terakhir akan dipilih dua anak untuk menduduki posisi ketua dan sekretaris. Pertanyaan yang muncul adalah: berapa macam susunan pengurus yang akan menang?

Jawab atas pertanyaan di atas dapat kita ikuti pada uraian berikut ini. Pada putaran akhir ada 4 kemungkinan pengisian posisi ketua, yaitu *A*, *B*, *C* dan *D*. Setelah satu dari mereka terpilih sebagai ketua, posisi sekretaris adalah satu dari tiga anak yang tidak terpilih sebagai ketua. Kemungkinan susunan posisi ketua dan sekretaris dapat dibentuk diagram pohon berikut.



Gambar 2.2 Diagram pohon penentuan ketua dan sekretaris OSIS

Dari diagram ini diperoleh $4 \times (4-1) = 12$ susunan pasangan yang mungkin, yaitu (*AB*, *AC*, *AD*, *BA*, *BC*, *BD*, *CA*, *CB*, *CD*, *DA*, *DB*, *DC*).

Tidak ada aturan yang pasti untuk menjawab pertanyaan berapa banyak hasil yang mungkin muncul dari suatu percobaan. Secara umum, untuk menentukan berapa macam hasil yang mungkin muncul biasanya menggunakan salah satu atau gabungan dari pendekatan-pendekatan: pengisian tempat yang tersedia, permutasi, dan kombinasi.

2.1.1 Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia

Misalkan di pasaran tersedia 4 merk TV. Masing-masing merk menyediakan 3 jenis ukuran layar. Masing-masing TV dikeluarkan dengan 2 macam kualitas suara, *stereo* dan *mono*. Jika seorang pembeli akan membeli TV baru, berapa macam pilihan yang dapat dilakukan olehnya?

Untuk menjawab pertanyaan di atas pembeli menggunakan alur pemikiran berikut ini.

Pertama, ketika memilih merk, terdapat 4 cara untuk memilih merk.

Kedua, ketika memillih ukuran layar, terdapat 3 cara untuk memilih ukuran layar.

Ketiga, ketika memilih kualitas suara, terdapat 2 cara untuk memilih kualitas suara.

Jadi, seluruhnya terdapat 4 × 3 × 2 = 24 cara untuk memilih pasangan merk, ukuran layar dan kualitas suara. Tanpa menyadari pembeli itu sebenarnya telah menggunakan tehnik mencacah dengan aturan perkalian.

Aturan Perkalian

Jika terdapat n buah tempat tersedia, dengan:

k_1 adalah banyak cara mengisi tempat pertama,

k_2 adalah banyak cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi, ... dan seterusnya,

k_n adalah banyak cara mengisi tempat ke-n setelah $(n - 1)$ tempat-tempat sebelumnya terisi,

maka banyak cara mengisi n tempat yang tersedia itu secara keseluruhan adalah:

$$k_1 \times k_2 \times k_3 \times \cdots \times k_n$$

Jika kita perhatikan aturan perkalian di atas bahwa dalam menentukan banyak cara untuk mengisi k tempat yang tersedia menggunakan operasi perkalian dalam aljabar biasa. Untuk lebih memahami aturan ini kita ikuti contoh aplikasi berikut ini.

Contoh 2.1.1

Ucok ingin bepergian dari kota P ke kota R. Dari kota P ke kota Q dapat ditempuh melalui 3 jalan, sedangkan dari kota Q ke kota R dapat ditempuh melalui 2 jalan. Berapa banyak cara yang dapat ditempuh Ucok jika ingin bepergian dari kota P ke kota R melalui kota Q?

Penyelesaian:

Dari kota P ke kota Q, terdapat 3 cara.

Dari kota Q ke kota R, terdapat 2 cara.

Dari kota P ke kota R melalui kota Q, terdapat $3 \times 2 = 6$.

Jadi, banyak cara yang dapat dipilih Ucok untuk bepergian dari kota P ke kota R melalui kota Q adalah 6 cara.

□

Contoh 2.1.2

Dari huruf-huruf S, O, P, A dan N akan dibentuk susunan huruf sehingga dalam susunan tersebut tidak ada huruf yag sama. Berapa banyak cara untuk menyusun huruf-huruf itu, apabila:

a. huruf dimulai dengan huruf vokal?

b. huruf pertama dimulai dengan huruf konsonan?

Penyelesaian:

a. Huruf pertama dimulai dengan huruf vokal.
Huruf pertama dapat dipilih dengan 2 cara, yaitu huruf O dan A.
Huruf kedua dapat dipilih dengan 4 cara. Misalnya, jika huruf pertama kita pilih O, maka huruf kedua dapat kita pilih S, P, A dan N.
Huruf ketiga dapat kita pilih dengan 3 cara.
Huruf keempat dapat kita pilih dengan 2 cara.
Huruf kelima dapat kita pilih dengan 1 cara.
Seluruhnya terdapat $2 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 48$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun huruf-huruf S, O, P, A dan N dengan huruf pertama dimulai huruf vokal seluruhnya ada 48 cara

b. Huruf pertama dimulai dengan huruf konsonan.
Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf S, P dan N.
Huruf kedua dapat dipilih dengan 4 cara. Misalnya, jika huruf pertama kita pilih S, maka huruf kedua dapat kita pilih O, P, A dan N.
Huruf ketiga dapat kita pilih dengan 3 cara.
Huruf keempat dapat kita pilih dengan 2 cara.
Huruf kelima dapat kita pilih dengan 1 cara.
Seluruhnya terdapat $3 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 72$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun huruf-huruf S, O, P, A dan N dengan huruf pertama dimulai huruf konsonan seluruhnya ada 72 cara

□

Contoh 2.1.3

Diberikan lima buah angka 0, 1, 2, 3, dan 4 akan disusun bilangan-bilangan genap yang terdiri dari tiga angka. Berapa banyak cara untuk menyusun bilangan-bilangan genap yang terdiri tiga angka apabila :

a. Bilangan-bilangan genap itu boleh mempunyai angka yang sama?

b. Bilangan-bilangan genap tidak boleh mempunyai angka yang sama?

Penyelesaian:

Bilangan genap adalah bilangan yang pada posisi satuan adalah bilangan genap. Dalam hal ini haruslah 0, 2, atau 4.

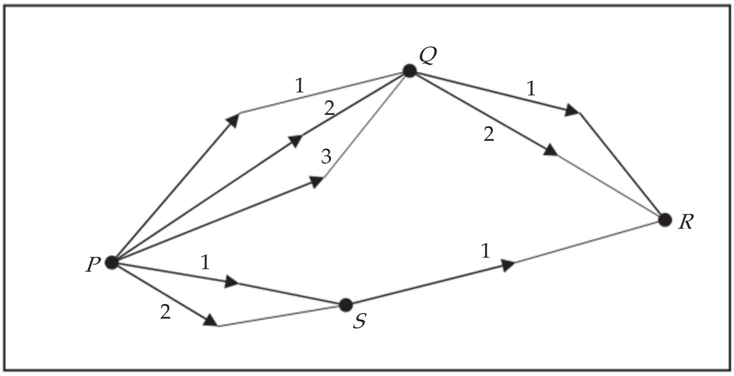
a. Bilangan-bilangan genap boleh mempunyai angka yang sama
Angka pertama (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 4 cara. Angka 0 tidak dapat dipilih sebagai angka pertama, karena 012 sebagai contoh, bukan bilangan yang terdiri dari tiga angka.
Angka kedua (sebagai puluhan) dapat dipilih dengan 5 cara.
Angka ketiga (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 3 cara. Angka ketiga yang dapat dipilih adalah 0, 2, dan 4.
angka keempat (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 5 cara.
Dengan aturan perkalian, seluruhnya terdapat $4 \times 5 \times 3 = 60$ cara.
Jadi, banyak cara untuk menyusun angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4 menjadi bilangan genap yang terdiri 3 angka dengan bilangan-bilangan itu boleh mempunyai angka yang sama adalah 60 cara.

b. Bilangan-bilangan genap tidak boleh mempunyai angka yang sama
   Angka pertama (sebagai ratusan) dapat dipilih dengan 4 cara.
   Angka kedua (sebagai puluhan) hanya dapat dipilih dengan 4 cara, karena bilangan tidak boleh mempunyai angka yang sama.
   Angka ketiga (sebagai satuan) dapat dipilih dengan 3 cara.
   Seluruhnya terdapat $4 \times 4 \times 3 = 48$ cara.
   Jadi, banyak cara untuk menyusun angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4 menjadi bilangan genap yang terdiri 3 angka dengan bilangan-bilangan itu tidak boleh mempunyai angka yang sama adalah 48 cara.

□

Misalnya, untuk bepergian dari kota P ke kota R kita dapat melewati kota Q atau melewati kota S dengan berbagai alternatif jalur. Misalkan kita pergi dari kota P ke kota Q mempunyai 3 jalur pilihan, kemudian dari kota Q ke kota R tersedia 2 jalur pilihan, maka menurut aturan perkalian untuk bepergian dari kota P ke kota R melewati kota Q kita mempunyai 3 × 2 jalur.

Selanjutnya, misalkan kita pergi dari kota P ke kota S tersedia 2 jalur pilihan, kemudian dari kota S kita hanya mempunyai 1 jalur untuk sampai di kota R, maka banyaknya jalur yang tersedia bagi kita untuk bepergian dari kota P ke kota R melewati kota S adalah 2 × 1 jalur. Lihat gambar 2.3 di bawah ini.



Gambar 2.3 Diagram Pohon Jalur Perjalanan Dari Kota P ke Kota R

Dari uraian di atas dapat kita simpulkan bahwa untuk bepergian dari kota P ke kota R kita mempunyai $(3 \times 2) + (2 \times 1) = 8$ jalur pilihan. Dalam pencacahan ini kita menggunakan apa yang disebut aturan penjumlahan. Aturan penjumlahan kita gunakan untuk melengkapi aturan perkalian apabila cara mengisi tempat kedua setelah tempat pertama terisi tidak dapat kita lakukan menggunakan sesuatu yang sudah digunakan sebagai pilihan untuk mengisi tempat pertama. Secara umum kita mempunyai aturan penjumlahan berikut ini.

Aturan Penjumlahan
Jika terdapat n peristiwa yang saling lepas, dengan:
c_1 adalah banyak cara pada peristiwa pertama,
c_2 adalah banyak cara pada peristiwa kedua, ... dan seterusnya,
c_n adalah banyak cara pada pada peristiwa ke-n,
maka banyak cara untuk n buah persitiwa secara keseluruhan:

$$c_1 + c_2 + c_3 + \cdots + c_n$$

2.1.2 Permutasi

Permutasi dibedakan menjadi 4 macam, yaitu ; *permutasi dari unsur-unsur yang berbeda, permutasi yang memuat beberapa unsur sama, permutasi siklis,* dan *permutasi berulang.*

1. *Permutasi dari Unsur-Unsur yang Berbeda*

Pada putaran akhir pemilihan pengurus OSIS seperti telah dibahas pada awal bab, ada 2 tempat yang tersedia untuk diisi oleh 2 anak dari 4 anak *A, B, C,* dan *D*. Posisi ketua dapat diisi dengan 4 cara. Karena tidak mungkin ketua merangkap sekretaris, maka posisi sekretaris dapat diisi dengan (4 – 1) = 3 cara. Secara keseluruhan untuk memilih pasangan ketua-sekretaris ada $4 \times 3 = 12$ cara. Pada contoh itu, anak yang telah terpilih sebagai ketua tidak dapat dipilih kembali untuk menduduki posisi sekretaris. Pemilihan seperti itu kita sebut pemilihan tanpa pemulihan.

Secara umum, banyak cara menempatkan n buah unsur ke dalam k tempat yang tersedia itu disebut permutasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan P_k^n, yang diberikan sebagai

$$P_k^n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-k+1)$$

dengan $k \le n$. Beberapa buku menggunkan notasi ${}^nP_k$, ${}_nP_k$ atau $P(n,k)$ untuk P_k^n.

Dengan notasi ini, pada masalah penentuan ketua dan sekretaris dari 4 anak di atas, merupakan permutasi k = 2 unsur dari n = 4 unsur. Sehingga banyak cara menentukan ketua dan sekretaris sama dengan

$$P_2^4 = 4 \times (4-2+1) = 4 \times 3 = 12$$

Jika pada putaran akhir pemilihan pengurus OSIS di atas dari keempat calon akan ditentukan ketua, sekretaris, bendahara dan pembantu umum, ada berapa macam susunan pengurus yang mungkin timbul?

Masalah ini adalah pengisian tempat tanpa pemulihan dari 4 unsur ke dalam 4 tempat yang tersedia. Posisi ketua adalah salah satu dari empat anak itu. Yang menjadi sekretaris adalah salah satu dari 3 orang yang tersisa, yang menjadi bendahara adalah salah satu dari 2 orang yang tersisa. Akhirnya posisi pembantu umum hanya dapat ditempati satu anak. Dalam hal ini adalah kasus permutasi dari n = 4 anak ke dalam k = 4 tempat yang tersedia. Sehingga, banyaknya susunan pengurus adalah

$$P_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

Secara umum, jika $k = n$, maka permutasi n unsur dari n unsur yang tersedia disebut permutasi n, yang diberikan oleh

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

Bagaimana hubungan P_k^n dan P_n^n? Untuk menjawab pertanyaan ini, terlebih dahulu kita bahas pengertian faktorial dari bilangan asli.
Faktorial dari suatu bilangan asli didefinisikan berikut ini.

Untuk sembarang bilangan asli n, didefinisikan

$$n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

Notasi $n!$ dibaca "n faktorial". Didefinisikan pula bahwa: $0!=1$ dan $1!=1$

Sebagai contoh,

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

$6! = 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 720$

$9! = 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 362.880, \ldots,$ dan seterusnya.

Dengan pengertian faktorial, kita dapat menuliskan permutasi sebagai

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1 = n! \qquad (2.1)$$

Lebih lanjut, karena $P_k^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)$, maka

$$P_n^n = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-k+1)\times(n-k)\times(n-k-1)\times\cdots\times 3\times 2\times 1$$

$$n! = P_k^n(n-k)!$$

Jadi, kita memperoleh hubungan

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!}, n \geq k \qquad (2.2)$$

Contoh 2.1.4

Tunjukkan bahwa $n! = n\times(n-1)!$.

Penyelesaian:

Dari definisi n faktorial,

$$n! = n\times\big((n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 3\times 2\times 1\big) = n\times(n-1)!$$

□

Contoh 2.1.5

Hitunglah dari setiap permutasi berikut.

a. P_2^5

b. P_4^6

c. P_5^{10}

d. P_8^8

Penyelesaian:

Dengan persamaan (2.1) dan (2.2) kita peroleh:

a. $P_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1} = 5\times4 = 20$,

b. $P_4^6 = \dfrac{6!}{(6-4)!} = \dfrac{6!}{2!} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = 6\times5\times4\times3 = 360$,

c. $P_4^{10} = \dfrac{10!}{(10-4)!} = \dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1} = 10\times9\times8\times7 = 5020$,

d. $P_8^8 = 8! = 8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 40.320$

Tugas Mandiri

Dengan hasil (2.1) dan (2.2), buktikan: $(n-k)!P_k^n = k!P_{n-k}^n = P_n^n$.

Contoh 2.1.6

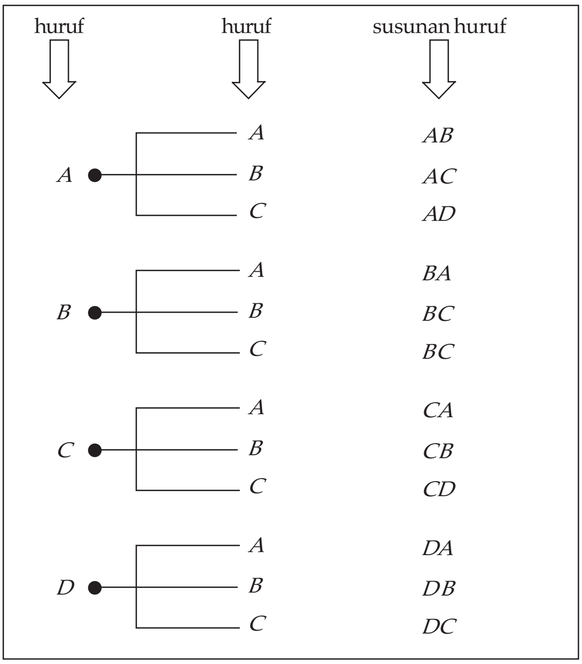
Berapakah banyak permutasi dari 2 huruf yang diambil dari 4 huruf-huruf *A, B, C* dan *D*.

Penyelesaian:

Hal ini merupakan permutasi dari 4 unsur ke dalam 2 unsur, sehingga menurut persamaan (2.2) banyak permutasi adalah

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4\times3\times2\times1}{2\times1} = 12$$

Susunan huruf yang mungkin terlihat pada gambar 2.4 di bawah ini.



Gambar 2.4 Permutasi 2 huruf dari 4 huruf

2. *Permutasi yang Memuat Beberapa Unsur Sama*

Pada bagian sebelumnya telah kita bahas permutasi dari n unsur berbeda, bagaimana jika dari n unsur itu terdapat beberapa unsur yang sama. Untuk menjawab pertanyaan ini coba kita ikuti ilustrasi pada contoh berikut ini.

Contoh 2.1.7

Berapa banyak permutasi 3 huruf yang diambil dari huruf-huruf P, Q dan Q?

Penyelesaian:

Unsur yang tersedia ada 3, yaitu P, Q dan Q. dari ketiga unsur ini ada dua unsur yang sama yaitu huruf Q. Akan kita gunakan pendekatan permutasi dengan 3 unsur yang berbeda untuk menentukan banyak permutasi dari 3 unsur yang memuat 2 unsur sama. Pertama anggap 2 unsur yang sama yaitu Q sebagai dua unsur yang berbeda dengan memberinya indeks Q_1 dan Q_2.

Banyak permutasi 3 unsur yang berbeda P, Q_1 dan Q_2 adalah 3! = 6, yaitu permutasi-permutasi :

$$PQ_1\,Q_2,\ PQ_2\,Q_1,\ Q_1PQ_2,\ Q_1\,Q_2\,P,\ Q_2\,PQ_1,\ Q_2\,Q_1P.$$

Dengan menghapus indeks-indeksnya permutasi di atas dapat kita kelompokkan ke dalam permutasi yang sama. Misalnya,

- kelompok $PQ_1\,Q_2$ dan $PQ_2\,Q_1$, jika indeksnya dihapuskan diperoleh permutasi PQQ.
- kelompok $Q_1\,PQ_2$ dan $Q_2\,PQ_1$, jika indeksnya dihapuskan diperoleh permutasi QPQ.
- kelompok $Q_1\,Q_2\,P$ dan $Q_2\,Q_1\,P$, jika indeknya dihapuskan diperoleh permutasi QQP.

Tampak bahwa jika indeksnya dihapuskan setiap kelompok yang terdiri dari 2! = 2 permutasi, berubah menjadi 1 permutasi. Oleh karena itu, banyak permutasi 3 unsur yang memuat 2 unsur sama adalah 3, yang dapat kita nyatakan sebagai

$$P = \frac{3!}{2!} = \frac{3\times2\times1}{2\times1} = 3,$$

dengan permutasinya adalah PQQ, QPQ dan QQP.

□

Berdasarkan contoh di atas, secara umum kita mempunyai aturan berikut ini.

1. Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k unsur yang sama dengan $k \le n$, maka banyak permutasi dari n unsur adalah

$$P = \frac{n!}{k!} \qquad (2.3)$$

2. Jika dari n unsur yang tersedia terdapat k unsur yang sama, l unsur yang sama, dan m unsur yang sama dengan $k+l+m \le n$, maka banyak permutasi dari n unsur itu adalah

$$P = \frac{n!}{k!\,l!\,m!} \qquad (2.4)$$

Contoh 2.1.8

Misalkan terdapat 7 buah foto, 4 buah foto dengan bingkai berbentuk persegi, dan 3 buah foto dengan bingkai berbentuk oval. Berapa banyak cara untuk menyusun 7 buah foto itu secara berdampingan?

Penyelesaian:

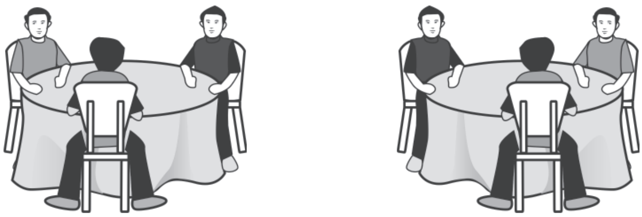
Banyak unsur $n = 7$, banyak unsur yang sama $k = 4$ (untuk foto dengan bingkai persegi) dan $l = 3$ (untuk foto dengan bingkai oval). Jadi, banyak cara untuk menyusun 7 buah foto itu secara berdampingan adalah

$$P = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)} = 7\times5 = 35$$

□

3. *Permutasi Siklis*

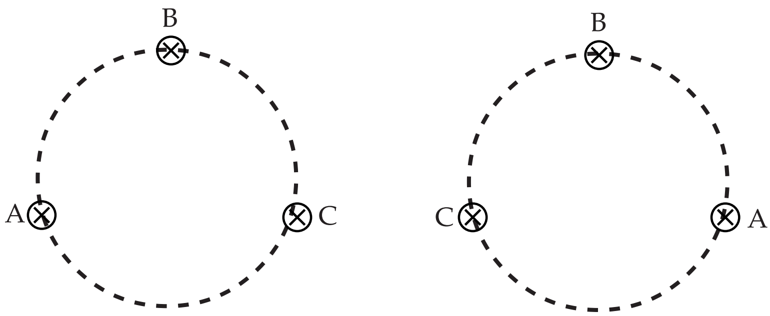
Misalkan Awan (A), Beti (B), dan Cinta (C) pergi ke restoran, mereka duduk mengelilingi meja berbentuk lingkaran. Posisi duduk mereka hanya dua kemungkinan seperti diperlihatkan oleh gambar berikut ini.



(a) (b)

Gambar 2.5 Posisi duduk 3 orang melingkar

Dalam bentuk bagan, gambar 2.5 dapat kita sederhanakan menjadi gambar 2.6 berikut.



Gambar 2.6 Bagan Posisi Duduk 3 Orang Melingkar

Dari gambar 2.6(a) jika dibaca searah dengan arah putaran jarum jam, kita peroleh 3 susunan yang mungkin, yaitu

$$ABC, BCA, \text{ dan } CAB$$

Tetapi ketiga susunan ini sebenarnya memberikan sebuah susunan yang sama, yaitu susunan yang diperlihatkan oleh gambar 2.6(a).

Seperti susunan gambar 2.6(a), susunan gambar 2.6(b) jika dibaca searah dengan arah putaran jarum jam, kita peroleh 3 susunan yang mungkin, yaitu

$$ACB, CBA, \text{ dan } BAC$$

Ketiga susunan ini memberikan sebuah susunan yang sama, yaitu susunan yang diperlihatkan oleh gambar 2.6(b).
Dari kedua ilustrasi ini, dapat kita simpulkan bahwa *banyak susunan* dari tiga huruf *A, B,* dan *C* yang ditempatkan pada kurva tertutup berbentuk lingkaran adalah

$$2! = 2 \text{ macam},$$

yaitu susunan yang diberikan oleh gambar 2.6. Penempatan unsur-unsur dengan cara inilah yang disebut permutasi siklis atau permutasi sirkuler (*circular permutation*). Secara umum kita mempunyai aturan berikut ini.

Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyak permutasi siklisnya adalah

$$P_{\text{siklis}} = (n-1)! \qquad (2.5)$$

Untuk memahami tentang permutasi siklis ini, kita ikuti contoh berikut.

Contoh 2.1.9
Berapa cara yang mungkin dapat dibuat jika dalam suatu pesta makan terdapat 7 orang yang duduk dalam:
a. berjajar dalam satu baris,
b. meja makan bundar.

Penyelesaian:
a. Posisi duduk berjajar dalam satu baris merupakan permutasi 7 unsur dari 7 unsur, sehingga menurut persamaan (2.1),

$$P_7^7 = 7! = 5040 \text{ cara}$$

Jadi, jika 7 orang tersebut duduk berjajar dalam satu baris, maka banyak cara mereka duduk ada 5040 cara.
b. Posisi duduk mengelilingi meja makan bundar merupakan permutasi siklis dari 7 unsur, sehingga menurut persamaan (2.5),

$$P_{\text{siklis}} = (7-1) = 6! = 720 \text{ cara}$$

Jadi, jika 7 orang tersebut duduk mengelilingi meja bundar, maka banyak cara mereka duduk ada 720 cara.

□

4. *Permutasi Berulang*

Kita ingat kembali bahwa permutasi dari 3 huruf *P, Q* dan *R* adalah susunan-susunan yang berbentuk

$$PQR,\ PRQ,\ QPR,\ QRP,\ RPQ,\ RQP.$$

Dalam susunan ini, unsur-unsur yang tersedia tidak boleh berulang. Jika unsur-unsur yang tersedia boleh berulang, misalkan

PPP, PPQ, PPR, ..., QQP, QQR...., dan seterusnya,

maka permutasi semacam ini disebut permutasi berulang (*repeated permutation*).

Dengan memperhatikan permutasi di atas, maka banyaknya permutasi berulang dari 3 huruf *P, Q* dan *R* ditentukan sebagai berikut.
- Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf *P, Q* dan *R*.
- Huruf kedua dan huruf ketiga dapat dipilih masing-masing dengan 3 cara, karena huruf-hurufnya boleh berulang

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyak permutasi seluruhnya adalah

$$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$$

Jika dari 3 huruf *P, Q* dan *R* akan disusun 2 huruf dengan huruf-huruf boleh berulang, maka banyak permutasi berulang dua huruf yang diambil dari 3 huruf yang tersedia ditentukan sebagai berikut.

- Huruf pertama dapat dipilih dengan 3 cara, yaitu huruf *P, Q* dan *R*.
- Huruf kedua dapat dipilih dengan 3 cara, karena huruf-hurufnya boleh berulang

Dengan menggunakan aturan perkalian, maka banyak permutasi seluruhnya adalah

$$3 \times 3 = 3^2 = 9$$

Dari dua ilustrasi di atas, maka secara umum kita mempunyai aturan berikut.

Jika tersedia n unsur yang berbeda, maka banyak permutasi berulang k unsur yang diambil dari n unsur $(k \le n)$ adalah

$$P_{\text{berulang}} = n^k \qquad (2.6)$$

Contoh 2.1.10

Diberikan 1, 2, 3, 4, 5, dan 6 akan dibentuk bilangan-bilangan yang terdiri dari 4 angka dengan angka-angka boleh berulang. Berapa banyak bilangan yang dapat dibentuk?

Penyelesaian:

Banyak unsur yang tersedia adalah $n = 6$, yaitu angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, dan 6. Dibentuk bilangan terdiri 4 angka, kita ambil $k = 4$. Karena angka-angka boleh berulang, maka maka bilangan yang tersusun merupakan permutasi berulang, dengan $k = 4$, sehingga dengan persamaan (2.6) kita peroleh

$$P_{\text{berulang}} = 6^4 = 1296$$

Jadi, banyak bilangan yang dapat dibentuk seluruhnya ada 1296 macam.

□

2.1.3 Kombinasi

Sekolah akan mengikuti perlombaan paduan suara yang tiap regunya terdiri dari 2 anak. Dari hasil seleksi diperoleh 4 anak *A, B, C* dan *D* yang memenuhi kriteria yang telah ditentukan. Pertanyaannya adalah berapa regu yang dapat dipilih dari empat anak tersebut?

Untuk menjawab pertanyaan ini, perhatikan kembali banyaknya cara keempat anak *A, B, C,* dan *D* dapat menempati tempat pertama dan kedua. Kemungkinan-kemungkinannya adalah sebagai berikut.

$$\{AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC\}$$

Kita tahu bahwa susunan *AB* dan susunan *BA* menentukan satu regu yang sama, karena tidak memperhatikan urutan. Demikian pula halnya susunan $AC = CA$, $AD = DA$, $BC = CB$, $BD = DB$, dan $CD = DC$. Jadi, ada $12/2 = 6$ cara untuk menyusun regu paduan suara yang terdiri atas 2 anak dari 4 anak yang tersedia,

$$\{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$$

Banyak cara memilih 2 unsur dari 4 unsur yang tersedia disebut kombinasi 2 unsur dari 4 unsur. Secara umum kita mempunyai definisi berikut ini.

Definisi
Kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang berbeda adalah suatu pilihan dari k unsur tanpa memperhatikan urutannya $(k \le n)$, dinotasikan dengan C_k^n.

Dengan kata lain, banyak kombinasi k unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia adalah banyak cara memilih k unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia tanpa memperhatikan urutannya.

Kita masih ingat bahwa banyaknya cara memilih 2 anak dari 4 anak untuk ditempatkan dalam dua kedudukan yang berbeda adalah permutasi 2 unsur dari 4 unsur yang tersedia, yaitu $P_2^4 = \dfrac{4!}{(4-2)!} = 12$. Untuk kombinasi AB yang tata letak unsur-unsur A dan B-nya tidak diperhatikan, dapat diturunkan $2! = 2$ permutasi, karena setiap kombinasi memberikan 2 permutasi. Jadi, kita peroleh hubungan

$$2C_2^4 = P_2^4 \quad \text{atau} \quad C_2^4 = \frac{P_2^4}{2}$$

Secara umum, untuk setiap kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, kita dapat membentuk $P_k^k = k!$ permutasi. Oleh karena itu, terdapat hubungan antara kombinasi k unsur dari n unsur yang tersedia, yaitu C_k^n, dengan permutasi k unsur dari n unsur yang tersedia, yaitu P_k^n adalah

$$\boxed{C_k^n = \frac{P_k^n}{P_k^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}} \qquad (2.7)$$

Contoh 2.1.11
Hitunglah dari setiap kombinasi berikut.

a. C_2^5 b. C_4^6 c. C_5^{10} d. C_3^7

Penyelesaian:
Langsung kita gunakan rumus pada persamaan (2.7), diperoleh

a. $C_2^5 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{5!}{2!3!} = \dfrac{5\times4\times3\times2\times1}{(2\times1)(3\times2\times1)} = 5\times2 = 10$,

b. $C_4^6 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{6!}{4!2!} = \dfrac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{(4\times3\times2\times1)(3\times2\times1)} = 5$,

c. $C_5^{10} = \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = \dfrac{10!}{5!5!} = \dfrac{10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(5\times4\times3\times2\times1)(5\times4\times3\times2\times1)} = 2\times9\times2\times7 = 252$,

d. $C_3^7 = \dfrac{7!}{3!(7-3)!} = \dfrac{7!}{3!4!} = \dfrac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{(3\times2\times1)(4\times3\times2\times1)} = 7\times5 = 35$.

□

Contoh 2.1.12

Hitunglah nilai n, apabila $C_2^n = 4n+5$.

Penyelesaian:

Dari rumus pada persamaan (2.7) kita peroleh

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1}{(2\times1)((n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1)} = \frac{n\times(n-1)}{2}$$

Di pihak lain, diketahui bahwa $C_2^n = 4n+5$, sehingga diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} \frac{n\times(n-1)}{2} = 4n+5 &\Leftrightarrow n^2 - n = 8n+10 \\ &\Leftrightarrow n^2 - 9n - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow (n-10)(n+1) = 0 \\ &\Leftrightarrow n = 10 \text{ atau } n = -1 \end{aligned}$$

Karena n harus bilangan asli, maka n yang memenuhi adalah $n = 10$.

□

Pada bagian akhir ini, kita akan menyelesaikan masalah pembentukan tim olimpiade matematika yang diungkapkan pada awal bab.

Contoh 2.1.13

Tersedia 10 siswa yang memenuhi syarat menjadi tim olimpiade matematika suatu SMA. Dari sejumlah calon itu, 6 siswa pandai komputer, dan 4 siswa pandai bahasa Inggris. Tim yang dibentuk beranggotakan 3 siswa, yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai bahasa Inggris. Berapa banyak susunan yang mungkin dapat dibentuk?

Penyelesaian:

Dua anggota dipilih dari 6 orang calon yang pandai komputer, sehingga kombinasinya adalah $C_2^6 = \dfrac{6!}{2!(6-2)!} = 15$ cara. Seorang anggota dipilih dari 4 orang calon yang pandai Bahasa Inggris, sehingga kombinasinya $C_1^4 = \dfrac{4!}{1!(4-1)!} = 4$ cara. Dengan menggunakan aturan perkalian, banyak susunan tim olimpiade matematika yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai Bahasa Inggris adalah

$$C_2^6 \times C_1^4 = 15\times4 = 60$$

Jadi, banyak susunan tim olimpiade matematika yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai Bahasa Inggris yang dipilih dari 6 siswa pandai komputer dan 4 siswa pandai Bahasa Inggris adalah 60 susunan.

□

Latihan 2.1

Aturan Pengisian Tempat yang Tersedia

1. Suatu kelompok penari latar mempunyai:
   baju berwarna: merah, pink, biru, kuning dan hijau,
   rok pendek berwarna: putih, ungu dan coklat,
   sepatu berwarna: merah dan hitam.
   a. Gambarkan diagram pohon yang menghubungkan warna baju, warana rok pendek dan warna sepatu.
   b. Berapa banyak pasangan warna seragam yang dapat disusun ?
2. Suatu apartemen terdiri dari empat lantai, masing-masing lantai berturut-turut dihuni 12 orang, 8 orang, 6 orang dan 5 orang. Dari setiap lantai akan dipilih seorang wakil untuk dibentuk sebagai pengurus apartemen. Berapa cara susunan pengurus dapat dibentuk?
3. Perjalanan dari Jakarta ke Bandung dapat melalui 4 jalur, dari Bandung ke Yogyakarta dapat melalui 2 jalur, dan dari Yogyakarta ke Surabaya melalui 3 jalur. Berapa banyak jalur perjalanan yang dapat dipilih dari perjalanan-perjalanan berikut ini.
   a. Dari Jakarta ke Yogyakarta melalui Bandung.
   b. Dari Surabaya ke Jakarta melalui Yogyakarta.
   c. Dari Jakarta ke Surabaya melalui Bandung dan Yogyakarta.
4. Diberikan 11 huruf masing-masing *H, I, D, U, P, C, E, R, D, A,* dan *S*. Berapa banyak cara menyusun huruf itu, apabila disyaratkan:
   a. huruf pertamanya huruf vokal?
   b. huruf pertamanya huruf konsonan?
5. Dari lima buah angka 0, 1, 2, 3, dan 4 akan disusun bilangan-bilangan yang terdiri dari 4 angka. Berapa banyak cara untuk menyusun bilangan-bilangan itu, apabila:
   a. bilangan-bilangan boleh mempunyai angka yang sama?
   b. bilangan-bilangan tidak boleh mempunyai angka yang sama?

Permutasi

1. Hitunglah:
   a. $8! - 3!$ dan $(8 - 3)!$
   b. $6! \times 3!$ dan $(6 \times 3)!$
   c. Apakah $8! - 3! = (8 - 3)!$, dan $6! \times 3! = (6 \times 3)!$?
2. Tunjukkan bahwa:
   a. $\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!} = \frac{11}{4!}$ b. $\frac{3}{4!} + \frac{10}{5!} = \frac{5}{4!}$ c. $\frac{3}{8!} - \frac{2}{7!} + \frac{1}{6!} = \frac{43}{8!}$
3. Buktikan bahwa: untuk $n \geq 1$ berlaku $n! - (n-1)! = (n-1)!(n-1)$
4. Tentukan nilai-nilai permutasi berikut.
   a. P_3^5 b. P_5^{12} c. $3!P_2^7$

5. Berapa banyak bilangan yang terdiri dari 3 angka yang dibentuk dari angka-angka berikut ini.
   a. 1, 2, dan 3   b. 0, 2, 4, dan 6   c. 2, 5, 6, 7, 8, dan 9
6. Berapa banyak susunan huruf yang dapat disusun dari huruf-huruf berikut ini secara berdampingan.
   a. $R, U, K, U,$ dan N
   b. $K, E, R, J, A, S, A, M,$ dan A
   c. $S, T, A, T, I, S, T, I,$ dan K
7. Dalam kotak ada 5 balon yang dapat diambil satu persatu secara berurutan (tanpa pengembalian). Berapa banyak pasangan warna yang dapat terjadi apabila yang terambil:
   a. 2 balon merah dan 3 balon putih?
   b. 2 balon merah, 2 balon pink, dan 1 balon putih?
   c. 1 balon merah, 1 balon pink, dan 3 balon putih?
8. Hitunglah banyak permutasi siklis, jika unsur-unsur yang tersedia adalah:
   a. 5 unsur yang berlainan,
   b. 8 unsur yang berlainan.
9. Sebuah gelang memiliki 6 buah permata berlian dengan bentuk yang berbeda-beda. Keenam permata berlian itu dutempatkan pada keliling gelang. Berapa banyak susunan permata berlian yang terjadi?
10. Dari angka-angka berikut ini akan dibentuk bilangan-bilangan yang terdiri atas 3 angka dengan angka-angka boleh berulang. Berapa banyak susunan bilangan yang dapat dibentuk?
   a. 4, 5, dan 6,
   b. 4, 5, 6, dan 7,
   c. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7.

Kombinasi

1. Hitunglah kombonasi-kombinasi berikut.
   a. C_3^5 b. C_5^{12} c. $3!C_2^7$
2. Buktikan bahwa
   a. $C_3^{10} = C_7^{10}$ b. $C_4^{12} = C_8^{10}$ c. $C_k^n = C_{n-k}^n$
3. Hitunglah nilai n pada persamaan berikut.
   a. $C_4^{n+1} = C_3^n$ b. $C_3^{n+1} = 4C_2^n$ c. $C_2^n = 4n + 5$
4. Jumlah peserta ujian SIM kendaraan bermotor 50 orang. Dari 10 soal yang disediakan, setiap peserta hanya diminta mengerjakan 5 soal yang terdiri dari 2 soal nomor ganjil dan 3 soal nomor genap. Ada berapa cara yang dapat ditempuh oleh setiap peserta, jika setiap peserta tidak ada satupun yang mempunyai jawaban yang sama?
5. Tersedia 6 siswa laki-laki dan 4 siswa perempuan. Dibentuk regu P3K, dengan syarat satu regu terdiri dari 5 orang siswa yang sekurang-kurangnya beranggotakan 2 siswa perempuan. Berapa banyak cara pembentukan regu itu?

2.2 Ruang Sampel dan Kejadian

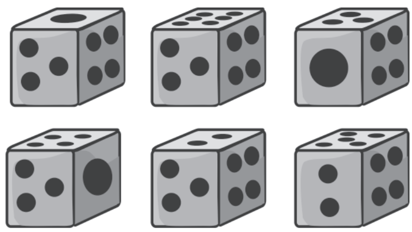
Sebagaimana telah disebutkan pada bagian awal, bahwa teori peluang bermula dari permainan judi. Dalam pembahasannya sering juga menggunakan alat peraga judi, misalnya kartu, dadu dan mata uang logam. Hal ini hanya untuk memperjelas konsep semata, bukan bertujuan agar siswa pandai judi.

Misalkan kita melemparkan sekeping mata uang logam atau sebuah dadu sisi enam. Kegiatan melempar itu (satu kali atau beberapa kali) disebut percobaan. Hasil percobaan melempar sekeping mata uang logam adalah muncilnya sisi gambar (G) atau munculnya sisi angka (A). Lihat gambar 2.7.

Gambar 2.7 Hasil percobaan melempar sekeping mata uang logam

Sumber. www.bi.go.id

Hasil percobaan melempar sebuah dadu sisi enam adalah salah satu dari enam sisi, yaitu mata dadu 1, 2, 3, 4, 5, dan 6, terlihat pada gambar 2.8.



Gambar 2.8 Hasil percobaan melempar sebuah dadu sisi enam

Meskipun dua contoh di atas tampaknya tidak serupa, tetapi sebenarnya pada setiap percobaan di atas memiliki 2 sifat dasar yang sama, yaitu:

1. Setiap jenis percobaan memiliki beberapa kemungkinan hasil yang disebut kejadian atau peristiwa. Kejadian dibedakan menjadi dua yaitu kejadian sederhana dan kejadian majemuk.
2. Secara pasti kita sangat sulit menentukan kemungkinan hasil apa yang akan terjadi pada setiap percobaan, misalnya dalam pelemparan sekeping mata uang logam, maka sulit bagi kita untuk menentukan secara pasti apakah dalam pelemparan tersebut akan keluar G atau A. Demikian pula pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam.

Himpunan dari semua hasil yang mungkin muncul pada suatu percobaan disebut ruang sampel atau ruang contoh, yang biasanya disimbolkan dengan S. Dalam percobaan pelemparan sekeping mata uang logam kita peroleh ruang sampel $S = \{ G, A \}$, sedangkan pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam ruang sampelnya adalah $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$. Anggota-anggota ruang sampel disebut titik sampel atau titik contoh. Ruang sampel pada percobaan pelemparan sekeping mata uang logam mempunyai 2 titik sampel, yaitu G dan A. Sedangkan pada percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam mempunyai titik sampel 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

2.2.1 Kejadian Sederhana

Kejadian sederhana adalah suatu kejadian yang hanya mempunyai satu titik sampel. Pada hasil percobaan pelemparan sekeping mata uang logam kejadian-kejadian sederhana adalah:

- $\{G\}$ yaitu kejadian muncul sisi gambar,
- $\{A\}$ yaitu kejadian muncul sisi angka.

Sedangkan pada hasil percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam kejadian-kejadian adalah:

- {1} yaitu kejadian muncul mata dadu 1,
- {2} yaitu kejadian muncul mata dadu 2,
- {3} yaitu kejadian muncul mata dadu 3,
- {4} yaitu kejadian muncul mata dadu 4,
- {5} yaitu kejadian muncul mata dadu 5,
- {6} yaitu kejadian muncul mata dadu 6.

Contoh 2.2.1

Tentukan ruang sampel dari percobaan sekali pelemparan 2 keping mata uang logam.

Penyelesaian:

Dengan membuat daftar hasil percobaan pelemparan 2 keping mata uang logam

Tabel 2.1 Hasil Percobaan Pelemparan 2 Mata Uang Logam

		Mata Uang 2	
		A	G
Mata Uang 1	A	(A, A)	(A, G)
	G	(G, A)	(G, G)

Kita peroleh ruang sampelnya adalah $S = \{\,(A,A), (G,A), (A,G), (A,A)\,\}$.

□

2.2.2 Kejadian Majemuk

Hasil yang dari melempar sebuah dadu sisi enam tidak harus selalu merupakan kejadian sederhana. Dimungkinkan kejadian-kejadian itu tersusun atas gabungan beberapa kejadian sederhana. Dengan kata lain, kejadian-kejadian itu terdiri dari lebih dari satu titik sampel, kejadian semacam ini disebut kejadian majemuk. Misalnya kejadian:

- {1, 3, 5} yaitu kejadian munculnya mata dadu ganjil,
- {2, 4, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu genap,
- {4, 5, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu lebih dari 3,
- {1, 3, 4, 6} yaitu kejadian munculnya mata dadu bukan 5 atau 2,
- {1,6} yaitu kejadian munculnya mata dadu paling kecil dan paling besar.

Dengan pengertian kejadian majemuk di atas, maka ruang sampel adalah kasus khusus kejadian majemuk. Lebih lanjut, jika kita buat analogi dengan konsep himpunan, maka kejadian sederhana merupakan himpunan dari kejadian majemuk. Lebih luas lagi, kita dapat membuat padanan antara himpunan dan kejadian, seperti pada tabel 2.2.

Tabel 2.2 Korespendensi antara Himpunan dan Kejadian

Teori Himpunan	Kejadian
Himpunan semesta	Ruang sampel S
Anggota himpunan	Titik sampel
Himpunan bagian	Kejadian
Himpunan bagian yang hanya mempunyai 1 anggota	Kejadian sederhana
Himpunan bagian yang mempunyai lebih dari 1 anggota	Kejadian majemuk

Latihan 2.2

1. Dalam suatu keluarga memiliki 3 orang anak, dua di antaranya adalah perempuan, tentukan ruang sampelnya.
2. Suatu keluarga dengan tiga orang anak, dapat mempunyai 3 anak lelaki, 2 anak lelaki dan 1 anak perempuan, 1 anak lelaki dan 2 anak perempuan, atau 3 anak perempuan. Misalkan bahwa (LLL) menotasikan keluarga dengan tiga anak lelaki, (LPP) keluarga dengan anak pertama lelaki dan kedua anak lainnya perempuan, dan (PLP) keluarga dengan anak perempuan sebagai anak pertama dan ketiga, dan anak lelaki sebagai anak kedua.
   a. Tulislah ruang sampel jenis susunan tiga bersaudara yang mungkin ditemukan.
   b. Apa yang dimaksudkan dengan kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai 2 anak perempuan dan 1 anak lelaki?
   c. Bagaimana mencatat kejadian bahwa suatu keluarga dengan tiga anak mempunyai sekurang-kurangnya seorang anak lelaki?
3. Dua buah dadu sisi enam dilempar bersama. Tentukan ruang sampelnya. Jika A adalah kejadian keluar jumlah mata dadu 9, B adalah kejadian keluar mata dadu pertama tidak lebih dari mata dadu kedua, dan C adalah kejadian keluar perkalian mata dadu adalah bilangan kuadrat, tulislah A, B dan C sebagai notasi himpunan.
4. Misalkan tiga buah dadu sisi enam dilempar sekaligus, berapa jumlah anggota ruang sampelnya. Misalkan A adalah kejadian keluar mata dadu berjumlah 7, tentukan A, dan tersusun atas berapa kejadian sederhana kejadian A?
5. Sekeping mata uang logam dan sebuah dadu sisi enam dilemparkan secara bersamaan. Hasil yang mungkin muncul pada percobaan ini dapat ditulis dalam bentuk pasangan berurutan. Misalnya:
   - (A, 5) adalah kejadian munculnya sisi angka untuk mata uang logam dan mata dadu 5.
   - (G, 3) adalah kejadian munculnya sisi gambar untuk mata uang logam dan mata dadu 3, ... dan seterusnya.

a. Berapa banyak titik sampel pada percobaan itu? Tulislah ruang sampelnya.
b. Tulislah kejadian-kejadian berikut ini dengan notasi himpunan.
   - kejadian munculnya sisi angka untuk mata uang dan sembarang angka untuk dadu.
   - kejadian munculnya sembarang sisi untuk mata uang dan angka prima untuk dadu.
   - kejadian munculnya sisi gambar untuk mata uang dan angka komposit untuk dadu.

2.3 Peluang Suatu Kejadian

Pada aktivitas sehari-hari kita sering melihat kejadian-kejadian yang mengandung makna kemungkinan, sebagai contoh "berapa besar kemungkinan terbentuk Tim Olimpiade Matematika dengan susunan susunan tertentu". "Berapa besar kemungkinan" adalah suatu contoh tentang kejadian yang belum tentu akan terjadi. Anto bersin-bersin *kemungkinan*nya terserang flu. Terserangnya flu juga contoh tentang kejadian yang belum tentu akan terjadi.

Kata-kata kemungkinan dan peluang juga banyak kita jumpai dalam permainan, misalnya percobaan pelemparan sekeping mata uang logam, percobaan pelemparan dadu sisi enam, dan percobaan pemgambilan satu kartu dari tumpukan kartu remi (*bridge*). Dalam matematika, teori yang mempelajari cara-cara perhitungan derjat keyakinan seseorang untuk menentukan terjadi atau tidak terjadinya suatu kejadian dipelajari dalam ilmu hitung peluang (*theory of probability*).

Terdapat beberapa pendekatan untuk menghitung peluang kejadian antara lain dengan pendekatan frekuensi nisbi atau relatif, pendekatan definisi peluang klasik, dan pendekatan dengan menggunakan ruang sampel. Dua pendekatan pertama telah kita pelajari bersama ketika SMP dulu. Oleh karena itu dalam buku ini akan kita pelajari pendekatan dengan menggunakan ruang sampel.

Contoh 2.3.1

Pada percobaan melempar sebuah dadu sisi enam, hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.
a. Kejadian munculnya mata dadu dengan angka kurang dari 3,
b. Kejadian munculnya mata dadu mata ganjil,
c. Kejadian munculnya mata dadu 2 atau 5.

Penyelesaian:

Pada percobaan melempar dadu sisi enam ada 6 hasil yang mungkin muncul, yaitu mata dadu dengan angka 1, 2, 3, 4, 5, atau 6, dan masing-masing hasil itu mempunyai kesempatan sama. Dengan demikian, $n = 6$.

a. Misalkan A adalah kejadian munculnya mata dadu dengan angka kurang dari 3. Angka-angka itu adalah 1 dan 2, sehingga $k = 2$.

   Jadi, peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

b. Misalkan B adalah kejadian munculnya mata dadu dengan angka ganjil. Angka-angka itu adalah 1, 3, dan 5, sehingga $k = 3$.

   Jadi, peluang kejadian B adalah $P(B) = \frac{k}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

c. Misalkan C adalah kejadian munculnya mata dadu 2 atau 5, sehingga $k = 2$. Angka-angka itu adalah 1, 3, dan 5, sehingga $k = 3$.

   Jadi, peluang kejadian C adalah $P(C) = \frac{k}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

□

Contoh 2.3.2

Dalam sebuah kotak berisi 6 bola berwarna merah dan 4 bola berwarna biru. Dari kotak itu diambil 3 buah bola secara acak. Berapa peluang kejadian munculnya, jika yang terambil itu:

a. semuanya merah?

b. 2 bola merah dan 1 bola biru?

Penyelesaian:

Kita akan memanfaatkan aturan kombinasi untuk menyelesaikan masalah ini. Dari 10 bola diambil 3 buah bola, seluruhnya ada:

$$n = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ cara}$$

a. 3 bola merah diambil dari 6 bola merah, seluruhnya ada

$$k = C_3^{6} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{10!}{3!3!} = 20 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil ketiga-tiganya bola merah adalah

$$P(3 \text{ bola merah}) = \tfrac{20}{120} = \tfrac{1}{6}$$

b. 2 bola merah dan 1 biru, seluruhnya ada

$$k = C_2^{6} \times C_1^{4} = \frac{6!}{2!4!} \times \frac{4!}{1!3!} = 15 \times 4 = 60 \text{ cara}$$

Jadi, peluang yang terambil 2 bola merah dan 1 biru adalah

$$P(2 \text{ bola merah dan 1 bola biru}) = \tfrac{60}{120} = \tfrac{1}{2}$$

□

Kita kembali kepda masalah penentuan anggota tim olimpiade matematika pada awal bab, yang banyak susunan tim yang mungkin terjadi telah dijelaskan pada contoh 2.1.11.

Contoh 2.3.3

Tersedia 10 siswa yang memenuhi syarat menjadi tim olimpiade matematika suatu SMA. Dari sejumlah calon itu, 6 siswa pandai komputer, dan 4 siswa pandai bahasa Inggris. Tim yang dibentuk beranggotakan 3 siswa, yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai bahasa Inggris. Berapa peluang untuk memperoleh susunan tim seperti ini

Penyelesaian:

Dengan aturan kombinasi, dari 10 siswa dipilih 3 siswa, hasil yang mungkin seluruhnya ada

$$n = C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!7!} = 120 \text{ cara.}$$

Dari contoh 2.1.11, susunan tim yang mungkin yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai bahasa Inggris adalah sebanyak 60 cara. Jadi, peluang untuk memperoleh tim olimpiade matematika yang terdiri dari 2 siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai bahasa Inggris adalah

$$P(2 \text{ siswa pandai komputer dan 1 siswa pandai Bahasa Inggris}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

□

Pendekatan dengan Menggunakan Ruang Sampel

Pendekatan peluang yang ditentukan dengan pendekatan definisi peluang klasik yang rumusnya diberikan oleh persamaan (2.8) dapat pula ditentukan dengan menggunakan pengertian ruang sampel.

Definisi (Peluang dengan Menggunakan Ruang Sampel)
Misalkan *S* adalah ruang sampel suatu percobaan yang setiap anggota dari *S* mempunyai kesempatan sama untuk muncul. Jika *E* adalah suatu kejadian dengan $E \subseteq S$, maka peluang kejadian *E* diberikan oleh

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} \tag{2.8}$$

dengan $n(E)$ adalah cacah anggota dalam himpunan kejadian *E*, adalah cacah anggota dalam himpunan ruang sampel *S*.

Dengan rumus pada persamaan (2.8) ini kita dapat menentukan kisaran besarnya peluang suatu kejadian. Kita ingat kembali dari teori himpunan bahwa himpunan kosong $(\varnothing)$ adalah himpunan bagian dari setiap himpunan. Oleh karena itu kita mempunyai hubungan

$$\varnothing \subseteq E \subseteq S$$

Akibatnya, karena $n(\varnothing) = 0$, maka

$$0 = n(\varnothing) \le n(E) \le n(S)$$

Jika ketaksamaan terakhir ini, kita bagi dengan $n(S)$, maka

$$\frac{0}{n(S)} \le \frac{n(E)}{n(S)} \le \frac{n(S)}{n(S)} \quad \text{atau} \quad 0 \le P(E) \le 1$$

Dari hasil ini, kita dapat menyimpulkan bahwa kisaran peluang kejadian *E* mempunyai batas dari 0 sampai dengan 1. Dalam hal $P(E) = 0$ kita sebut kejadian *E* sebagai kejadian yang mustahil terjadi, sedangkan dalam hal $P(E) = 1$ kita sebut kejadian *E* sebagai kejadian yang pasti terjadi.
Misalkan ditanyakan berapa peluang kejadian munculnya mata dadu 7 dari hasil lemparan sebuah dadu sisi enam. Berapa kalipun dadu dilempar, mata dadu 7 tidak akan pernah muncul. Kejadian ini adalah contoh kejadian yang mustahil terjadi. Tentu semua kejadian munculnya mata dadu yang lebih besar dari 6, yaitu S^c = {7, 8, 9,… } adalah kejadian yang mustahil terjadi. Secara umum, untuk sembarang ruang sampel *S* yang *pasti* muncul sebagai dilakukannya suatu percobaan, maka S^c adalah kejadian yang mustahil terjadi. Dalam hal ini jelas bahwa

$$P(S) = 1 \text{ dan } P(S^c) = 0$$

Contoh 2.3.4

Tiga keping mata uang logam dilemparkan secara bersamaan. Hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.

a. Kejadian munculnya tiga sisi gambar.
b. Kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka.

Penyelesaian:

Ruang sampel dari percobaan melemparkan tiga keping mata uang logam secara bersamaan adalah

$$S = \{(AAA), (AAG), (AGA), (AGG), (GAA), (GAG), (GGA), (GGG)\},$$

sehingga $n(S) = 8$.

a. Misalkan E adalah kejadian munculnya tiga sisi gambar, maka $E = \{(GGG)\}$ dan $n(E) = 1$.

   Jadi, menurut rumus (2.9) peluang kejadian munculnya tiga sisi gambar adalah

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{8}$$

b. Misalkan F adalah kejadian munculnya dua sisi gambar dan satu sisi angka, maka

$$F = \{(AGG), (GAG), (GGA)\} \text{ dengan } n(F) = 3$$

   Jadi, peluang kejadian munculnya tiga sisi gambar dan satu sisi angka adalah

$$P(F) = \frac{n(F)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

□

Contoh 2.3.5

Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali secara bersamaan. Hitunglah nilai peluang kejadian-kejadian berikut.

a. Kejadian munculnya mata dadu pertama 5.
b. Kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua adalah bilangan prima.
c. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8.

Penyelesaian:

Ruang sampel percobaan melempar dua buah dadu sisi enam secara bersama-sama adalah himpunan S yang anggotanya adalah semua pasangan berurutan pada tabel 2.3.

Tabel 2.3 Ruang Sampel Percobaan Pelemparan Dua Dadu Sisi Enam

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Cacah anggota S, $n(S) = 6 \times 6 = 36$.

a. Misalnya E_1 adalah kejadian munculnya mata dadu pertama 5, maka

$E_1 = \{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$ sehingga $n(E_1) = 6$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu pertama 5 adalah

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

b. Misalnya E_2 adalah kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua adalah bilangan prima, maka

$E_2 = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3),(3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$ sehingga $n(E_2) = 9$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu pertama dan mata dadu kedua bilangan prima adalah

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

c. Misalnya E_3 adalah kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8, maka

$E_3 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$ sehingga $n(E_3) = 5$

Jadi, peluang kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu adalah 8 adalah

$$P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

□

2.3.1 Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Kita masih ingat bahwa jika sekeping mata uang logam dilemparkan sekali, maka peluang kejadian munculnya sisi angka dan sisi gambar adalah sama, yaitu

$$P(A) = P(G) = \tfrac{1}{2}$$

Jika uang logam di atas kita lemparkan 20 kali, maka diharapkan

munculnya sisi angka = $\tfrac{1}{2} \times 20 = 10$ dan munculnya sisi gambar = $\tfrac{1}{2} \times 20 = 10$

Meskipun pada prakteknya harapan dan kenyataan belum tentu sama. Bilangan 10 yang menyatakan harapan banyak kejadian munculnya sisi angka disebut frekuensi harapan kejadian munculnya sisi angka pada percobaan melempar sekeping uang logam sebanyak 20 kali. Bilangan 10 yang kedua menyatakan harapan banyak kejadian munculnya sisi gambar disebut frekuensi harapan kejadian munculnya sisi gambar pada percobaan melempar sekeping uang logam sebanyak 20 kali. Dengan demikian, frekuensi harapan adalah banyak kejadian yang diharapkan dapat terjadi pada sebuah percobaan. Penjelasan di atas juga menyarakan bagaimana cara menghitung besarnya frekuensi harapan dari suatu kejadian.

Misalkan sebuah percobaan dilakukan sebanyak n kali dan $P(E)$ adalah peluang kejadian E. Besarnya frekuensi harapan kejadian E adalah

$$F_h(E) = n \times P(E) \qquad (2.9)$$

Contoh 2.3.6

Proyek penghijauan pada sebuah perkebunan setiap batang bibit tanaman mempunyai peluang hidup sama 0,9. Jika pada perkebunan itu ditanam sebanyak 1000 batang bibit tanaman, berapa banyak bibit tanaman yang diharapkan hidup.

Penyelesaian:

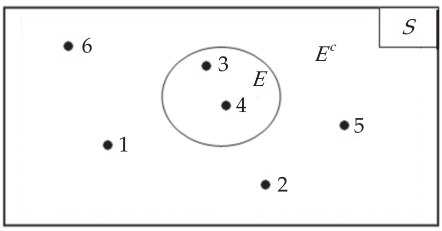
Banyak bibit tanaman adalah n = 1000. Misalkan E adalah kejadian batang bibit tanaman hidup, maka $P(E)$ = 0,9. Jadi, banyak bibit tanaman yang diharapkan hidup adalah

$$F_h(E) = n \times P(E) = 1000 \times 0,9 = 900 \text{ batang.}$$

□

2.3.2 Peluang Komplemen Suatu Kejadian

Untuk memahami pengertian komplemen suatu kejadian, kita perhatikan kembali percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam dengan ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Misalkan E adalah kejadian munculnya mata dadu 3 atau 4, yaitu E = {3,4 }. Misalkan E^c adalah kejadian munculnya mata dadu bukan 3 dan 4, yaitu $E^c = \{1, 2, 5, 6\}$, maka E^c disebut komplemen kejadian dari E. dengan notasi himpunan hubungan E, E^c, dan S dapat ditunjukkan dengan diagram Venn berikut ini.



Gambar 2.8 Diagram Venn hubungan E, E^c, dan S

Dalam hal ini $n(E) = 2$, $n(E^c) = 4$ dan $n(S) = 6$, sehingga berlaku hubungan:

$$n(E) + n(E^c) = n(S)$$

Jika kedua ruas kita bagi dengan $n(S)$, maka diperoleh

$$\frac{n(E)}{n(S)} + \frac{n(E^c)}{n(S)} = 1$$

Dengan pengertian rumus (2.8): $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)}$ dan $P(E^c) = \dfrac{n(E^c)}{n(S)}$, maka

$$P(E) + P(E^c) = 1 \iff P(E^c) = 1 - P(E)$$

Secara umum rumus ini benar untuk sembarang kejadian.

Jika E^c adalah komplemen kejadian E, maka peluang kejadian adalah

$$P(E^c) = 1 - P(E) \qquad (2.10)$$

dengan $P(E)$ adalah peluang kejadian E, dan adalah peluang kejadian .

Contoh 2.3.7

Berdasarkan laporan dari PLN bahwa pada desa Sejuk Hati dalam sebulan ada 25 hari listrik tidak padam. Berapa peluang kejadian listrik padam dalam sebulan?

Penyelesaian:

Misalkan E adalah kejadian listrik tidak padam dalam kurun waktu sebulan, maka $P(E) = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$. Komplemen kejadian E adalah E^c, yaitu kejadian listrik padam dalam kurun waktu sebulan. Oleh karena itu berlaku hubungan

$$P(E^c) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Jadi, peluang kejadian listrik padam dalam kurun waktu sebulan adalah $\frac{1}{6}$.

□

Latihan 2.3

1. Di dalam sebuah kantong berisi 10 bola kecil merah dan 30 bola kecil hijau. Jika diambil secara acak, berapakah peluang kejadian sebuah bola merah terambil?
2. Di dalam kantong ada 4 kelereng Merah (M), 4 kelereng Kuning (K), dan 4 kelereng Hijau (H). Dipilih secara acak sebuah kelereng. Tentukan ruang sampel dari percobaan itu. Apakah setiap kejadian sederhana dapat muncul dengan kesempatan yang sama? Tentukan $P(M)$, $P(K)$, $P(H)$, dan $P(M^c)$.
3. Jika ke dalam kantong pada soal 2 ditambahkan sebuah kelereng merah, tentukan ruang sampel percobaan memilih secara acak sebuah kelereng. Apakah setiap kejadian sederhana dapat muncul dengan kesempatan yang sama? Tentukan $P(M)$, $P(K)$, $P(H)$, dan $P(M^c)$.
4. Dari huruf A, B, dan C dibentuk susunan huruf denagn huruf-huruf boleh berulang. Dari susunan yang diperoleh itu diambil sebuah susunan. Hitunglah peluang kejadian yang terambil itu:
   a. sebuah susunan dengan huruf-huruf yang berbeda?
   b. sebuah susunan dengan huruf-huruf yang sama?
5. Dalam sebuah kolam terdapat 10 ekor ikan emas dan 5 ekor ikan gurame. Dari kolam itu akan dipancing 4 ikan. Berapa nilai peluang jika yang terpancing adalah:
   a. keempat-empatnya ikan emas?
   b. 1 ekor ikan emas 3 dan ekor ikan gurame?
   c. 2 ekor ikan emas dan 2 ekor ikan gurame?

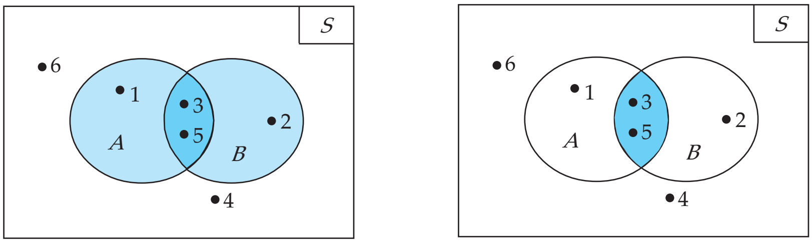
6. Dua buah dadu sisi enam dilempar sebanyak 120 kali. Hitunglah frekuensi harapan kejadian-kejadian berikut.
   a. Kejadian munculnya mata dadu pertama 4.
   b. Kejadian munculnya mata dadu kedua angka genap.
   c. Kejadian munculnya mata dadu pertama sama dengan mata dadu kedua.
   d. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu sama dengan 8.
   e. Kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu bilangan ganjil.
7. Suatu perusahaan komponen elektronik memproduksi 5.000 buah transistor. Jika setiap transistor mempunyai peluang hidup 0,95, berapa banyak transistor yang diharapkan hidup?
8. Sebagai pemain sirkus pemula, Yayan berlatih naik sepeda roda satu. Jika peluang jatuh adalah 0,64.
   a. Berapa peluang Yayan tidak jatuh?
   b. Jika latihan dilaksanakan 60 kali, berapa kali latihan itu yang diharapkan tidak jatuh?
9. Sebuah bola dimabil dari kotak yang berisi 10 bola merah, 4 bola kuning, dan 6 bola hijau. Hitunglah peluang kejadian yang terambil itu adalah:
   a. bola merah
   b. bola kuning
   c. bukan bola merah
   d. bukan bola hijau
10. Dari 10 siswa SMA yang terdiri dari 6 pria dan 4 wanita akan dibentuk tim Olimpiade yang terdiri dari 3 orang. Berapa peluang terbentuknya sebuah tim yang terdiri dari:
    a. ketiga-tiganya siswa pria?
    b. ketiga-tiganya bukan siswa pria?
    c. paling banyak 2 orang siswa pria?
    d. sekurang-kurangnya 1 siswa wanita?

2.4 Peluang Kejadian Majemuk

Kita perhatikan kembali ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dari hasil percobaan pelemparan sebuah dadu sisi enam. Misalkan A adalah kejadian Munculnya mata dadu ganjil, ditulis $A = \{1, 3, 5\}$, dan B adalah kejadian munculnya mata dadu prima, ditulis $B = \{2, 3, 5\}$. Dari kedua kejadian tersebut kita dapat memperoleh dua kejadian:

- Kejadian munculnya mata dadu angka ganjil *atau* mata dadu angka prima, yang dengan notasi himpunan dapat kita tuliskan sebagai
$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$
- Kejadian munculnya mata dadu angka ganjil *dan* mata dadu angka prima, yang dengan notasi himpunan dapat kita tuliskan sebagai
$$A \cap B = \{3, 5\}$$

Ilustrasi dari kedua kejadian itu dapat kita perhatikan pada diagram Venn berikut.



Gambar 2.9 Kejadian gabungan dan irisan

2.4.1 Peluang Gabungan Dua Kejadian

Dengan menggunakan sifat-sifat gabungan dua himpunan kita dapat menghitung peluang gabungan dua kejadian. Kita ingat kembali bahwa banyak anggota dari himpunan $A \cup B$ adalah:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Jika kedua ruas kita bagi dengan $n(S)$, dengan $n(S)$ adalah banyak anggota dalam ruang sampel *S*, maka kita peroleh

$$\frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

Menurut definisi peluang menggunakan ruang sampel persamaan (2.8), maka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Hasil berlaku umum untuk sembarang kejadian di dalam ruang sampel *S*.

Aturan Penjumlahan

Jika A dan B adalah sembarang dua kejadian di dalam ruang sampel *S*, maka peluang kejadian $A \cup B$ adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad (2.11)$$

Contoh 2.4.1

Sebuah dadu sisi enam dilemparkan sekali, berapakah peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap atau angka yang habis dibagi 3?

Penyelesaian:

Ruang sampel $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ dengan $n(S) = 6$. Misal A kejadian munculnya mata dadu angka genap, dan B kejadian munculnya mata dadu angka yang habis dibagi 3, maka

$$A = \{2,4,6\}, \quad B = \{3,6\}, \text{ dan } A \cap B = \{6\}$$

dengan $n(A) = 3$, $n(B) = 2$, dan $n(A \cap B) = 1$. Dalam hal ini,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \text{ dan } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Dengan rumus pesamaan (2.11) kita peroleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

Jadi, peluang kejadian munculnya mata dadu angka genap atau angka yang habis dibagi 3 adalah $\frac{2}{3}$.

□

Contoh 2.4.2

Dalam satu set kartu *bridge* ada 52 kartu, terdiri atas 13 kartu sekop (♠) berwarna hitam, 13 kartu cengkeh (♣), 13 kartu hati (♥) berwarna merah, dan 13 kartu berlian (♦) berwarna merah. Setiap jenis terdiri atas kartu bernomor 2, 3, 4, ..., 10, Jack (*J*), Ratu (*Q*), Raja (*K*), dan As (*A*). Jika diambil satu kartu darisatu set kartu *bridge*, berapakah peluang kejadian yang terambil satu kartu berwarna hitam atau satu kartu *K*.

Penyelesaian:

Jumlah kartu yang berwarna hitam ada 26 buah, yaitu dari sekop dan cengkeh. Misalkan *A* kejadian munculnya kartu hitam, maka

$$P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Misalkan *B* adalah kejadian munculnya kartu *K*. Karena terdapat 4 kartu *K*, maka

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

Tetapi dari 4 kartu *K* terdapat 2 kartu *K* yang hitam, yaitu dari sekop dan cengkeh, sehingga

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Oleh karena itu, peluang terambil 1 kartu hitam atau 1 karu *K* adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{13} - \frac{1}{26} = \frac{7}{13}$$

Jadi, peluang kejadian yang terambil satu kartu berwarna hitam atau satu kartu *K* adalah $\frac{7}{13}$.

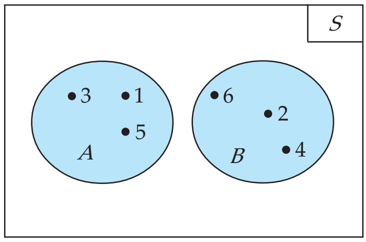
□

2.4.2 Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Lepas

Misalkan pada percobaan melempar sekali dadu sisi enam terjadi dua kejadian:

- Kejadian *A* adalah kejadian munculnya mata dadu ganjil, yaitu $A = \{1, 3, 5\}$.
- Kejadian *B* adalah kejadian munculnya mata dadu genap, yaitu $B = \{2, 4, 6\}$.

Mudah kita pahami bahwa $A \cap B = \varnothing$, dalam kondisi seperti ini kita katakan bahwa kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang lepas. Diagram Venn dari dua kejadian ini diperlihatkan oleh gambar 2.10 berikut.



Gambar 2.10 Dua kejadian saling lepas

Karena $A \cap B = \varnothing$, maka $P(A \cap B) = 0$. Oleh karena itu, jika hasil ini kita subtitusikan ke dalam rumus persamaan (2.11) kita peroleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 0 \quad \text{atau} \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Hal ini berlaku secara umum untuk sembarang dua kejadian saling lepas.

Jika A dan B adalah dua kejadian saling lepas dalam ruang sampel S, maka peluang kejadian $A \cup B$ adalah

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{2.12}$$

Contoh 2.4.3

Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set kartu *bridge*. Berapakah peluang kejadian yang terambil adalah kartu sekop atau kartu berwarna merah?

Penyelesaian:

Misalkan A adalah kejadian yang terambil kartu sekop, maka $n(A) = 13$,

$$P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Jumlah kartu yang berwarna merah ada 26 buah, yaitu hati dan berlian. Misalkan B kejadian munculnya kartu hitam, maka

$$P(B) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

Karena A dan B adalah dua kejadian yang saling lepas, maka menurut (2.13)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Jadi, peluang kejadian terambil kartu sekop atau kartu berwarna merah adalah $\frac{3}{4}$.

□

2.4.3 Peluang Gabungan Dua Kejadian yang Saling Bebas

Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali secara serentak. Misalkan:

- Kejadian A adalah kejadian munculnya mata dadu pertama angka 3, yaitu
  A = { (3, 1), (3,2), (3,3),(3,4), (3,5), (3,6) }.
- Kejadian B adalah kejadian munculnya mata dadu kedua angka 5, yaitu
  B = { (1, 5), (2,5), (3,5),(4,5), (5,5), (6,5) }.

Kejadian munculnya angka 1 pada dadu pertama tidak dipengaruhi oleh kejadian munculnya angka 5 pada dadu kedua, dan sebaliknya. Dalam hal ini, A dan B dikatakan dua kejadian saling bebas. Secara umum,

Kejadian A dan kejadian B dikatakatan dua kejadian saling bebas jika kejadian A tidak dipengaruhi oleh kejadian B atau sebaliknya kejadian B tidak dipengaruhi oleh kejadian A.

Sebagai catatan : bedakan pengertian dua kejadian saling lepas dan dua kejadian saling bebas.

Kembali pada dua kejadian saling bebas A dan B pada pelemparan dua buah dadu sisi enam di atas. Hasil percobaan diberikan oleh Tabel 2.4 di bawah.

Tabel 2.4 Hasil Percobaan Pelemparan Dua Dadu Sisi Enam

		Dadu Kedua					
		1	2	3	4	5	6
Dadu Pertama	1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
	2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
	3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
	4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
	5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
	6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Dari hasil percoban itu tampak bahwa $A \cap B = \{(3,5)\}$, lihat perpotongan kolom dan baris yang diwarnai. Lebih lanjut,

$$n(S) = 36,\ n(A) = 6,\ n(B) = 6,\ \text{dan}\ n(A \cap B) = 1,$$

sehingga

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6},\ \text{dan}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}.$$

Tampak bahwa dari bilangan-bilangan ini terdapat hubungan

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Hasil ini berlaku umum untuk sembarang dua kejadian saling bebas.

Jika A dan B adalah dua kejadian saling bebas, maka berlaku:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \tag{2.13}$$

Sebaliknya, jika $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$, maka kejadian A dan kejadian B tidak bebas.

Contoh 2.4.4

Dua buah dadu sisi enam dilempar secara serentak sekali. Kejadian A adalah kejadian munculnya angka 3 pada dadu pertama, sedangkan kejadian B adalah kejadian munculnya jumlah angka kedua dadu sama dengan 8. Periksa, apakah kejadian A dan B adalah dua kejadian yang saling bebas?

Penyelesaian:

Ruang sampel dari percobaan ini tertuang pada tabel 2.4, dengan $n(S) = 36$.

Kejadian $A = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$, $n(A) = 6$, dan

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Kejadian $B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, $n(B) = 5$, dan

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

Kejadian $A \cap B = \{(3,5)\}$, dengan $n(A \cap B) = 1$, dan

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}.$$

Dengan hasil perhitungan ini, kita peroleh

$$\frac{1}{36} \neq \frac{1}{6} \times \frac{5}{36} \quad \text{atau} \quad P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$$

Dari persamaan (2.14), kejadian A dan kejadian B adalah dua kejadian yang tidak saling bebas.

□

Contoh 2.4.5

Misalkan A dan B adalah kejadian yang saling bebas, tetapi tidak saling lepas. Jika $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$, hitunglah peluang kejadian B.

Penyelesaian:

Karena kejadian A dan kejadian B saling bebas, maka berlaku

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Dari yang diketahui diperoleh

$$P(A \cap B) = \tfrac{1}{2} P(B)$$

Karena A dan B tidak lepas, maka berlaku hubungan :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Subtitusi $P(A) = \tfrac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \tfrac{3}{4}$, dan $P(A \cap B) = \tfrac{1}{2} P(B)$, diperoleh:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + P(B) - \frac{1}{2} P(B) \quad \Leftrightarrow \frac{1}{2} P(B) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow P(B) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Jadi, peluang kejadian B adalah $P(A) = \dfrac{1}{2}$.

□

Latihan 2.4

1. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan sekali, hitunglah peluang kejadian akan muncul:
   a. jumlah mata dadu paling besar 4,
   b. jumlah mata dadu 5,
   c. jumlah mata dadu 7 atau lebih besar dari 7.
2. Seorang pelamar menerima panggilan untuk ujian di tiga perusahaan X, Y dan Z. Menurut perkiraannya peluang diterima pada masing-maing perusahaan masing-masing adalah $\dfrac{2}{5}$, $\dfrac{3}{10}$, dan $\dfrac{1}{10}$. Berapa peluang dari kejadian:
   a. pelamar tidak diterima di salah satu perusahaan,
   b. pelamar tidak diterima di perusahaan X atau Y,
   c. pelamar diterima di salah satu perusahaan.
3. Suatu kelas terdiri 120 siswa, 60 siswa senang sepak bola, 50 siswa senang bola basket, dan 20 siswa senang keduanya. Jika seorang siswa dipilih dari kelas itu secara acak, berapa peluang:
   a. dia senang sepak bola atau basket,
   b. dia sama sekali tidak senang sepak bola ataupun basket.
4. Selama satu minggu sebuah stasiun TV mempunyai 20 program acara, 8 diantaranya berisi infotainment, 9 acara berkaitan olah raga dan 5 mata acara berisi infotainment dan sekaligus olah raga. Jika Tobing memilih satu acara secara acak, berapakah peluang Tobing akan mendapatkan program acara yang berisi infotainment atau olah raga atau keduanya?

5. Suatu kelas terdiri 20 siswa dan 40 siswi, dengan 10 siswa dan 20 siswi mempunyai nilai ulangan matematika lebih dari 80. Hitunglah peluang seseorang yang dipilih secara acak adalah seorang siswa atau seseorang yang mempunyai nilai lebih dari 80.
6. Hasil survei yang dilaksanakan di sebuah sekolah tentang hobi menghasilkan data sebagai berikut: 10% siswa tidak hobi sepak bola; 65% siswa hobi sepak bola; dan 5% siswa tidak hobi sepak bola tetapi hobi bulu tangkis. Dari data ini dipilih secara acak satu orang siswa, berapa peluang siswa itu hobi sepak bola tetapi tidak hobi bulu tangkis?
7. Dalam kotak I terdapat 4 balon merah dan 3 balon putih, sedangkan pada kotak II terdapat 7 balon merah dan 2 balon hitam. Dari masing-masing kotak diambil satu balon secara acak. Hitunglah peluang yang terambil itu:
   a. balon merah dari kotak I dan balon merah dari kotak II
   b. balon merah dari kotak I dan balon hitam dari kotak II
   c. balon putih dari kotak I dan balon merah dari kotak II
   d. balon putih dari kotak I dan balon hitam dari kotak II
8. Diketahui $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{5}$, dan $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$. Tunjukkan bahwa kejadian A dan kejadian B saling bebas.
9. Misalkan A dan B adalah kejadian yang saling bebas, tetapi tidak saling lepas. Jika $P(A)=\frac{1}{3}$ dan $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$, hitunglah peluang kejadian B.
10. Misalkan A dan B adalah kejadian yang saling bebas. Jika $P(A)=\frac{1}{3}$ dan $P(B)=\frac{2}{3}$, hitunglah
    a. $P(A\cap B)$
    b. $P(A\cup B)$
    c. $P(A^c\cap B^c)$
    d. $P(A^c\cup B^c)$

2.5 Peluang Kejadian Bersyarat

Untuk memahami peluang dari kejadian bersyarat kita ikuti percobaan pelemparan dadu sisi enam sebayak satu kali. Misalkan kejadian munculnya mata dadu angka ganjil disyaratkan munculnya kejadian mata dadu angak prima lebih dahulu.

Ruang sampel percobaan adalah $S=\{1,2,3,4,5,6\}$. Misalkan $A=\{2,3,5\}$ adalah kejadian munculnya mata dadu angka prima. Kita anggap $A=\{2,3,5\}$ sebagai ruang sampel baru untuk kejadian munculnya mata dadu angka ganjil $B=\{3,5\}$. Dalam hal ini, munculnya kejadian B muncul tergantung atau disyaratkan kemunculan kejadian A lebih dahulu, kejadian semacam ini disebut kejadian bersyarat.

Secara umum, munculnya kejadian A dengan kejadian B muncul terlebih dahulu ditulis $A|B$. Sebaliknya, munculnya kejadian B dengan kejadian A muncul terlebih dahulu ditulis $B|A$.

Bagaimana menghitung peluang kejadian bersyarat, kita kembali pada percobaan di atas.

Pertama, dalam ruang sampel semula $S=\{1,2,3,4,5,6\}$, dengan $A=\{2,3,5\}$, $B=\{3,5\}$, maka $A\cap B=\{3,5\}$. Dengan demikian, kita peroleh:

$$P(A)=\frac{1}{2},\; P(B)=\frac{1}{3}, \text{ dan } P(A\cap B)=\frac{1}{3}.$$

Kedua, dalam ruang sampel yang baru $A = \{2,3,5\}$, $n(A) = 3$. Kejadian bersyarat $B|A = \{3,5\}$, $n(B|A) = 2$. Peluang kejadian bersyarat $B|A$ adalah

$$P(B \mid A) = \frac{n(B \mid A)}{n(B)} = \frac{2}{3},$$

karena kejadian bersyarat $B|A$ terjadi di dalam ruang sampel B.
Dari kedua perhitungan di atas, kita peroleh hubungan bahwa

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & = & \frac{1}{2} & \times & \frac{2}{3} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow & & \Updownarrow \\ P(A \cap B) & = & P(B) & \times & P(B \mid A) \end{array}$$

Dari hasil ini, maka kita peroleh

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ asalkan } P(B) \neq 0$$

Pembahasan di atas mengarah hasil yang berlaku secara umum untuk kejadian bersyarat.

1. Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi lebih dahulu adalah

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ asalkan } P(B) \neq 0 \qquad (2.14a)$$

2. Peluang kejadian A dengan syarat kejadian B terjadi lebih dahulu adalah

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \text{ asalkan } P(A) \neq 0 \qquad (2.14b)$$

Contoh 2.5.1

Sebuah kotak berisi bola hitam dan bola putih, dan setiap bola yang ada diberi tanda X atau Y. Komposisi bola-bola yang ada dalam kotak tersebut adalah:

Tabel 2.5

Tanda	Hitam (B)	Putih (W)	Total
X	5	3	8
Y	1	2	3
Total	6	5	11

Dipilih satu bola secara acak dari kotak tersebut. Tentukan peluang dari kejadian terambil bola hitam bertanda X.

Penyelesaian:

Masalah ini dapat kita pandang sebagai peluang kejadian munculnya bola hitam B dengan syarat bola bertanda X muncul lebih dahulu. Terdapat 8 bola bertanda X dari total 11 bola, sehingga peluang kejadian munculya X adalah

$$P(X) = \frac{8}{11}$$

Dari 8 bola bertanda X terdapat 5 bola berwarna hitam (*B*), sehingga $B \cap X = 5$, dan

$$P(B \cap X) = \frac{5}{11}$$

Dengan rumus persamaan (2.15) kita peroleh

$$P(B / X) = \frac{P(B \cap X)}{P(X)} = \frac{\frac{5}{11}}{\frac{8}{11}} = \frac{5}{8}$$

Jadi, peluang kejadian terambil bola hitam bertanda X adalah $P(B \mid X) = \frac{5}{8}$.

□

Contoh 2.5.2

Dalam supermarket terdapat 12 ibu-ibu dan 4 orang remaja yang sedang berbelanja. Kemudian dari mereka dipilih secara acak 3 orang untuk mendapatkan 3 undian berhadiah, dan setiap orang hanya berhak memperoleh 1 hadiah. Tentukan peluang dari kejadian:

a. ketiga undian dimenangkan oleh ibu-ibu
b. undian 1 dimenangkan remaja
   undian 2 dimenangkan oleh ibu-ibu
   undian 3 dimenangkan remaja
c. terdapat 2 undian yang dimenangkan remaja dan 1 undian dimenangkan oleh ibu-ibu

Penyelesaian:

Misalkan I adalah kejadian ibu-ibu memenangkan undian, dan R adalah kejadian remaja memenangkan undian.

a. Peluang ketiga undian dimenangkan oleh ibu-ibu.
   Peserta undian adalah 16 orang terdiri dari 12 orang ibu-ibu dan 4 orang remaja. Peluang ibu-ibu untuk memenangkan undian pertama adalah

$$P(I_1) = \frac{12}{16}$$

   Peluang ibu-ibu untuk memenangkan undian kedua, setelah 1 ibu-ibu memenangkan undian pertama (peluang bersyarat), adalah

$$P(I_2 \mid I_1) = \frac{11}{15}$$

   Peluang ibu-ibu untuk memenangkan undian ketiga, setelah 2 ibu-ibu memenangkan undian pertama dan kedua, adalah

$$P(I_3 \mid I_2, I_1) = \frac{10}{14}$$

   Dengan memperumum rumus (2.14) untuk tiga kejadian kita peroleh

$$\begin{aligned} P(I_1 \cap I_2 \cap I_3) &= P(I_1) \times P(I_2 / I_1) \times P(I_3 / I_1, I_2) \\ &= \frac{12}{16} \times \frac{11}{15} \times \frac{10}{14} = 0{,}392 \end{aligned}$$

   Jadi, peluang ketiga undian dimenangkan oleh ibu-ibu adalah 0,392.

b. Peluang remaja untuk memenangkan undian pertama adalah

$$P(R_1) = \frac{4}{16}$$

Peluang ibu-ibu untuk memenangkan undian kedua, setelah 1 remaja memenangkan undian pertama (peluang bersyarat), adalah

$$P(I \mid R_1) = \frac{11}{15}$$

Peluang remaja untuk memenangkan undian ketiga, setelah 1 remaja dan 1 ibu-ibu memenangkan undian pertama dan kedua, adalah

$$P(R_2 \mid R_1, I) = \frac{3}{14}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap I \cap R_2) &= P(R_1) \times P(I / R_1) \times P(R_2 / R_1, I) \\ &= \frac{4}{16} \times \frac{12}{15} \times \frac{3}{14} = 0,0428. \end{aligned}$$

Jadi, peluangu undian 1 dimenangkan remaja, undian 2 dimenangkan oleh ibu-ibu, dan undian 3 dimenangkan remaja adalah 0,0428.

c. Terdapat tiga kemungkinan, dan serupa dengan jawaban b:

$$P(R_1 \cap I \cap R_2) = \frac{4}{16} \times \frac{12}{15} \times \frac{3}{14} = 0,0428$$

$$P(R_1 \cap I \cap R_2) = \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} \times \frac{12}{14} = 0,0428$$

$$P(I \cap R_1 \cap R_2) = \frac{12}{16} \times \frac{4}{15} \times \frac{3}{14} = 0,0428$$

Jadi, peluang 2 undian yang dimenangkan remaja dan 1 undian dimenangkan oleh ibu-ibu adalah $3 \times 0,0428 = 0,1284$.

□

Tugas Kelompok

Sebuah perusahaan memiliki 3 mesin M_1, M_2 dan M_3. Kinerja dari setiap mesin berturut-turut adalah H_1, H_2, dan H_3. Mesin menghasilkan 60% dari seluruh produksi, mesin menghasilkan 25% dari seluruh produksi, dan mesin menghasilkan 15% dari seluruh produksi. Selanjutnya berdasarkan hasil pemeriksaan diketahui bahwa 5% dari , 2% dari , dan 80% dari adalah cacat. Jika suatu hasil produksinya diambil secara acak, berapakah peluang hasil itu cacat? Diskusikan dalam kelompok Anda.

Latihan 2.5

1. Dalam suatu kotak terdapat 5 kelereng merah, 2 kelereng putih dan 4 kelereng hijau. Jika diambil dua kelereng berturut-turut tanpa dikembalikan, berapa peluang terambil 2 kelereng hijau?
2. Misalkan terdapat 3 bolam lampu yang rusak dicampur dengan 6 bola lampu yang baik. Jika dipilih secara acak 2 bolam lampu untuk dipasang, maka berapa peluang terambil bolam lampu pertama dan kedua dalam keadaan baik?
3. Dalam suatu kelas terdapat 20 orang siswa, 5 diantaranya berbaju putih, 10 siswa berbaju coklat dan 5 lainnya berbaju merah. Dipilih secara acak 3 orang siswa satu per satu, tentukan peluang kejadian:
   a. pertama terpilih memakai baju cokelat
      kedua terpilih memakai baju putih
      ketiga terpilih memakai baju merah
   b. tiga siswa terpilih memakai baju cokelat semua
   c. dua siswa terpilih berbaju cokelat dan satu siswa berbaju putih
4. Seorang siswa memiliki peluang lulus ujian matematika adalah 0,6. Jika ia setelah lulus matematika, maka peluang lulus ujian komputer adalah 0,8. Hitung peluang siswa tersebut lulus ujian matematika dan komputer.
5. Sebuah kotak berisi 7 bola pink dan 3 bola kuning. Jika dari kotak tersebut diambil 3 bola secara acak satu per satu, maka hitunglah peluang kejadian:
   a. terambil 3 bola kuning.
   b. pengambilan pertama pink, kedua kuning dan ketiga pink.
   c. terambil 2 bola pink dan 1 bola kuning.
6. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama sebanyak satu kali. Misalkan:
   A adalah kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu sama dengan 6,
   B adalah kejadian munculnya mata dadu angka 1 atau 2 pada dadu pertama,
   C adalah kejadian munculnya salah satu mata dadu angka 2,
   Dari data-data ini, hitunglah:
   a. $P(A|B)$ c. $P(A|C)$
   b. $P(B|A)$ d. $P(C|B)$
7. Pesawat Boeing 747 memiliki 4 mesin yang bekerja secara independen. Pesawat tersebut dapat terbang jika minimal 2 dari mesin-mesin tersebut bekerja dengan baik. Jika peluang terbaiknya mesin A = 0,8, mesin B = 0,7, mesin C = 0,6, dan mesin D = 0,9. Hitung peluang kejadian dari:
   a. pesawat tersebut ditunda penerbangannya
   b. pesawat tersebut dalam kondisi sangat baik
   c. pesawat tersebut layak diterbangkan
8. Jika kejadian A dan B saling-bebas dengan $P(A) = \frac{1}{2}$ dan $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Hitunglah:
   a. $P(B)$ c. $P(B^c | A)$
   b. $P(A|B)$

9. Diketahui dua kejadian A dan B dengan $P(A) = \frac{3}{5}$, $P(B) = \frac{1}{4}$, dan $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$.

   a. Tunjukkan bahwa kejadian A dan kejadian B merupakan kejadian yang tidak saling lepas dan juga tidak saling bebas.

   b. Hitunglah $P(A \mid B)$ dan $P(A^c \mid B^c)$

10. Peluang kejadian A adalah $P(A) = \frac{2}{5}$, peluang kejadian bersyarat $A \mid B$ adalah $P(A \mid B) = \frac{3}{8}$, dan peluang kejadian bersyarat $B \mid A$ adalah $P(B \mid A) = \frac{1}{2}$. Dari data-data ini, hitunglah:

    a. $P(A \cap B)$ b. $P(A^c \cup B^c)$

Rangkuman

1. Aturan Perkalian
   Jika n_k adalah banyaknya cara mengisi tempat ke-k setelah (k-1) tempat-tempat sebelumnya terisi, maka banyaknya cara mengisi k tempat yang tersedia itu adalah:
   $$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$$
2. Permutasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan P_k^n adalah
   $$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!},$$
   dengan $k \leq n$.
3. Kombinasi k unsur dari n unsur, yang dinotasikan C_k^n adalah
   $$C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
4. Kejadian adalah kemungkinan hasil dari suatu percobaan.
5. Kejadian sederhana adalah kejadian yang tidak mungkin muncul secara serempak dengan kejadian lain.
6. Kejadian majemuk adalah kejadian yang tersusun dari kejadian-kejadian sederhana.
7. Ruang sampel, dinotasikan dengan S, adalah keseluruhan kejadian sederhana dari suatu percobaan.
8. Peluang kejadian A, ditulis $P(A)$, adalah pengukuran tingkat keyakinan akan muncul atau tidak munculnya suatu kejadian.
9. Jika A kejadian dan S ruang sampel, maka
   a. $A \cup A^c = S$
   b. $A \cap A^c = \varnothing$
   c. $P(A^c) = 1 - P(A)$
   d. $0 \leq P(A) \leq 1$
   e. $P(S) = 1$ dan $P(S^c) = 0$

10. Aturan Penjumlahan
    Jika A dan B dua kejadian sembarang, maka
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
11. Jika kejadian A dan kejadian B saling lepas, maka
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
12. Peluang bersyarat adalah peluang kejadian A dengan kejadian B diketahui telah terjadi, dan peluangnya
$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
13. Jika kejadian A dan kejadian B saling bebas, maka
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Math Info

Gambar 2.11 Pascal
Sumber: www.pascalfervor.com

Munculnya teori peluang mungkin berawal dari adanya perjudian. Setiap orang yang berjudi pasti ingin menang. Akan tetapi, banyak orang yang berkata bahwa bermain judi adalah mempertaruhkan keberuntungan, karena terkadang menang dan terkadang kalah. Oleh karena banyak penjudi yang tidak puas akan kekalahan, maka mereka meminta bantuan para ahli matematika untuk mengatur suatu strategi yang bagus sehingga kemungkinan untuk menang lebih besar. Matematikawan yang dimaksud antara lain Pascal, Leibniz, Fermat, dan James Bernoulli.

Selain dalam perjudian, banyak bidang-bidang lain yang berkaitan dengan kejadian-kejadian yang bersifat peluang., menggunakan bantuan teori peluang. Misalkan pada peramalan cuaca, penanaman modal saham, dan penelitian ilmiah.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Dari angka 3, 5, 6, 8, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri 3 angka kurang dari 600 dan ganjil. Banyak bilangan-bilangan yang mungkin adalah ...

   A. 26 D. 18
   B. 24 E. 16
   C. 20

2. Polresta Surakarta memberi nomor sejumlah kendaraan. Tersedia huruf *A, B, D* dan angka 1, 2, 3, 4, dan 5. Nomor kendaraan adalah 2 huruf, 4 angka, dan 1 atau 2 huruf. Banyak kendaraan yang dapat diberi nomor adalah ...

   A. 6.800 D. 7.800
   B. 7.200 E. 8.120
   C. 7.500

8. Dalam kotak berisi 7 bola merah dan 5 bola putih. Diambil 3 bola sekaligus. Peluang terambilnya sekurang-kurangnya 1 bola putih adalah ...

   A. $\frac{37}{44}$ D. $\frac{21}{44}$
   B. $\frac{35}{44}$ E. $\frac{4}{11}$
   C. $\frac{25}{44}$

9. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama. Peluang muncul kejadian jumlah mata dadu bilangan ganjil adalah ...

   A. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{4}$
   B. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{6}$
   C. $\frac{1}{3}$

10. Dilemparkan dua buah dadu sisi enam secara serempak sebanyak 360 kali. Frekuensi harapan muncul mata dadu berjumlah 7 dan 10 adalah ...

   A. 20 kali D. 4 kali
   B. 12 kali E. 3 kali
   C. 5 kali

11. Jika diketahui $C_3^n = 2n$, maka $C_7^{2n} = \ldots$

A. 120
B. 116
C. 112
D. 90
E. 80

12. Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set kartu *bridge*. Peluang terambil kartu merah atau kartu As adalah ...

A. $\frac{24}{52}$
B. $\frac{26}{52}$
C. $\frac{28}{52}$
D. $\frac{30}{52}$
E. $\frac{32}{52}$

13. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan secara bersamaan sebanyak satu kali. Peluang kejadian munculnya mata dadu angka 1 untuk dadu kedua dengan syarat kejadian munculnya jumlah kedua mata dadu kurang dari 5 terlebih dahulu adalah ...

A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{3}$
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{1}{6}$

14. Diketahui kejadian A dan kejadian B dengan $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$, dan $P(A \cap B) = 1/4$, maka $P(A \cup B) = \ldots$

A. $\frac{7}{12}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{7}{8}$
E. $\frac{11}{12}$

15. Sebuah kotak berisi 5 balon hijau da 3 balon kuning. Dari kotak itu diambil 2 balon secara berurutan tanpa dikembalikan. Peluang kejadian terambil balon hijau pada pengambilan pertama dan balon kuning pada pengambilan kedua adalah ...

A. $\frac{15}{56}$
B. $\frac{18}{56}$
C. $\frac{20}{56}$
D. $\frac{25}{56}$
E. $\frac{35}{56}$

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Dari angka-angka 3, 5, 6, 7 dan 9 dibuat bilangan yang terdiri dari atas tiga angka yang berbeda. Berapa banyak bilangan yang terbentuk yang kurang dari 400?
17. Terdapat sepuluh titik dan tidak ada tiga titik yang terletak segaris. Berapa banyak segitiga yang dapat dibuat dengan titik sudut dari titik-titik tersebut?
18. Dari 200 siswa di suatu sekolah diketahui bahwa peluang siswa yang senang matematika adalah 17/40, peluang siswa yang senang olah raga adalah 22/40, dan peluang siswa yang senang keduanya adalah 7/40. Berapakah siswa yang senang matematika atau olah raga tetapi tidak kedua-duanya?
19. Peluang bahwa tembakan A mengenai sasaran 1/4 dan peluang tembakan B mengenai sasaran adalah 2/5. Jika A dan B masing-masing menembak, berapakah peluang bahwa kedua tembakan itu mengenai sasaran?
20. Dalam sebuah kotak terdapat m bola berwarna merah dan p bola berwarna putih. Jika satu bola diambil secara acak dari kotak itu, peluang memperoleh bola merah adalah 2/5. Jika 4 bola berwarna merah ditambahkan ke dalam kotak itu, maka peluang untuk memperoleh satu bola berwarna merah bertambah sebanyak 3/55. Tentukan m dan p.

Soal Analisis

1. Nomor-nomor telepon di wilayah Jawa Tengah terdiri dari tujuh angka yang dimulai dengan angka bukan nol. Jika nomor-nomor telepon itu dianggap sebagai suatu bilangan, hitung:
   a. banyak kemungkinan nomor telepon di Jawa Tengah
   b. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan ganjil
   c. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan genap tanpa ada angka berulang
   d. banyak kemungkinan nomor telepon yang merupakan bilangan kurang dari 7.000.000
2. Suatu kantor memberlakukan masa percobaan terhadap setiap pegawainya. Terdapat 2 orang calon pegawai, yaitu A dan B, yang menjalani masa percobaan. Keduanya diberi proyek percobaan. Peluang A menyelesaikan pekerjaan adalah $\frac{2}{3}$, dan peluang B menyelesaikan pekerjaan $\frac{1}{3}$. Jika $P(S|A)$ adalah peluang memuaskan hasil pekerjaan A yaitu $\frac{3}{4}$, dan $P(S|B)$ adalah peluang memuaskan hasil pekerjaan B yaitu $\frac{2}{5}$.
   a. Carilah peluang A menyelesaikan pekerjaan dan sukses.
   b. Carilah peluang A menyelesaikan pekerjaan dan sukses.
   c. Dapatkah anda membantu kantor tersebut untuk menentukan pegawai yang akan dipilih?

3. Plat nomor kendaraan bermotor pada wilayah tertentu diawali dengan dua huruf, kemudian diikuti dengan bilangan yang terdiri dari 4 angka dan diakhiri dengan susunan 2 buah huruf. Perhatikan skema berikut.

   Angka dan huruf dapat dipakai berulang.
   a. Ada berapa cara untuk membuat plat nomor kendaraan itu?
   b. Jika dua huruf pertama adalah *AD*, berapa banyak susunan plat nomor kendaraan bermotor yang dapat disusun?

4. Tabel di bawah ini adalah menunjukkan distribusi frekuensi nilai ujian Matematika dari 200 siswa. Jika dipilih seorang siswa secara acak, berpakah peluang bahwa nilai siswa tersebut tidak kurang dari 80?

Nilai Ujian	Frekuensi
70 – 74	55
75 – 79	45
80 – 84	30
85 – 89	50
90 – 94	20

5. Dua orang mempunyai jadwal ronda yang sama, sekali dalam minggu yang sama (Senin sampai Jumat). Masing-masing mempunyai peluang yang sama untuk ronda pada hari apa saja. Berapa peluang mereka ronda:
   a. pada hari yang sama, dan
   b. pada hari yang berurutan?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	: ………………..	Tanggal	: ………..
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Peluang
Kelompok	: ………………..	Semester	: 1 (satu)
Kegiatan	: Bermain kartu *bridge*		
Tujuan	: Menentukan peluang suatu kejadian		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. 1 set kartu *bridge*
2. Buku catatan
3. Alat pencatat

B. Cara kerja

1. Buat kelompok yang terdiri 4 atau 5 siswa.
2. Setiap kelompok ambillah 1 (satu) set kartu *bridge*, yang terdiri atas 13 kartu sekop (♠) dan 13 kartu cengkeh (♣) berwarna hitam, dan 13 kartu hati (♥) dan 13 kartu berlian (♦) berwarna merah. Jadi, 1 set kartu *bridge* terdiri dari 26 kartu berwarna hitam dan 26 kartu berwarna merah.
3. Ambillah 1 kartu dengan pengembalian dengan frekuensi: 15×, 30, 45, dan 60. Tuliskan frekuensi munculnya kartu berwarna merah dan tentukan peluangnya.

No.	Banyak Pengambilan	15×	30×	45×	60×
1.	Frekuensi munculnya kartu merah				
2.	Peluang munculnya kartu merah				

4. Gambarkan grafik peluang munculnya kartu merah.
5. Tentukan peluang pengambilan secara keseluruhan, yaitu 150 pengambilan.
6. Dari data di atas apa yang dapat Anda simpulkan?

C. Analisis

1. Jika percobaan pengambilan kartu dilakukan sebanyak n kali dan A muncul sebanyak k kali ($0 \le k \le n$), tentukan peluang munculnya kejadian A tersebut.
2. Jika banyak pengambilan (n) mendekati tak hingga, bagaimana nilai perbandingan munculnya kejadian dengan banyak pengambilan?
3. Bagaimana menentukan nilai peluang munculnya kejadian A tersebut?

BAB

III

RUMUS-RUMUS TRIGONOMETRI

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menggunakan rumus sinus jumlah dan selisih dua sudut,
2. menggunakan rumus kosinus jumlah dan selisih dua sudut,
3. menggunakan rumus tangen jumlah dan selisih dua sudut
4. menyatakan perkalian sinus dan kosinus sebagai jumlah atau selisih dari sinus atau kosinus,
5. menggunakan rumus-rumus sinus, kosinus dan tangen sudut ganda,
6. menggunakan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut dalam pemecahan masalah,
7. membuktikan rumus trigonometri jumlah dan selisih dua sudut,
8. membuktikan rumus trigonometri jumlah dan selisih dari sinus dan kosinus dua sudut,
9. merancang dan membuktikan rumus trigonometri sudut ganda, menyatakan sinus, kosinus, dan tangen suatu sudut sebagai fungsi trigonometri dari sudut ganda.

Pengantar

Gambar 3.1 Orang yang sedang menarik gerobak

Sumber: www.pks.banten.or.id

Benda seberat W ditarik sepanjang bidang datar oleh gaya yang bekerja pada tali yang diikatkan pada benda. Jika θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, maka besarnya gaya diberikan oleh persamaan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Pertanyaannya, berapa nilai θ agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin?

Dalam masalah di atas kita akan sampai pada memaksimumkan fungsi dari perkalian dua fungsi trigonometri, yang agak berbeda dengan fungsi trigonometri yang telah kita pelajari di kelas X dahulu. Lihat pembahasan ini pada contoh 3.2.4.

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda sebaiknya ingat kembali beberapa konsep tentang identitas trigonometri, dalil Phytagoras, aturan sinus dan kosinus untuk segi tiga, dan jarak antara dua titik. Selanjutnya, silakan Anda mempelajari materi bab ini, setelah itu Anda diharapkan dapat menerapkan konsep-konsep trigonometri ini untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari yang terkait dengannya, khususnya permasalahan di atas.

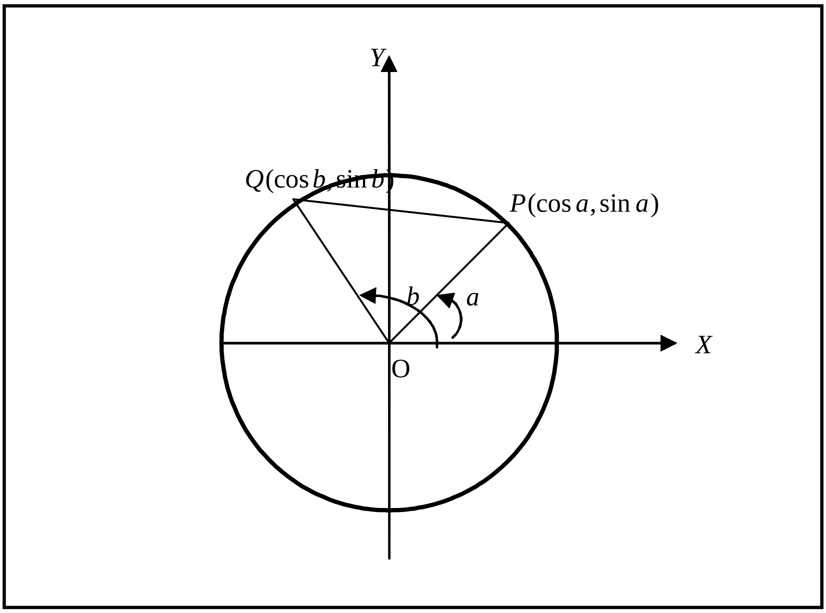
3.1 Rumus Trigonometri untuk Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Di kelas X kita telah mempelajari bagaimana menghitung jarak dari dua titik yang diketahui pada bidang datar. Jika diketahui dua titik $P(x_1, y_1)$ dan $Q(x_2, y_2)$ pada bidang datar, maka kuadrat jarak antara dua titik P dan Q adalah

$$\overline{PQ}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

Sekarang kita ambil titik P dan Q pada lingkaran yang berjari-jari 1 dan berpusat di O, lihat gambar 3.2. Jika $\angle XOP = b$ dan $\angle XOQ = a$, maka koordinat P dan Q adalah $P(\cos b, \sin b)$ dan $Q(\cos a, \sin a)$, ingat definisi sinus dan kosinus. Oleh karena itu dengan (3.1) kita peroleh

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= (\cos a - \cos b)^2 + (\sin a - \sin b)^2 \\ &= \cos^2 a - 2\cos a\cos b + \cos^2 b + \sin^2 a - 2\sin a\sin b + \sin^2 b \\ &= (\cos^2 a + \sin^2 a) + (\cos^2 b + \sin^2 b) - 2(\cos a\cos b + \sin a\sin b) \\ &= 2 - 2(\cos a\cos b + \sin a\sin b) \qquad (3.2)\end{aligned}$$



Gambar 3.2 Lingkaran berpusat di O dengan jari-jari 1

Di pihak lain, dengan menggunakan rumus kosinus dalam segitiga POQ kita peroleh:

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\,\overline{OP}.\overline{OQ}\,\cos(a-b) \\ &= 2 - 2\cos(a-b) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Karena ruas kiri dari (3.2) dan (3.3) sama, maka kita simpulkan bahwa:

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b \qquad (3.4)$$

Jika kita ambil $a = 90^{\circ} = \pi/2$, maka (3.4) menjadi:

$$\cos(\pi/2 - b) = \cos(\pi/2)\cos b + \sin(\pi/2)\sin b = \sin b$$

Dari hasil ini, jika b kita ganti dengan $\pi/2 - b$, maka

$$\cos b = \sin(\pi/2 - b)$$

Jadi, untuk sembarang sudut a kita mempunyai identitas

$$\sin(\pi/2 - a) = \cos a \quad \text{dan} \quad \cos(\pi/2 - a) = \sin a \tag{3.5}$$

Jika dalam rumus (3.4) b kita ganti dengan $-b$, dan karena $\cos(-b) = \cos b$, maka kita peroleh:

$$\begin{aligned}\cos(a - (-b)) &= \cos(a + b) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b)\\ &= \cos a \cos b - \sin a \sin b\end{aligned}$$

atau

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \tag{3.6}$$

Jika dalam rumus (3.4) a kita ganti dengan $\pi/2 - a$, maka kita peroleh

$$\cos((\pi/2 - a) - b) = \cos(\pi/2 - a)\cos b + \sin(\pi/2 - a)\sin b\,.$$

Dengan (3.5),

$$\cos((\pi/2 - a) - b) = \cos(\pi/2 - (a + b)) = \sin(a + b),$$

$$\cos(\pi/2 - a) = \sin a$$

$$\sin(\pi/2 - a) = \cos a,$$

maka dengan (3.4) kita peroleh:

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \tag{3.7}$$

Jika dalam rumus (3.7) b kita ganti dengan $-b$, maka kita peroleh

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \tag{3.8}$$

Dari rumus (3.6) dan (3.7) kita peroleh

$$\tan(a + b) = \frac{\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b}{\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$

Jika pembilang dan penyebut dari ruas kanan kita bagi dengan $\cos a \cos b$, maka kita peroleh

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \tag{3.9}$$

Jika dalam rumus (3.9) b kita ganti dengan $-b$, maka kita peroleh

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a \tan b} \tag{3.10}$$

Contoh 3.1.1

Buktikan bahwa $\cos(270^{\circ} - a) = -\sin a$.

Bukti:

Dari rumus (3.4)

$$\begin{aligned}\cos(270^{\circ} - a) &= \cos 270^{\circ} \cos a + \sin 270^{\circ} \sin a \\ &= 0.\cos a + (-1).\sin a = \sin a\end{aligned}$$

Jadi, terbukti $\cos(270^{\circ} - a) = -\sin a$.

□

Contoh 3.1.2

Tanpa memakai tabel atau kalkulator, hitunglah:

a. $\sin 15^{\circ}$ b. $\tan 75^{\circ}$

Penyelesaian:

a. Dari rumus (3.8)

$$\begin{aligned}\sin 15^{\circ} &= \sin(45^{\circ} - 30^{\circ}) \\ &= \sin 45^{\circ} \cos 30^{\circ} - \cos 45^{\circ} \sin 30^{\circ} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\end{aligned}$$

b. Dari rumus (3.9)

$$\begin{aligned}\tan 75^{\circ} &= \tan(45^{\circ} + 30^{\circ}) \\ &= \frac{\tan 45^{\circ} + \tan 30^{\circ}}{1 - \tan 45^{\circ} \tan 30^{\circ}} \\ &= \frac{1+\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1-1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} \\ &= 2+\sqrt{3}\end{aligned}$$

□

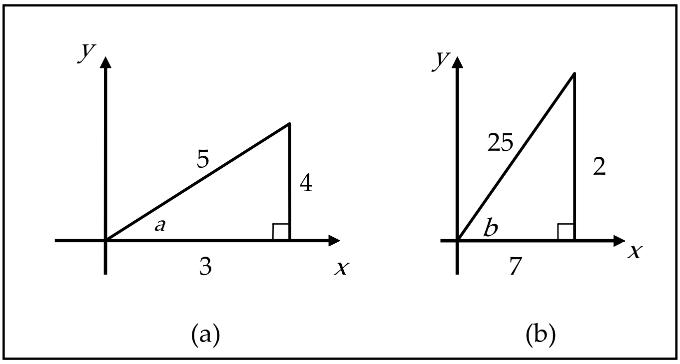
Contoh 3.1.3

Jika $\sin a = 4/5$ dan $\cos b = 7/25$ dengan $0 \le a \le \pi/2$ dan $0 \le b \le \pi/2$, tentukan nilai dari :

a. $\sin(a+b)$ b. $\cos(a-b)$

Penyelesaian:

Dengan dalil Phytagoras, kita dapat menentukan besarnya $\cos a$ dan $\sin b$.



Gambar 3.3

Dari gambar 3.3 (a), untuk $\sin a = 4/5$ kita peroleh $\cos a = 3/5$ dan $\tan a = 4/3$. Dari gambar 3.3 (b), jika $\cos b = 7/25$, maka $\sin b = 24/25$ dan $\tan b = 24/7$.

a. Dengan rumus (3.7), kita peroleh

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ &= \frac{4}{5}\cdot\frac{7}{25} + \frac{3}{5}\cdot\frac{24}{25} \\ &= \frac{100}{125} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

b. Dengan rumus (3.4), kita peroleh

$$\begin{aligned}\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ &= \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{25} + \frac{4}{5}\cdot\frac{24}{25} \\ &= \frac{117}{125}\end{aligned}$$

□

Latihan 3.1

1. Sederhanakan bentuk berikut dan hitung nilainya.

   a. $\sin 30^{o} \cos 15^{o} + \cos 30^{o} \sin 15^{o}$

   b. $\sin 120^{o} \sin 15^{o} - \cos 120^{o} \cos 15^{o}$

   c. $\dfrac{\tan 50^{o} - \tan 20^{o}}{1 + \tan 50^{o} \cdot \tan 20^{o}}$

2. Tanpa tabel atau kalkulator, tentukan nilai berikut ini.

   a. $\cos 105^{\circ}$ b. $\sin 165^{\circ}$ c. $\tan 225^{\circ}$

3. Jika a lancip dan b tumpul, $\sin a = 0,6$ dan $\cos b = -0,28$, hitunglah $\cos(a+b)$ dan $\tan(a-b)$.

4. Diketahui ΔABC adalah lancip, $\sin A = 0,6$ dan $\sin B = 0,96$. Tanpa memakai tabel atau kalkulator hitung $\tan C$.

5. Jika $\sin(x+30^{\circ}) = \sin x$, buktikan bahwa $\tan x = 2+\sqrt{3}$.

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10, buktikan identitas yang diberikan!

6. $\dfrac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{\sin(x+y)+\sin(x-y)} = \cot x$

7. Jika $x+y = 45^{\circ}$, buktikan bahwa $(1+\tan x)(1+\tan y) = 2$.

8. Diketahui $a+b+c = \pi$, tunjukkan bahwa

$$\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c$$

9. Lamanya matahari bersinar bersinar (dikukur dalam jam) di Philadelphia Amerika Serikat pada hari ke-t dalam setahun dimodelkan oleh fungsi

$$L(t) = 12 + 2,8\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right]$$

   Dengan model ini, bandingkan bagaimana banyaknya jam di mana matahari bersinar bertambah di Philadelphia pada 17 Maret dan 17 Oktober.

10. Bintang berubah '*Cepheid*' adalah bintang yang kecemerlangannya berganti-ganti bertambah dan berkurang. Bintang yang paling dapat dilihat dengan mudah adalah *Delta Cepheid,* yang memiliki selang di antara waktu kecemerlangan maksimum 5,4 hari. Rataan kecemerlangan bintang ini adalah 4,0 dan kecemerlangannya berubah sebesar $\pm 0,35$. Berdasarkan data ini, kecermerlangan *Delta Cepheid* pada saat *t,* dengan *t* diukur dalam hari, dimodelkan oleh fungsi

$$B(t) = 4,0 + 0,35\sin(2\pi t/5,4).$$

   Kapan bintang *Delta Cepheid* terlihat paling cemerlang?

3.2 Rumus Trigonometri Sudut Ganda

Kita perhatikan kembali rumus (3.6),

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.

Jika kita ambil $b = a$, maka rumus itu menjadi

$\cos(a+a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a \tag{3.11}$$

Karena $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, maka rumus terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2\sin^2 a \end{aligned} \tag{3.12}$$

Dari rumus (3.7) dan (3.9) kita mempunyai:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \text{dan} \quad \tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Jika kita ambil $b = a$, maka akan diperoleh:

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a \tag{3.13}$$

dan

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} \tag{3.14}$$

Karena kita dapat menuliskan $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a$, maka dengan analogi rumus-rumus di atas kita mempunyai

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos^2 \tfrac{1}{2}a - \sin^2 \tfrac{1}{2}a \\ &= 2\cos^2 \tfrac{1}{2}a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}a \end{aligned}$$

$$\sin a = 2\sin \tfrac{1}{2}a \cos \tfrac{1}{2}a \tag{3.15}$$

$$\tan a = \frac{2\tan \frac{1}{2}a}{1 - \tan^2 \frac{1}{2}a}$$

Tugas Mandiri

Dengan rumus (3.12), (3.12), dan (3.14) buktikan bahwa:

a. $\sin 3a = -4\sin^3 a + 3\sin a$

b. $\cos 3a = 4\cos^3 a - \cos a$

Contoh 3.2.1

Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator hitunglah $\sin 120^\circ$ dan $\cos 67^\circ 30'$.

Penyelesaian:

Dengan rumus (3.13) kita peroleh

$$\sin 120^\circ = \sin 2(60^\circ) = 2\sin 30^\circ \cos 30^\circ$$

$$= 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Dari rumus (3.12) yang pertama, kita peroleh

$$\cos 135^\circ = 2\cos^2 67^\circ 30' - 1$$

atau

$$\cos^2 67^\circ 30' = \frac{1}{2}(1+\cos 135^\circ) = \frac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

Jadi, $\cos 67^\circ 30' = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

□

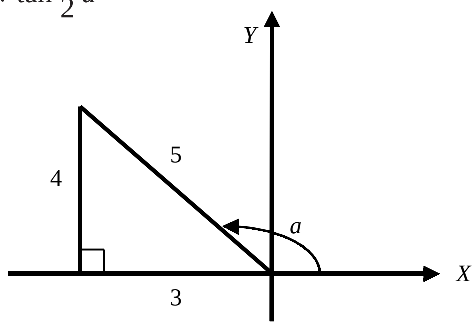
Contoh 3.2.2

Jika $\sin a = 4/5$, (a di kuadran II), hitunglah:

a. $\sin 2a$ b. $\cos 2a$ c. $\tan \frac{1}{2}a$

Penyelesaian:

Jika $\sin a = 4/5$ dengan a dikuadran II, maka kita peroleh $\cos a = -3/5$ dan $\tan a = -4/3$, lihat gambar 3.5.



Gambar 3.5

a. $\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2\cdot\dfrac{4}{5}\cdot -\dfrac{3}{5} = -\dfrac{24}{25}$,

b. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 = -\dfrac{7}{25}$,

c. $\tan \dfrac{1}{2}a = \dfrac{\sin \frac{1}{2}a}{\cos \frac{1}{2}a} = \dfrac{\frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{1}{5}\sqrt{5}} = 2$

□

Tugas Kelompok

Gambarlah sebuah segitiga sama kaki AOB dengan puncak O dan besar sudut AOB adalah t. Nyatakan luas segitiga AOB dalam t. Kemudian, gambarlah bidang setengah lingkaran dengan diameter ruas garis AB. Misalkan D adalah luas segitiga AOB dan E adalah luas setengah lingkaran. Carilah rumus untuk D/E yang dinyatakan dalam t. Diskusikan dengan kelompok Anda.

Contoh 3.2.3

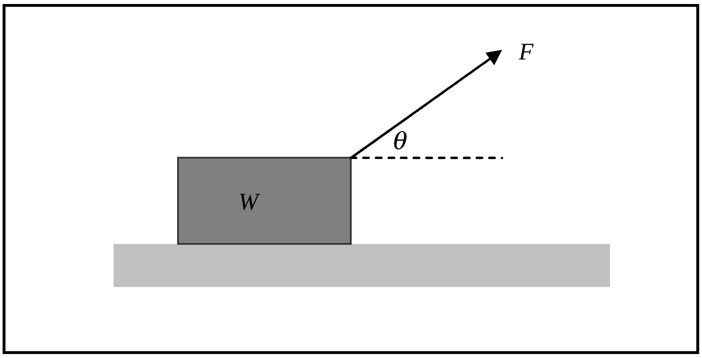
Pada awal bab dikemukakan bahwa gaya yang diperlukan untuk menarik benda seberat W sepanjang bidang datar diberikan oleh persamaan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, dan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Jika $\mu = \sqrt{3}$, bagaimana posisi tali seharusnya agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin?

Penyelesaian:

Perhatikan sketsa berikut ini.



Gambar 3.6

Karena besarnya W konstan, maka gaya F akan minimum apabila penyebut $\mu \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta$ nilainya maksimum. (Mengapa?)

Misalkan $\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ (pembagian antara koefisien sinus dengan koefisien kosinus), sehingga kita peroleh bahwa $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dan $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Nilai $\tan\alpha = \sqrt{3}$ dipenuhi untuk $\alpha = 60^{\circ}$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta &= 2\cos\alpha\cos\theta + 2\sin\alpha\sin\theta \\ &= 2\cos(\theta - \alpha) \\ &= 2\cos(\theta - 60^{\circ})\end{aligned}$$

Karena nilai terbesar dari $\cos x$ adalah 1, dan terjadi untuk $x = 0$, maka $2\cos(\theta - 60^{\circ})$ maksimum apabila $\theta - 60^{\circ} = 0$, yang memberikan $\theta = 60^{\circ}$. Jadi, agar gaya yang diperlukan untuk menarik benda tersebut sekecil mungkin, maka posisi tali harus membentuk sudut $\theta = 60^{\circ}$ dengan bidang datar.

□

Latihan 3.2

1. Sederhanakan bentuk berikut, kemudian hitunglah nilainya!

   a. $4\sin 22^{o}30'\cos 22^{o}30'$

   b. $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3}$

   c. $2\tan 15^{o}\cos^2 15^{o}$

   d. $\dfrac{2\tan 15^{o}}{1-\tan^2 15^{o}}$

   e. $\tan 25^{o}\sin 50^{o} + \cos 50^{o}$

2. Nyatakan bentuk berikut sebagai sudut ganda!

   a. $\sin 4a$

   b. $\cos 4a$

   c. $\tan 4a$

3. Diketahui $\tan a = 3/4$ dan $\sin b = -5/13$, a lancip dan b tumpul, hitunglah:

   a. $\sin(a+2b)$

   b. $\cos 2(a-b)$

   c. $\tan(a-2b)$

4. Gunakan fakta $3a = 2a + a$, untuk membuktikan identitas berikut:

   a. $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$

   b. $\cos 3a = 4\cos^2 a - 3\cos a$

   c. $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a}$

5. Jika $\tan \frac{1}{2}x = p$, hitunglah:

   a. $\cos x$

   b. $\sin x$

   c. $\sin 2x$

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 10, buktikan identitas yang diberikan!

6. $(2\cos z - 1)(2\cos z + 1) = 2\cos 2z + 1$

7. $\tan(\frac{\pi}{4} + a) = \dfrac{\cos a + \sin a}{\cos a - \sin a} = \dfrac{1+\sin 2a}{\cos 2a}$

8. Buktikan: $\cot(a+b) + \cot(a-b) = \dfrac{\sin 2a}{\cos^2 b - \cos^2 a}$.

9. Simpangan sebuah partkel pada senar bergetar diberikan oleh persamaan

$$s(t) = 10 + \frac{1}{2}\sin(5\pi t)\cos(5\pi t)$$

   dengan s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik. Kapan senar mempunyai simpangan terbesar?

10. Persamaan gerak partikel dikatakan *gerak harmonis sederhana*, jika mempunyai persamaan berbentuk

$$s(t) = A\cos(kt + \theta)$$

dengan *A*, *k*, dan θ konstanta tetap. Tunjukkan bahwa setiap persamaan partikel berikut merupakan gerak harmonis sederhana, dengan *s* diukur dalam sentimeter dan *t* dalam detik.

a. $s(t) = 5 - 10\sin^2 2t$ b. $s(t) = 4\sin(t - \frac{\pi}{6})$

3.3 Rumus Perkalian Sinus dan Kosinus

Pada bagian sebelumnya kita telah memperoleh rumus:

$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a\sin b$$

Jika ruas yang bersesuaian dari kedua rumus ini kita jumlahkan dan kita kurangkan, maka akan kita peroleh:

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b$$

$$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b$$

atau

$$\begin{aligned} \sin a\cos b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \\ \cos a\sin b &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b)) \end{aligned} \qquad (3.16)$$

Dengan cara yang sama, dari rumus:

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$

kita peroleh rumus

$$\begin{aligned} \cos a\cos b &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin a\sin b &= \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b)) \end{aligned} \qquad (3.17)$$

Contoh 3.3.1

Nyatakan sebagai jumlah atau selisih dari sinus atau kosinus dari :

a. $2\sin 52^o30'\cos 7^o30'$

b. $\cos 52^o30'\cos 7^o30'$

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (3.16) yang pertama, kita peroleh

$$
\begin{aligned}
2\sin 52^o30'\cos 7^o30' &= \sin(52^o30' + 7^o30') + \sin(52^o30' - 7^o30') \\
&= \sin 60^o + \sin 45^o \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

b. Dengan rumus (3.17) yang pertama, kita peroleh

$$
\begin{aligned}
\cos 52^o30'\cos 7^o30' &= \frac{1}{2}\left(\cos(52^o30' + 7^o30') + \cos(52^o30' - 7^o30')\right) \\
&= \frac{1}{2}(\cos 60^o + \cos 45^o) \\
&= \frac{1}{4}(1 + \sqrt{2})
\end{aligned}
$$

□

Tugas Kelompok

Sebuah persegi panjang harus ditempatkan di dalam sebuah setengah lingkaran berjari-jari *r*. Berapakah ukuran persegi panjang sehingga luasnya maksimum? Diskusikan dalam kelompok Anda.

Contoh 3.3.2

Sederhanakan bentuk berikut.

a. $\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o$ b. $2\cos(x + \frac{\pi}{4})\sin(x - \frac{\pi}{4})$

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (3.16) yang pertama dan menguraikan tangen ke dalam sinus dan kosinus, kita peroleh:

$$
\begin{aligned}
\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o &= 2\sin 42^o \cos 42^o \cdot \frac{\sin 42^o}{\cos 42^o} + \cos 84^o \\
&= 2\sin^2 42^o + \cos 84^o \\
&= 2\sin^2 42^o + 1 - 2\sin^2 42^o \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Jadi, $\sin 84^o \tan 42^o + \cos 84^o = 1$.

b. Dengan rumus (3.16) yang kedua, kita peroleh:

$$2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin\left((x+\frac{\pi}{4})+(x-\frac{\pi}{4})\right) - \sin\left((x+\frac{\pi}{4})-(x-\frac{\pi}{4})\right)$$

$$= \sin 2x - \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \sin 2x - 1$$

Jadi, $2\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin(x-\frac{\pi}{4}) = \sin 2x - 1$.

□

Latihan 3.3

1. Sederhanakan bentuk berikut sebagai jumlah atau selisih sinus atau kosinus!
   a. $3\sin x \sin y$
   b. $4\cos(x+y)\sin(x-y)$
   c. $\cos(a+\pi)\cos(a-\pi)$
   d. $2\cos(\frac{\pi}{4}+x)\sin(\frac{\pi}{4}-x)$
   e. $2\sin(a+b-c)\sin(a+b-c)$
2. Hitunglah nilai dari:
   a. $\sin 50^{\circ} \sin 40^{\circ} - \cos 95^{\circ} \cos 85^{\circ}$
   b. $\cos 40^{\circ} \cos 20^{\circ} - \sin 70^{\circ} \sin 50^{\circ}$
   c. $\cos 75^{\circ} \sin 15^{\circ} + \sin 75^{\circ} \cos 15^{\circ}$
3. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari setiap fungsi berikut.
   a. $f(x) = 2\cos(x+\frac{\pi}{4})\cos(x-\frac{\pi}{4})$
   b. $g(x) = 3\sin(x+\frac{3\pi}{4})\sin(x-\frac{3\pi}{4})$
4. Tentukan jumlah 5 suku yang pertama dari deret:
   a. $\sin 32x \sin 96x + \sin 16x \sin 48x + \sin 8x \sin 24 + \ldots$
   b. $\cos x \cos 3x - \cos 2x \cos 6x + \cos 4x \cos 12x - \ldots$
5. Diketahui ΔABC siku-siku di C dan berlaku hubungan $\sin(A+B)+\sin(A-B)=1$. Tentukan besarnya sudut A dan B.

3.4 Rumus Trigonometri Jumlah dan Selisih Dua Sudut

Pada bagian sebelumnya kita telah membuktikan keempat rumus perkalian sinus dan kosinus berikut,

$$\sin(p+q)+\sin(p-q)=2\sin p\cos q$$
$$\sin(p+q)-\sin(p-q)=2\cos p\sin q$$
$$\cos(p+q)+\cos(p-q)=2\cos p\cos q$$
$$\cos(p-q)-\cos(p+q)=2\sin p\sin q\,.$$

Jika kita ambil $a=p+q$ dan $b=p-q$, maka

$$p=\tfrac{1}{2}(a+b)\quad\text{dan}\quad q=\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Dengan mensubtitusikan harga p dan q ini ke dalam keempat rumus di atas akan kita peroleh rumus penjumlahan dan pengurangan sinus dan kosinus berikut ini.

$$\sin a+\sin b=2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\sin a-\sin b=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a+\cos b=2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)$$
$$\cos a-\cos b=-2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}(a-b)$$

Selanjutnya, kita perhatikan

$$\begin{aligned}\tan a+\tan b&=\frac{\sin a}{\cos a}+\frac{\sin b}{\cos b}\\&=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b}\\&=\frac{\sin(a+b)}{\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))}\\&=\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}\end{aligned}$$

Jadi,

$$\tan a+\tan b=\frac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$$

Dengan cara yang serupa, kita peroleh:

$$\begin{aligned}\tan a-\tan b&=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\sin b}{\cos b}\\&=\frac{\sin a\cos b-\cos a\sin b}{\cos a\cos b}\\&=\frac{\sin(a-b)}{\tfrac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))}\\&=\frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}\end{aligned}$$

$$\tan a - \tan b = \frac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)} \qquad (3.20)$$

Contoh 3.4.1

Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, hitunglah nilai dari:

a. $\sin 75^{o} + \sin 15^{o}$

c. $\tan 105^{o} + \tan 15^{o}$

b. $\cos 75^{o} - \cos 15^{o}$

Penyelesaian:

Untuk menyelesaikan soal-soal a sampai dengan c, kita terapkan rumus-rumus pada persamaan (3.18), sedangkan untuk menjawab soal d dan e, kita manfaatkan rumus (3.19) dan (3.20).

a. $\sin 75^{o} + \sin 15^{o} = 2\sin \tfrac{1}{2}(75^{o}+15^{o})\cos \tfrac{1}{2}(75^{o}-15^{o})$

$$= 2\sin 45^{o}\cos 30^{o}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

b. $\cos 75^{o} - \cos 15^{o} = -2\sin \frac{1}{2}(75^{o}+15^{o})\sin \frac{1}{2}(75^{o}-15^{o})$

$$= -2\sin 45^{o}\sin 30^{o}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

c. $\tan 105^{o} + \tan 15^{o} = \dfrac{2\sin(105^{o}+15^{o})}{\cos(105^{o}+15^{o})+\cos(105^{o}-15^{o})}$

$$= \frac{2\sin 120^{o}}{\cos 120^{o} + \cos 90^{o}}$$

$$= \frac{2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{3}}{-\tfrac{1}{2}+0}$$

$$= -2\sqrt{3}$$

□

Contoh 3.4.2

Buktikan bahwa dalam ΔABC berlaku:

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\cdot\tan B\cdot\tan C$$

Bukti:

Dalam ΔABC berlaku

$$A+B+C=180^\circ \quad \text{atau} \quad A+B=180^\circ-C,$$

sehingga

$$\tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C.$$

Di pihak lain, dari rumus tangen,

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \quad \text{atau} \quad \tan A+\tan B=\tan(A+B)\left(1-\tan A\tan B\right)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}\tan A+\tan B+\tan C &= \tan(A+B)\left(1-\tan A\tan B\right)+\tan C\\ &= -\tan C\left(1-\tan A\tan B\right)+\tan C\\ &= -\tan C\left(1-\tan A\tan B-1\right)\\ &= \tan A\tan B\tan C\end{aligned}$$

□

Contoh 3.4.3

Hitunglah jumlah dari n suku yang pertama deret

$$\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots$$

Penyelesaian:

Misalkan S_n adalah jumlah n suku yang pertama,

$$S_n=\sin a+\sin(a+b)+\sin(a+2b)+\ldots+\sin(a+(n-1)b)$$

Suku-suku deret dapat dijumlahkan, apabila jenis fungsi sama dan besar sudutnya sama. Hal ini dapat kita lakukan dengan membuat setiap suku deret diubah ke perkalian sinus dengan sinus. Deret di atas menyarankan faktor pengalinya adalah $2\sin\frac{b}{2}$, sehingga:

$$\begin{array}{lll}
2\sin\frac{b}{2}\ \sin a & =\cos(a-\frac{b}{2}) & -\ \cos(a+\frac{b}{2})\\
2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+b) & =\cos(a+\frac{b}{2}) & -\ \cos(a+\frac{3b}{2})\\
2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+2b) & =\cos(a+\frac{3b}{2}) & -\ \cos(a+\frac{5b}{2})\\
\vdots & \vdots & \vdots\\
2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+(n-1)b) & =\cos\left(a+(n-\frac{3}{2})b\right) & -\cos\left(a+(n-\frac{1}{2})b\right)\\
\hline
\end{array} +$$

$$\begin{aligned}2\sin\frac{b}{2}\ S_n &= \cos\left(a-\frac{1}{2}b\right)-\cos\left(a+(n-\frac{1}{2})b\right)\\ &= -2\sin\frac{a-\frac{b}{2}+a+(n-\frac{1}{2})b}{2}\ \sin\frac{a-\frac{b}{2}-a-(n-\frac{1}{2})b}{2}\\ &= 2\sin\left(a+\frac{n-1}{2}b\right)\sin\left(\frac{n}{2}b\right)\end{aligned}$$

Jadi,

$$S_n = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} \cdot \sin\left(a + \frac{n-1}{2}b\right)$$

□

Latihan 3.4

1. Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, tentukan nilai dari:
   a. $\cos 105^{\text{o}} + \cos 15^{\text{o}}$
   b. $\sin 105^{\text{o}} - \sin 15^{\text{o}}$
   c. $\tan 52^{\text{o}}30' - \tan 7^{\text{o}}30'$
   d. $\cos 75^{\text{o}} + \sin 75^{\text{o}}$
   e. $\csc 10^{\text{o}} + \csc 50^{\text{o}} - \csc 70^{\text{o}}$
   f. $\tan 165^{\text{o}} + \tan 15^{\text{o}}$
2. Nyatakan sebagai hasilkali bentuk-bentuk berikut.
   a. $\sin x + \sin 3x$
   b. $\cos x - \cos 3x$
   c. $\cos(\frac{\pi}{2} + 2x) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)$
   d. $a \cos x + b \sin x$
   e. $\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x$
   f. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$

Untuk soal nomor 3 sampai dengan nomor 5, buktikan identitas yang diberikan!

3. $\dfrac{\sin 2a - \sin 2b}{\cos 2a + \cos 2b} = \tan(a - b)$
4. $\tan a + \tan b - \tan(a + b) = -\tan a \cdot \tan b \cdot \tan(a + b)$
5. Jika $a + b + c = 90^{\text{o}}$, buktikan bahwa $\tan a \tan b + \tan b \tan c + \tan c \tan a = 1$.

Untuk soal nomor 6 sampai dengan nomor 8, buktikan bahwa dalam ΔABC berlaku identitas yang diberikan!

6. $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin \frac{1}{2}A \sin \frac{1}{2}B \sin \frac{1}{2}C$
7. $\sin 2A + \sin 2B - \sin 2C = 4\cos A \cos B \sin C$
8. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A \cos B \cos C$
10. Tanpa menggunakan tabel atau kalkulator, buktikan bahwa:
    a. $\cos 80^{\text{o}} + \cos 40^{\text{o}} - \cos 20^{\text{o}} = 0$
    b. $\sin 10^{\text{o}} \sin 30^{\text{o}} \sin 50^{\text{o}} \sin 70^{\text{o}} = \dfrac{1}{16}$
13. Hitunglah 20 suku yang pertama dari deret berikut.
    a. $\sin a + \sin 3a + \sin 5a + \ldots + \sin(2n-1)a + \ldots.$
    b. $\cos(a + x) + \cos(a + 2x) + \cos(a + 3x) + \ldots + \cos(a + nx) + \ldots.$

Rangkuman

1. Rumus trigonometri jumlah dan selisih sudut:
   a. $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$
   b. $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$
   c. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$
   d. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$
   e. $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$
   f. $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$
2. Rumus trigonometri sudut ganda:
   a. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$
   b. $\cos 2a=2\cos^2 a-1$ atau $\cos 2a=1-2\sin^2 a$
   c. $\sin 2a=2\sin a\cos a$
   d. $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$
3. Rumus perkalian sinus dan kosinus:
   a. $\sin a\cos b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b))$
   b. $\cos a\sin b=\frac{1}{2}(\sin(a+b)-\sin(a-b))$
   c. $\cos a\cos b=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$
   d. $\sin a\sin b=\frac{1}{2}(\cos(a-b)-\cos(a+b))$
4. Rumus jumlah dan selisih dua sudut:
   a. $\sin a+\sin b=2\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
   b. $\sin a-\sin b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$
   c. $\cos a+\cos b=2\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-b)$
   d. $\cos a-\cos b=-2\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-b)$
   e. $\tan a+\tan b=\dfrac{2\sin(a+b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$
   f. $\tan a-\tan b=\dfrac{2\sin(a-b)}{\cos(a+b)+\cos(a-b)}$

Math Info

Dalam sarang lebah, tiap sel berupa prisma segi enam beraturan, terbuka pada satu ujung dengan sudut trihedral pada ujung lainnya. Dipercaya bahwa lebah membentuk selnya dalam suatu cara yang meminimumkan luas permukaan untuk volume yang diketahui, sehingga lebah akan menggunakan lilin sesedikit mungkin dalam pembangunan sel. Pemeriksaan sel-sel ini telah memperlihatkan bahwa ukuran sudut puncak secara mengagumkan adalah konsisten. Berdasarkan kepada geometri sel tersebut, ternyata luas permukaan S merupakan fungsi trigonometri,

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot\theta + (\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2 \csc\theta)$$

dengan s adalah panjang sisi segienam, dan h adalah tinggi sel.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika $0 < x < \pi/2$ dan $\cos x = p$, maka $\tan x + \sin x = \cdots$

   A. $\dfrac{-1+p\sqrt{1+p^2}}{1+p^2}$

   B. $\dfrac{-1+p\sqrt{1+p^2}}{1+p}$

   C. $\dfrac{-1+p}{p}\sqrt{1-p^2}$

   D. $\dfrac{1+p}{p}\sqrt{1-p^2}$

   E. $\dfrac{1+p}{p^2}\sqrt{1-p^2}$

2. Dalam segitiga ABC, diketahui $\sin C = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$. Jika $\tan A \cdot \tan B = 13$, maka $\tan A + \tan B = \cdots$

   A. – 18

   B. – 8

   C. $\dfrac{20}{3}$

   E. 18

   D. 8

3. Jika θ sudut lancip yang memenuhi $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin 2\theta$, maka $\tan\theta = \cdots$

A. $2+\sqrt{5}$
B. $2+\sqrt{3}$
C. $2-\sqrt{3}$
D. $\sqrt{5}-2$
E. $\sqrt{3}-1$

4. Diketahui $\tan x = 4/3$, maka nilai $\cos 3x + \cos x = \cdots$

A. $\dfrac{-42}{125}$
B. $\dfrac{-14}{125}$
C. $\dfrac{20}{125}$
D. $\dfrac{28}{125}$
E. $\dfrac{56}{125}$

5. Dalam segitiga ABC, diketahui $\cos(B+C) = \dfrac{9}{40}$. Jika panjang sisi AC = 10 cm, dan AB = 8 cm, maka panjang sisi $BC = \cdots$

A. $8\sqrt{2}$
B. $9\sqrt{2}$
C. $10\sqrt{2}$
D. $11\sqrt{2}$
E. $12\sqrt{2}$

6. Jika $\dfrac{\tan x}{1+\tan x} + \dfrac{\tan x}{1-\tan x} = 1$, maka $x = \cdots$

A. $\dfrac{\pi}{15}$
B. $\dfrac{\pi}{12}$
C. $\dfrac{\pi}{9}$
D. $\dfrac{\pi}{8}$
E. $\dfrac{\pi}{6}$

7. Dalam segitiga ABC, diketahui sudut $A = 60^{\circ}$. Jika $\cos B.\cos C = 0{,}1$, maka $\tan B \cdot \tan C = \cdots$

A. – 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 10

8. Jika diketahui $\sin(x + \pi/2) = 0{,}6$, maka $\sin(x+\pi) + \cos(-x) = \cdots$

A. – 0,4
B. – 0,2
C. 0,2
D. 0,4
E. 0,6

9. Jika $A+B+C=360^{\circ}$, maka $\dfrac{\sin\frac{1}{2}A}{\sin\frac{1}{2}(B+C)}=\cdots$

A. $\tan\frac{1}{2}A$
B. $\cot\frac{1}{2}A$
C. $\sec\frac{1}{2}(B+C)$
D. 0
E. 1

10. Dalam segitiga ABC yang siku-siku di C, diketahui $\sin A\sin B=\dfrac{2}{5}$ dan $\sin(A-B)=5a$. Nilai a adalah ....

A. $-\dfrac{1}{5}$
B. $-\dfrac{3}{25}$
C. $-\dfrac{1}{25}$
D. $\dfrac{3}{25}$
E. $\dfrac{3}{5}$

11. Jika α adalah sudut lancip yang memenuhi $2\cos^4\alpha=\sin^2\alpha$, maka $\tan\alpha=\cdots$

A. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
B. 1/2
C. $2-\sqrt{3}$
D. 1
E. $\sqrt{3}$

12. Jika $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=p$ untuk $x\neq\pi/2$, maka $\tan\frac{1}{2}x=\cdots$

A. $\dfrac{1}{a+1}$
B. $\dfrac{a}{a+1}$
C. $\dfrac{a+1}{a-1}$
D. $\dfrac{a-1}{a+1}$
E. $\dfrac{a}{a-1}$

13. $(1-\sin^2 A)\tan^2 A=\cdots$

A. $2\sin^2 A-1$
B. 1
C. $1-\cos^2 A$
D. $1-\sin^2 A$
E. $\cos^2 A+2$

14. Bentuk $\sqrt{3}\cos x-\sin x$, untuk $0<x<2\pi$ dapat dinyatakan sebagai ... .

A. $2\cos(x+\frac{\pi}{6})$
B. $2\cos(x+\frac{11\pi}{6})$
C. $2\cos(x+\frac{7\pi}{6})$
D. $2\cos(x-\frac{7\pi}{6})$
E. $2\cos(x-\frac{\pi}{6})$

15. Jika $\tan a > 0$, $\tan 2a = -3/4$, dan $\tan(a-b) = 1/2$, maka $\tan^2 a - \tan^2 b = \cdots$

A. 8
B. – 20
C. – 40
D. 20
E. 60

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Jika $x + y = 60^o$ dan $4\cos x = 3\cos y$, buktikan bahwa $\tan x = \frac{5}{9}\sqrt{3}$.
17. Jika $x - y = 30^o$ dan $\tan x = 3\tan y$, tentukan nilai dari x dan y.
18. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari setiap fungsi berikut.

    a. $f(x) = 2\cos(x + \frac{\pi}{4})\cos(x - \frac{\pi}{4})$

    b. $h(x) = 10\sin(x + \frac{3\pi}{2})\sin(x - \frac{3\pi}{2})$
19. Tunjukkan bahwa persamaan partikel

$$s(t) = \sin 2\pi kt + \cos 2\pi kt,$$

dengan k konstanta tetap, s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik merupakan gerak harmonis sederhana.

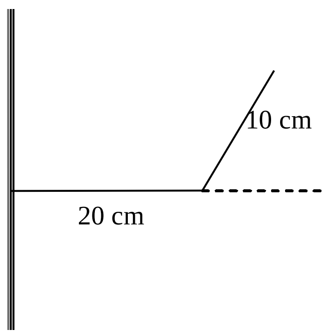
20. Hitunglah 20 suku yang pertama dari deret berikut.

    a. $\cos a + \cos 3a + \cos 5a + \ldots + \cos(2n-1)a + \ldots.$

    b. $\sin(a+x) + \sin(a+2x) + \sin(a+3x) + \ldots + \sin(a+nx) + \ldots.$

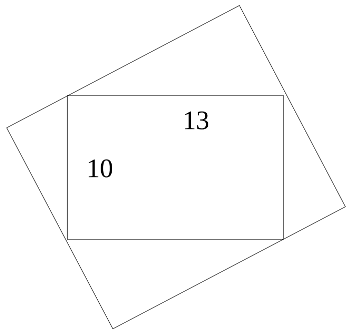
Soal Analisis

1. Talang pada sisi tembok akan dibuat dengan lembaran seng 30 cm dengan menekuk satu sisi sepanjang 10 cm ke atas, seperti terlihat pada gambar 3.8. Jika θ menyatakan sudut antara talang dengan arah mendatar, berapa besar θ agar talang mempunyai volume maksimum?



Gambar 3.8

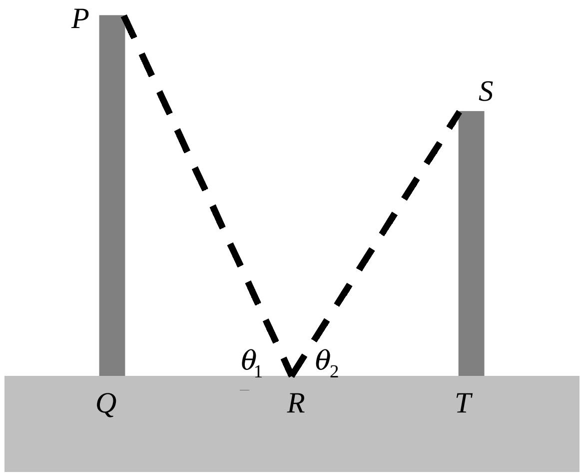
2. Diberikan persegi panjang dengan lebar 10 cm dan panjang 13 cm. Tentukan persegi panjang dengan luas maksimum yang dapat diletakkan di sekeliling persegi panjang yang diketahui.



Gambar 3.9

3. Dua tiang *PQ* dan *ST* ditunjang oleh tali *PRS* yang melintang dari puncak tiang pertama ke titik *R* di permukaan tanah yang terletak di antara tiang-tiang dan kemudian ke puncak tiang kedua seperti yang tampak dalam gambar 3.10.

   Tunjukkan bahwa panjang tali terpendek ketika $\theta_1 = \theta_2$.

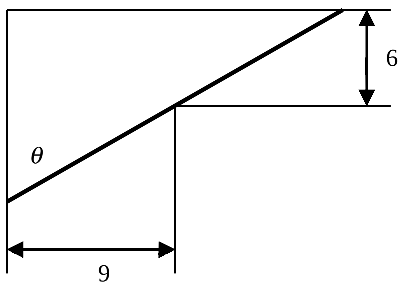


Gambar 3.10

4. Pipa besi dibawa melewati gang yang memiliki lebar 9 meter. Pada ujung gang terdapat belokan menyiku ke arah gang yang lebih sempit dengan lebar 6 meter. Perhatikan gambar 3.11. Tunjukkan bahwa panjang pipa yang mungkin dibawa secara mendatar melewati pojokan mempunyai persamaan

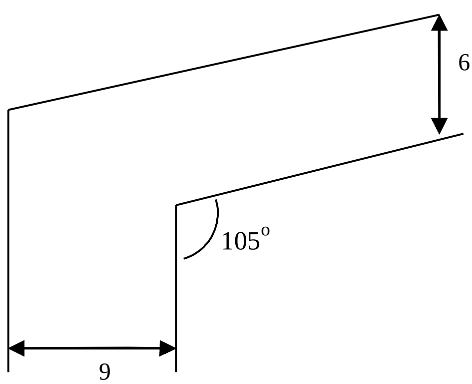
$$l(\theta) = \frac{6\sqrt{13}\cos(\theta - \alpha)}{\sin 2\theta},$$

dengan $\tan\alpha = 2/3$.



Gambar 3.11

5. Tentukan panjang pipa yang mungkin, apabila gang pada soal nomor 4 tidak bertemu siku-siku tetapi membentuk sudut 105° seperti diperlihatkan pada gambar 3.12.



Gambar 3.12

Aktivitas Proyek

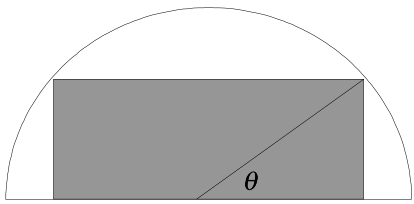
Aktivitas

Nama : ....
Kelas : XI
Kelompok : ....
Kegiatan : Membuat persegi panjang di dalam daerah setengah lingkaran
Tujuan : Menentukan persegi panjang dengan luas terbesar di dalam setengah lingkaran

Tanggal : ....
Materi Pokok : Rumus-rumus trigonometri
Semester : 1 (satu)

A. Alat dan bahan yang digunakan
1. Dua lembar karton beda warna
2. Gunting
3. Alat tulis
4. Jangka
5. Spidol warna
6. Penggaris
7. Perekat
8. Busur derajat

B. Cara kerja
1. Ambil 1 lembar karton.
2. Gambarlah setengah lingkaran berjari-jari 20 cm, kemudian gunting bidang setengah lingkaran tersebut.
3. Pada karton yang lainnya, gambarlah beberapa persegi panjang dengan sisi panjangnya berimpit dengan diameter lingkaran, dan dua titik sudut lainnya terletak pada busur lingkaran.
4. Gunting semua persegi panjang yang telah Anda buat.
5. Tempelkan satu persegi panjang itu pada bidang setengah lingkaran tadi, menurut ketentuan di atas.
6. Buatlah garis dari salah satu sudut persegi panjang yang terletak pada busur lingkaran ke pusat lingkaran. Kemudian namai sudut antara garis tadi dengan diameter lingkaran dengan θ. Sebagai contoh perhatikan gambar 3.13.



Gambar 3.13

C. Analisis
1. Berdasarkan percobaan di atas, nyatakan sisi-sisi persegi panjang dalam θ.
2. Nyatakan luas persegi panjang dalam θ.
3. Tentukan nilai θ yang memberikan luas persegi panjang terbesar. Dari beberapa persegi panjang yang Anda buat tadi, manakah yang mempunyai luas terbesar?

BAB

IV

LINGKARAN

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

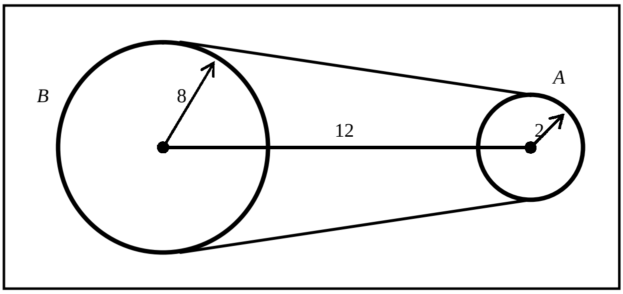
1. merumuskan persamaan lingkaran berpusat di (0,0) dan (*a*,*b*),
2. menentukan pusat dan jari-jari lingkran yang persamaanya diketahui,
3. menentukan persamaan lingkaran yang memenuhi kriteria tertentu,
4. menentukan posisi titik dan garis terhadap lingkaran,
5. menentukan persamaan garis singgung yang melalui suatu titik pada lingkaran,
6. menentukan persamaan garis singgung lingkaran yang gradiennya diketahui,
7. menggunakan diskriminan untuk menentukan persamaan garis singgung pada lingkaran,
8. membuktikan teorema tentang persamaan garis singgung lingkaran.

Pengantar

Gambar 4.1 Orang sedang balap sepeda

Sumber: www.cambridgebicycle

Dalam percobaan fisikanya, Fadli dihadapkan pada suatu masalah, yaitu ia harus menggerakkan secara simultan roda A berjari-jari 2 dm dan roda B berjari-jari 8 dm yang jarak kedua poros A dan B adalah 12 dm. Akhirnya, Fadli menemukan cara untuk menggerakkan kedua roda tersebut secara bersama, yaitu dengan membuat sabuk lilitan yang menghubungkan kedua roda. Pertanyaannya adalah berapa panjang sabuk lilitan yang diperlukan Fadli? Ilustrasi fenomena ini diberikan oleh gambar 4.2.



Gambar 4.2

Jika kita mempunyai sebuah roda sepeda lengkap dengan jari-jarinya, maka kita mempunyai dua hal penting, yaitu jari-jari sepeda itu panjangnya sama dan pusat roda sebagai tempat pemasangan jari-jari yang jaraknya ke sembarang tepi roda sama. Bagian tepi roda itu secara matematika membentuk lingkaran, yang telah kita pelajari di kelas VIII dahulu.

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda sebaiknya ingat kembali beberapa konsep tentang jarak antara dua titik, persamaan garis, bidang lingkaran dan persamaan kuadrat. Selanjutnya, Anda dipersilakan mempelajari materi bab ini, dan Anda diharapkan dapat menjelaskan lingkaran beserta aspek-aspeknya tidak hanya pendekatan secara geometri tetapi juga tinjauan secara aljabar. Khususnya, Anda dapat membantu permasalahan yang dihadapi Fadli di atas.

4.1 Persamaan Lingkaran dengan Pusat O

Kita ingatkan kembali definisi dari lingkaran yang telah kita pelajari di SMP dahulu, yang definisi formalnya seperti berikut ini.

> Definisi
> Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tetap.

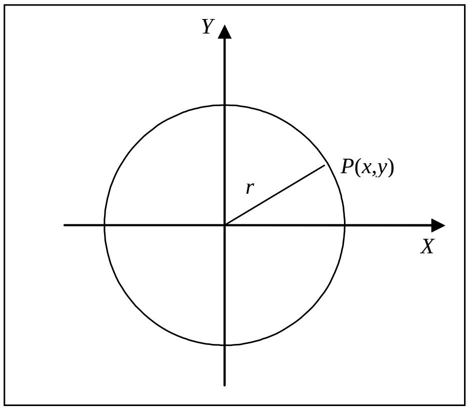
Titik tetap itu disebut pusat lingkaran, dan jaraknya disebut jari-jari lingkaran. Ruas garis yang panjangnya $2r$ dan melalui pusat lingkaran disebut diameter lingkaran.

Sekarang kita akan menentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan berjari-jari r. Kita ambil sembarang titik $P(x,y)$ pada lingkaran itu. Jarak antara titik O dan P adalah

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Karena jarak antara O dan P adalah jari-jari lingkaran, maka

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ atau } x^2 + y^2 = r^2$$



Gambar 4.3

Karena titik (x,y) adalah sembarang titik pada lingkaran, maka setiap titik pada lingkaran berlaku $x^2 + y^2 = r^2$. Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari r adalah

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Contoh 4.1.1

Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya $O(0,0)$ dan

a. berjari-jari 4   b. melalui titik $P(3, -5)$

Penyelesaian:

a. Lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan jari-jari 4 mempunyai persamaan

$$x^2 + y^2 = 16$$

b. Pusat lingkaran $O(0,0)$. Karena lingkaran melalui P, maka jari-jari lingkaran adalah jarak titik O ke titik P. Jarak $OP = \sqrt{(3-0)^2 + (-5-0)^2} = \sqrt{34}$. Jadi persamaan lingkaran yang diminta adalah

$$x^2 + y^2 = 34$$

□

Contoh 4.1.2

Diketahui titik $A(0,1)$ dan $B(0,9)$. Tentukan tempat kedudukan dari semua titik $P(x,y)$ sehingga $PB = 3PA$. Kemudian periksa kedudukan dua titik (1,1) dan (2,– 4) terhadap tempat kedudukan tersebut.

Penyelesaian:
Kita ambil sembarang titik $P(x,y)$ di tempat kedudukan. Dari rumus jarak dua titik, kita peroleh

$$PB = \sqrt{(x-0)^2 + (y-9)^2} \text{ dan } PA = \sqrt{(x-0)^2 + (y-1)^2}$$

Dari syarat yang diberikan

$$\begin{aligned} PB = 3PA \quad &\Leftrightarrow PB^2 = 9PA^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + (y-9)^2 = 9[x^2 + (y-1)^2] \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 18y + 81 = 9x^2 + 9y^2 - 18y + 9 \\ &\Leftrightarrow 8x^2 + 8y^2 = 72 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 \end{aligned}$$

Jadi, tempat kedudukan titik-titik itu adalah lingkaran dengan pusat O dan jari-jari 3.

Kedudukan titik (1,1) berada di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ karena $1^2 + 1^2 = 2 < 9$, sedangkan titik (2,– 4) berada di luar lingkaran karena $2^2 + (-4)^2 = 18 > 9$.

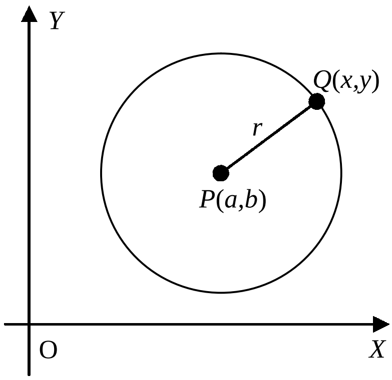
□

Latihan 4.1

1. Tentukan persamaan lingkaran yang pusatnya O dan jari-jari:
   a. 8 b. 0,5 c. a
2. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat O dan melalui titik:
   a. (3, 1) b. (7, –2) c. (6,0)
3. Tentukan pusat dan jari-jari dari setiap lingkaran berikut ini.
   a. $x^2 + y^2 = 64$ b. $x^2 + y^2 = 18$ c. $4x^2 + 4y^2 = 25$
4. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai pusat sama (konsentrik) dengan lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ tetapi jari-jarinya tiga kali lebih panjang.
5. Diketahui sisi-sisi persegi mempunyai persamaan $x = 3$, $x = -3$, $y = 3$ dan $y = -3$. Tentukan persamaan lingkaran:
   a. yang menyinggung semua sisi persegi.
   b. yang melalui keempat titik sudut persegi.
6. Tentukan a agar titik yang diketahui terletak pada lingkaran yang diberikan.
   a. $(a,-2)$, $x^2 + y^2 = 13$
   b. $(a,6)$, $x^2 + y^2 = 40$
   c. (a,a), $x^2 + y^2 = 72$
7. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 72$.
   a. Berapakah jari-jari lingkaran itu?
   b. Tentukan letak titik-titik berikut terhadap lingkaran itu: (– 6,6); (–3, 6); (9, 0); (7, 5), dan (4, –6).

8. Diketahui persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$. Tentukan nilai r agar:
   a. titik (4, –3) terletak pada lingkaran itu
   b. titik (1,3) terletak di luar lingkaran itu
   c. titik (12,5) terletak di dalam lingkaran itu
9. Misalkan titik $A(1,0)$ dan $B(9,0)$. Tentukan tempat kedudukan dari semua titik $P(x,y)$ sehingga $PB = 3PA$.
10. Tentukan tempat kedudukan dari semua titik $P(x,y)$ sehingga:
   a. $PB = 2PA$, untuk $A(0,2)$ dan $B(0,8)$
   b. $PB = 3PA$, untuk $A(1,1)$ dan $B(9,9)$.

4.2 Persamaan Lingkaran dengan Pusat (a,b)



Gambar 4.4

Lingkaran di samping berpusat di $P(a,b)$ dengan jari-jari r. Kita akan menentukan persamaan lingkaran dengan ketentuan ini. Kita ambil sembarang titik $Q(x,y)$ pada lingkarang itu. Jarak antara titik P dan Q adalah $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$. Padahal jarak titik P dan Q adalah jari-jari lingkaran, yaitu r, maka kita memperoleh hubungan

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Karena titik $Q(x,y)$ kita ambil sembarang pada lingkaran, maka untuk setiap titik (x,y) yang terletak pada lingkaran selalu berlaku $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Jadi, persamaan lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ dan berjari-jari r adalah

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Contoh 4.2.1

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $P(-3, 5)$ dan:
a. berjari-jari 5
b. melalui titik (2,3)
c. menyinggung sumbu-y

Penyelesaian:

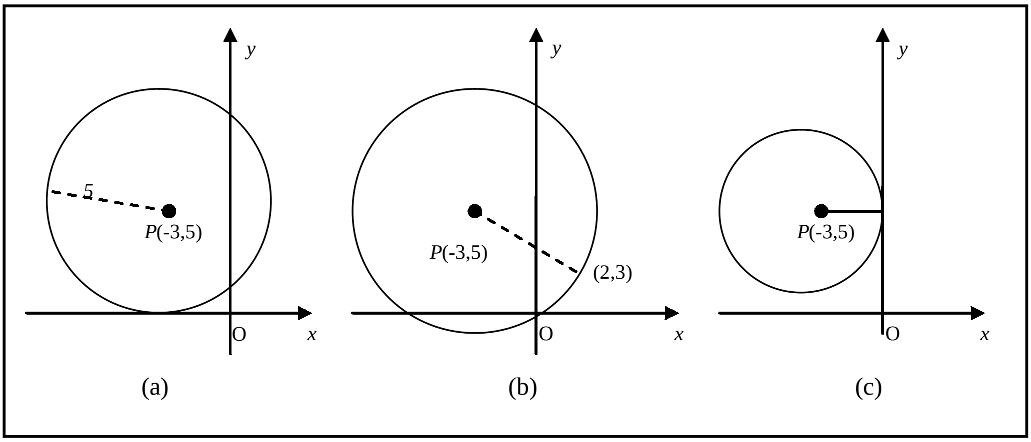
a. Persamaan lingkaran dengan pusat $P(-3,5)$ dan berjari-jari 5 adalah
$$(x-(-3))^2+(y-5)^2=5^2 \text{ atau } (x+3)^2+(y-5)^2=25$$
Perhatikan gambar 4.5 (a).

b. Lingkaran dengan pusat $P(-3,5)$ dan melalui titik (2,3) mempunyai jari-jari
$$\sqrt{(2-(-3))^2+(3-5)^2} = \sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$
Persamaan lingkaran itu:
$$(x+3)^2+(y-5)^2=29$$
Perhatikan gambar 4.5 (b).

c. Lingkaran dengan pusat $P(-3,5)$ dan menyinggung sumbu-y jari-jarinya adalah jarak $P(-3,5)$ dengan sumbu-y, yaitu 3. Jadi persamaannya adalah

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 = 9$$

Lihat gambar 4.5 (c).



Gambar 4.5

□

Contoh 4.2.2

Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $(-2, -1)$ menyinggung garis $4y = -3x$. Kemudian tentukan persamaan peta lingkaran ini karena pencerminan terhadap sumbu-y.

Penyelesaian:

Jari-jari lingkaran yang diminta adalah jarak titik $(-2,-1)$ terhadap garis $4y = -3x$, yaitu

$$r = \frac{|3(-2) + 4(-1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

Persamaan lingkaran dengan pusat $(-2,-1)$ dengan jari-jari 2 adalah

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

Selanjutnya, hasil pencerminan pusat $(-2, -1)$ lingkaran terhadap sumbu-y, adalah titik $(2, -1)$. (Ingat konsep pencerminan ketika SMP dahulu). Karena pencerminan tidak merubah bentuk, maka persamaan lingkaran peta karena pencerminan terhadap sumbu-y adalah lingkaran dengan pusat $(2, -1)$ dan jari-jari 2,

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$$

□

Latihan 4.2

1. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat dan jari-jari yang diberikan berikut.
   a. $(2, 1)$, $r = 4$
   b. $(3, 0)$, $r = 8$
   c. $(-4, -3)$, $r = 0{,}5$

2. Tentukan pusat dan jari-jari dari setiap lingkaran berikut ini :
   a. $(x-2)^2+(y-6)^2=64$ c. $4(x-5)^2+4(y+7)^2=25$
   b. $(x+2)^2+(y+4)^2=81$
3. Tentukan persamaan lingkaran yang konsentrik dengan lingkaran $(x+2)^2+(y+4)^2=81$ tetapi panjang jari-jari setengahnya.
4. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusatnya (–3, 4) dan:
   a. menyinggung sumbu-x c. menyinggung garis $y = -2$
   b. menyinggung sumbu-y d. menyinggung garis $x = 5$
5. Tentukan persamaan lingkaran dengan pusat (2, 3) dan menyinggung garis :
   a. $y = x + 5$ b. $2x + y + 6 = 0$
6. Dua lingkaran mempunyai pusat P(1,2), yang satu melalui titik A(2, 4) dan yang lain melalui titik B(3, 6). Tentukan rasio dari jari-jari dan luas kedua lingkaran.
7. Tentukan persamaan lingkaran yang menyinggung sumbu-x, dan pusatnya adalah titik potong garis $y = -x + 4$ dan $y = x + 2$. Kemudian tentukan persamaan peta lingkaran ini karena pencerminan terhadap sumbu-y.
8. Tentukan persamaan lingkaran yang mempunyai diameter ruas garis AB, dengan A(4, 0) dan B(0, 6).
9. Diketahui titik A(1, 2), B(4, 6) dan C(1,6). Tunjukkan bahwa sudut ACB siku-siku. Kemudian tentukan persamaan lingkaran yang melalui A, B dan C.
10. Misalkan $A(x_1, y_1)$ dan $B(x_2, y_2)$ adalah titik ujung diameter lingkaran, serta $P(x, y)$ adalah titik pada lingkaran itu. Tentukan gradien PA dan PB. Buktikan bahwa persamaan lingkaran dengan AB sebagai diameter dapat dituliskan dalam bentuk:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

4.3 Persamaan Umum Lingkaran

Pada bagian sebelumnya telah kita ketahui bahwa persamaan lingkaran yang berpusat di $P(a,b)$ dengan jari-jari r adalah

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Jika ruas kiri dari persamaan ini kita uraikan, maka akan diperoleh

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Persamaan ini dapat kita tuliskan dalam bentuk:

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0,$$

$A = -a$, $B = -b$, dan $C = a^2 + b^2 - r^2$. Persamaan terakhir ini disebut persamaan bentuk umum lingkaran. Dari bentuk umum ini kita dapat mencirikan persamaan lingkaran, yaitu koefisien x^2 dan y^2 selalu sama, dan suku xy tidak muncul dalam persamaan itu. Dengan melengkapi bentuk kuadrat dari persamaan bentuk umum di atas kita peroleh persamaan :

$$(x-(-A))^2 + (y-(-B))^2 = A^2 + B^2 - C$$

Dengan kata lain, persamaan $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ adalah persamaan lingkaran yang berpusat di $(-A, -B)$ dengan jari-jari $r = \sqrt{A^2+B^2-C}$.

Contoh 4.3.1

Tunjukkan bahwa persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0$ adalah persamaan lingkaran, kemudian tentukan pusat dan jari-jarinya.

Penyelesaian:

Dari persamaan yang diberikan kita dapat melengkapi bentuk kuadrat:

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 - 6x + 4y + 16 = 0 \quad & \Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 + 8y = -16 \\
& \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 8y + 16) = -16 + 9 + 16 \\
& \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9 \\
& \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = 3^2
\end{aligned}
$$

Jadi, persamaan di atas adalah persamaan lingkaran dengan pusat (3, – 4) dan berjari-jari 3.

□

Tugas Kelompok

Diskusikan penyelesaian dari soal-soal berikut ini.

1. Diketahui selembar kertas *ABCD* berbentuk bujur sangkar dengan sisi 1 meter. Seperempat lingkaran digambarkan dari *B* ke *D* dengan pusat *A*. Lembar kertas itu dilipat sepanjang *EF*, dengan *E* pada *AB* dan *F* pada *AD*, sehingga *A* jatuh pada seperempat lingkaran. Tentukan luas segitiga *AEF* yang mungkin.
2. Lingkaran L_1 dan L_2 masing-masing berjari-jari 1 dan 7, dan jarak kedua pusat lingkaran adalah 12. Jika *PQ* dan *RS* adalah garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran, berapakah luas daerah yang dibatasi oleh sabuk lilitan luar?

Contoh 4.3.2

Tentukan persamaan lingkaran yang melalui tiga titik *O*(0,0), *A*(–2 ,4) dan *B*(–1,7).

Penyelesaian:

Bentuk umum persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$$

Dengan mensubtitusikan koordinat-koordinat titik-titik *O*, *A* dan *B* ke dalam persamaan ini, kita peroleh:

$$0^2 + 0^2 + 2A.0 + 2b.0 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$(-2)^2 + 4^2 - 4A + 8B + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -A + 2B = -5$$

$$(-1)^2 + 7^2 - 2A + 14B + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad -A + 7B = -50$$

dengan menyelesaikan sistem persamaan

$$-A + 2B = -5 \text{ dan } -A + 7B = -50$$

kita peroleh $A = -13$ dan $B = -9$. Jadi, lingkaran yang ditanyakan mempunyai persamaan

$$x^2 + y^2 - 26x - 18y = 0$$

□

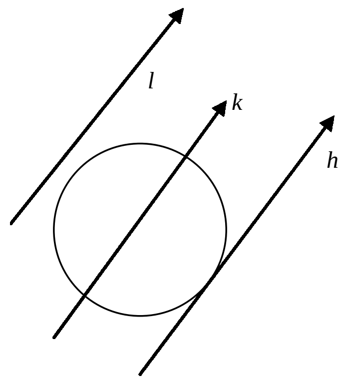
Latihan 4.3

1. Tentukan pusat dan jari-jari dari setiap lingkaran berikut.
   a. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 16y + 11 = 0$
   b. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 3y = 0$
   c. $x^2 + y^2 + 2\sin\theta x - 2\cos\theta y + \sin^2\theta = 0$
2. Manakah dari titik-titik berikut yang terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$?
   a. (1, 8)
   b. (8, 1)
   c. (–2, –1)
3. Tentukan A dan B sehingga titik yang diketahui terletak pada lingkaran diberikan:
   a. (1,2); $x^2 + y^2 - 2Ax + 3y + 1 = 0$
   b. (–1,2); $x^2 + y^2 - 5x - 2By - 6 = 0$
4. Tentukan persamaan lingkaran yang melalui titik-titik (0,0), (1,3), dan (–3,–2).
5. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga ABC jika A(2,3), B(1,6) dan C(0,-1). Tentukan pula titik pusat dan jari-jarinya.
6. Tentukan persamaan lingkaran luar segitiga yang sisi-sisinya adalah:
   a. $2x + y = 0$; $y = 2$ dan $x = -2$
   b. $y = -2x + 5$; $3x - y = -5$ dan $x - 7y = 25$
7. Tunjukkan bahwa lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ melalui titik asal, memotong sumbu-x di (2,0) dan memotong sumbu-y di (4,0).
8. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$. Mana yang benar pernyataan berikut?
   a. jari-jarinya 5,
   b. pusatnya terletak pada garis $x + 2y = 5$,
   c. titik (0,0) terletak di dalam lingkaran,
   d. menyinggung garis $y = 9$,
   e. berpotongan dengan garis $y = x$,
   f. lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ terletak di dalamnya.
9. Tentukan jarak titik-titik berikut dengan lingkaran yang diberikan.
   a. (7,4) dan $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$,
   b. (–1,– 7) dan $x^2 + y^2 = 36$,
   c. (2,–1) dan $x^2 + y^2 + 3x - 7y - 18 = 0$.
10. Diketahui titik A(–3,4) dan B(2,– 1). Buktikan bahwa persamaan tempat kedudukan $P(x,y)$ sehingga $2AP = 3PB$ adalah suatu lingkaran. Tentukan pusat dan jari-jarinya.

4.4 Perpotongan Garis dan Lingkaran

Jika kita mempunyai sembarang garis lurus dan lingkaran, maka secara geometri terdapat tiga kemungkinan posisi garis terhadap lingkaran itu, yaitu: (1) garis memotong lingkaran di satu titik atau menyinggung lingkaran; (2) garis memotong lingkaran di dua titik; (3) garis tidak memotong lingkaran sama sekali. Perhatikan gambar 4.6.

Misalkan kita mempunyai persamaan garis $y = mx + c$ dan persamaan lingkaran $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$. Subtitusi persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran akan menghasilkan persamaan kuadrat dalam *x*. Dengan menyelidiki diskriminan persamaan kuadrat ini (ingat pelajaran kelas X), secara aljabar kita dapat menentukan posisi garis terhadap lingkaran itu, dengan memperhatikan akar-akar dari persamaan kuadrat itu. Perhatikan tabel 4.1.



Gambar 4.6

Tabel 4.1

Garis memotong lingkaran	Persamaan kuadrat memiliki	Diskriminan
di dua titik yang berlainan	dua akar real berlainan	$b^2 - 4ac > 0$
di satu titik (menyinggung)	dua akar real yang sama	$b^2 - 4ac = 0$
tidak pada satu titik pun	akar tak real	$b^2 - 4ac < 0$

Contoh 4.4.1

Diketahui garis $y = mx$ dan lingkaran $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$. Tentukan harga *m* sehingga garis:

a. berpotongan di dua titik,
b. bersinggungan,
c. tidak berpotongan.

Penyelesaian:

Subtitusi persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran memberikan persamaan kuadrat dalam *x*,

$$(1 + m^2)x^2 - 10x + 16 = 0.$$

Diskriminan $D = 100 - 64(1 + m^2) = 36 - 64m^2 = 4(3 - 4m)(3 + 4m)$. Garis dan lingkaran akan:

a. Berpotongan jika $D > 0$, yaitu $-\frac{3}{4} < m < \frac{3}{4}$,

b. Bersinggungan jika $D = 0$, yaitu $m = -\frac{3}{4}$ atau $m = \frac{3}{4}$,

c. Tidak berpotongan jika $D < 0$, yaitu $m < -\frac{3}{4}$ atau $\frac{3}{4} < m$.

□

Latihan 4.4

1. Tentukan himpunan penyelesaian sistem-sistem persamaan berikut dengan cara aljabar, kemudian berikan arti geometri pada hasil-hasil yang diperoleh.

   a. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=9 \\ y=1 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=20 \\ y=2x \end{array}\right\}$

2. Tentukan titik potong lingkaran berikut dengan sumbu-x dan sumbu-y.

   a. $x^2+y^2=4$ b. $x^2+y^2=36$

3. Buktikan bahwa garis-garis berikut menyinggung lingkaran yang diberikan.

   a. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=2 \\ y=x+2 \end{array}\right\}$ b. $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+10x+4y+19=0 \\ x+3y+1=0 \end{array}\right\}$

4. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di $A(2,1)$ dan melalui $O(0,0)$. Titik tengah tali busur BC lingkaran tersebut adalah titik $M\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$. Tentukan koordinat B dan C.

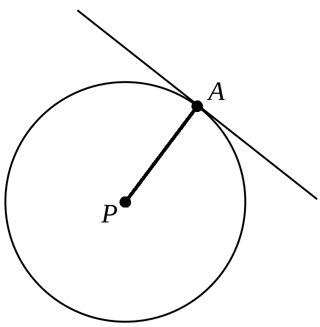
5. Sebuah lingkaran berpusat di kuadran pertama. Jari-jarinya k dan menyinggung sumbu-y di titik (0,3). Buktikan bahwa persamaan lingkaran itu adalah

   $$(x-k)^2+(y-3)^2=k^2$$

   Jika lingkaran juga melalui (2,7), maka tentukan persamaan lingkaran itu. Kemudian tentukan juga panjang tali busur sebagai hasil perpotongan dengan sumbu-x.

4.5 Garis Singung Lingkaran

4.5.1 Garis Singgung di Titik pada Lingkaran



Gambar 4.7

Di SMP dahulu telah kita pelajari bahwa sembarang garis yang melalui titik pusat lingkaran selalu tegak lurus (membentuk sudut 90°) dengan garis singgung lingkaran di titik potongnya. Juga telah kita pelajari bahwa dua garis saling tegak lurus apabila perkalian kedua gradiennya sama dengan -1.

Kita perhatikan gambar di samping. Misalkan P pusat lingkaran, A adalah sembarang titik pada lingkaran dan ℓ garis singgung lingkaran di titik A, maka ruas garis PA tegak lurus dengan garis singgung ℓ di titik A, sehingga berlaku

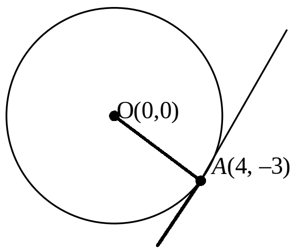
$$m_{PA}.m_{\ell}=-1$$

dengan m_{PA} gradien ruas garis PA dan m_{ℓ} gradien garis singgung ℓ. Oleh karena itu, jika kita mempunyai titik pada lingkaran kita dapat menentukan persamaan garis singgungnya.

Contoh 4.5.1

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ di titik $A(4,–3)$.

Penyelesaian:



Gambar 4.8

Dengan substitusi $x = 4$ dan $y = -3$,

$$4^2 + (-3)^2 = 25,$$

yang menyatakan bahwa titik $A(4,–3)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$. Pusat lingkaran adalah O(0,0), sehingga

$$m_{\mathrm{OA}} = \frac{4-0}{-3-0} = -\frac{4}{3}$$

Karena $m_{\mathrm{OA}}.m_{\ell} = -1$, maka $m_{\ell} = \frac{3}{4}$. Jadi, persamaan garis singgung di titik $A(4,–3)$ adalah

$$y + 3 = \tfrac{3}{4}(x-4) \text{ atau } y = \tfrac{3}{4}x - 6$$

□

4.5.2 Garis Singgung Melalui Titik di Luar Lingkaran

Misalkan $y = mx + c$ adalah persamaan garis yang melalui suatu titik di luar lingkaran, dengan m parameter. Dengan mensubtitusikan persamaan garis ke dalam persamaan lingkaran akan kita peroleh persamaan kuadrat dalam x. Syarat garis menyinggung lingkaran, maka diskriminan dari persamaan kuadrat ini harus sama dengan nol. Nilai parameter m diperoleh dari akar diskriminan ini.

Contoh 4.5.2

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ yang melalui titik $A(0,–5)$.

Penyelesaian:

Persamaan garis yang melalui titik (0,–5) dengan gradien m adalah

$$y + 5 = m(x-0) \text{ atau } y = mx - 5$$

Dengan mensubtitusikan persamaan garis ke dalam persamaan linkaran kita peroleh

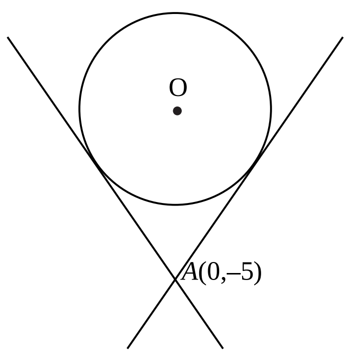
$$x^2 + (mx-5)^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x^2 + m^2x^2 - 10mx + 25 = 9$$
$$\Leftrightarrow (1+m^2)x^2 + 10mx + 16 = 0$$

Diskriminan dari persamaan kuadrat terakhir adalah

$$D = b^2 - 4ac = 100m^2 - 4(1+m^2)(16) = 9m^2 - 1$$

Syarat menyinggung adalah $D = 0$, (lihat tabel 4.1)

$$D = 0 \Leftrightarrow 9m^2 - 16 = 0$$
$$\Leftrightarrow 9m^2 = 16$$
$$\Leftrightarrow m = \pm\tfrac{4}{3}$$



Gambar 4.9

Dengan mensubtitusikan harga m ini kita memperoleh persamaan gari singgung

$$y = \tfrac{4}{3}x - 5 \text{ dan } y = -\tfrac{4}{3}x - 5$$

□

Contoh 4.5.3

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ yang sejajar garis $3x - 4y = 2$.

Penyelesaian:

Dua garis sejajar apabila keduanya mempunyai gradien yang sama (masih ingat kan?), sehingga gradien garis singgung adalah $\frac{3}{4}$. Misalkan persamaan garis singgung itu adalah

$$y = \tfrac{3}{4}x + c$$

Akan kita tentukan nilai c. Subtitusi persamaan garis ini ke dalam persamaan lingkaran,

$$x^2 + (\tfrac{3}{4}x + c)^2 - 4x - 6(\tfrac{3}{4}x + c) - 3 = 0 \iff \tfrac{25}{16}x^2 + (\tfrac{3}{2}c - \tfrac{17}{2})x + c^2 - 6c - 3 = 0$$

Diskriminan persamaan kuadrat,

$$D = (\tfrac{3}{2}c - \tfrac{17}{2})^2 - 4 \cdot \tfrac{25}{16}(c^2 - 6c - 3) = -4c^2 + 12c + 91$$

Syarat menyinggung adalah $D = 0$,

$$\begin{aligned} D = 0 &\iff -4c^2 + 12c + 91 = 0 \\ &\iff (2c - 13)(2c + 7) = 0 \\ &\iff c = \tfrac{13}{2} \text{ atau } c = -\tfrac{7}{2} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan garis singgung yang ditanyakan adalah $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$.

□

4.5.3 Teorema Garis Singgung Lingkaran

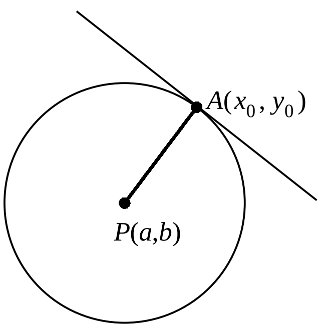
Sekarang kita sampai pada pembahasan suatu teorema yang memberikan bentuk umum dari persamaan garis singgung lingkaran, khususnya untuk titik singgung pada lingkaran atau gradien garis singgungnya telah diketahui.

Teorema 4.1

Jika titik $A(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik A mempunyai persamaan

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) = r^2$$

Bukti:



Gambar 4.10

Kita perhatikan gambar 4.12. Pusat lingkaran adalah $P(a,b)$, dan ℓ garis singgung lingkaran di titik $A(x_0, y_0)$. Garis PA tegak lurus terhadap garis singgung ℓ di titik A. Gradien garis PA adalah

$$m_{PA} = \frac{y_0 - b}{x_0 - a}$$

Akibatnya gradien garis singgung ℓ adalah

$$m_\ell = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

Jadi, persamaan gari singgung ℓ yang melaui titik $A(x_0, y_0)$ pada lingkaran adalah

$$y - y_0 = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}(x - x_0) \Leftrightarrow (y_0 - b)(y - y_0) + (x_0 - a)(x - x_0) = 0$$

Karena titik $A(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran, maka $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2$. Akibatnya persamaan terakhir dapat kita tuliskan sebagai:

$$(y_0 - b)\{(y-b) - (y_0 - b)\} + (x_0 - a)\{(x-a) - (x_0 - a)\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_0 - b)(y-b) - (y_0 - b)^2 + (x_0 - a)(x-a) - (x_0 - a)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (y_0 - b)(y-b) + (x_0 - a)(x-a) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2$$

Jadi, persamaan garis singgung ℓ yang melalui titik $A(x_0, y_0)$ pada lingkaran adalah

$$(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2$$

Akibat 4.1

Jika titik $A(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik A mempunyai persamaan

$$x_0 x + y_0 y = r^2$$

Bukti:

Ini kejadian khusus Teorema 4.1 untuk $a = 0$ dan $b = 0$. □

Teorema 4.2

Jika garis ℓ dengan gradien m menyinggung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka ℓ mempunyai persamaan

$$y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Bukti:

Misalkan persamaan garis ℓ adalah $y = mx + c$. Akan kita tentukan nilai c. Subtitusi ke dalam persamaan lingkaran memberikan persamaan kuadrat dalam x (mengapa?),

$$(1+m)x^2 - 2\{a + (b-c)m\}x + a^2 + (b-c)^2 - r^2 = 0$$

Diskriminan persamaan kuadrat adalah

$$D = (1+m^2)r^2 - (b - am - c)^2$$

Karena garis ℓ menyinggung lingkaran, maka secara aljabar $D = 0$,

$$(1+m^2)r^2 - (b-am-c)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow (1+m^2)r^2 - (b-am-c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (b-am-c)^2 = (1+m^2)r^2$$

$$\Leftrightarrow c = b - am \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Subtitusi harga c ini ke dalam persamaan garis singgung ℓ memberikan

$$y-b=m(x-a)\pm r\sqrt{1+m^2}$$

□

Akibat 4.2

Jika garis ℓ dengan gradien m menyinggung lingkaran $x^2+y^2=r^2$, maka ℓ mempunyai persamaan

$$y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$$

Bukti:

Ini kejadian khusus Teorema 4.2 untuk $a=0$ dan $b=0$.

□

Contoh 4.5.4

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-4x-10y+19=0$ di titik $A(1,2)$.

Penyelesaian:

Lingkaran $x^2+y^2-4x-10y+19=0$ dapat kita tuliskan kembali sebagai

$$(x-2)^2+(y-5)^2=10$$

Lingkaran berpusat di (2,5) dan berjari-jari $\sqrt{10}$. Telah ditunjukkan pada contoh 4.5.2, titik $A(1,2)$ terletak pada lingkaran. Menurut Teorema 4.1 persamaan garis singgung lingkaran di titik $A(1,2)$ adalah

$$(1-2)(x-2)+(2-5)(y-5)=10$$

Dengan menyederhanakan persamaan ini kita peroleh $y=-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$. Jadi, persamaan garis singgung di titik $A(1,2)$ adalah

$$y=-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{7}{3}$$

□

Contoh 4.5.5

Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ yang mempunyai gradien $\frac{3}{4}$.

Penyelesaian:

Lingkaran $x^2+y^2-4x-6y-3=0$ dapat kita tuliskan kembali sebagai

$$(x-2)^2+(y-3)^2=16$$

yaitu lingkaran berpusat di (2,3) dan berjari-jari 4. Menurut Teorema 4.2, gari singgung dengan gradien $\frac{3}{4}$ mempunyai persamaan

$$y-3=\tfrac{3}{4}(x-2)\pm 4\sqrt{1+(\tfrac{3}{4})^2}$$

Setelah kita sederhanakan persamaan ini menghasilkan dua persamaan garis singgung

$$y=\tfrac{3}{4}x+\tfrac{13}{2} \text{ dan } y=\tfrac{3}{4}x-\tfrac{7}{2}$$

Bandingkan dengan contoh 4.5.3. Hasilnya bagaimana?

□

Kita akan menyelesaikan masalah yang dihadapi Fadli yang ditampilkan pada ilustrasi awal bab. Masalah itu dapat disederhanakan menjadi mencari panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran dan panjang busur lingkaran, yang cara menghitung kedua besaran ini sudah kita pelajari ketika SMP dahulu.

Contoh 4.5.6

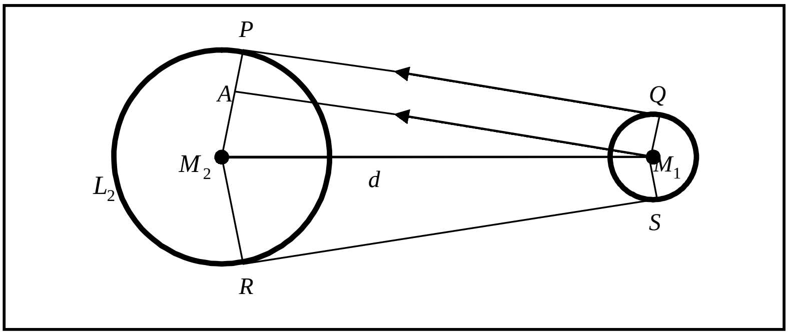
Misalkan lingkaran L_1 berjari-jari 2 dm dan lingkaran L_2 berjari-jari 8 dm dengan jarak kedua pusatnya adalah 12 dm. Berapakah panjang minimal sabuk lilitan luar yang menghubungkan kedua lingkaran tersebut?

Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut ini. Dalam hal ini

$$r_2 = PM_2 = 8,\quad r_1 = QM_1 = 2,\quad d = M_1M_2 = 12$$

$$PM_2 \perp PQ,\quad QM_1 \perp PQ, \text{ dan } PQ = RS = AM_1$$



Gambar 4.11

Jika $\angle M_1M_2P = \alpha$, maka $\angle PM_2R = 2\alpha$. Sudut refleks $\angle PM_2R = 360^o - 2\alpha$, dan $\angle QM_1S = \angle PM_2R = 2\alpha$. Kita peroleh

$$\cos\alpha = \frac{AM_2}{M_1M_2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{atau } \alpha = 60^o$$

Panjang minimal sabuk lilitan luar adalah:

2 panjang PQ + panjang busur besar PR + panjang busur kecil QS

- panjang PQ

$$PQ = AM_1 = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{108},$$

- panjang busur besar $PR = \dfrac{360^o - 2(60^o)}{360^o} 2\pi.8 = \dfrac{32}{3}\pi$,

- panjang busur kecil $QS = \left(\dfrac{2\alpha}{360^o}\right) 2\pi.2 = \dfrac{120^o}{360^o} 4\pi = \dfrac{4}{3}\pi$.

Panjang minimal sabuk lilitan luar adalah $2\sqrt{108} + \frac{32}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\sqrt{108} + 12\pi$.

Jadi, panjang minimal sabuk lilitan luar yang diperlukan adalah $\left(2\sqrt{108} + 12\pi\right)$ dm.

Tugas Mandiri

Misalkan lingkaran L_1 berjari-jari r_1 berpusat di M_1 dan lingkaran L_2 berjari-jari r_2 berpusat di M_2 dengan jarak kedua pusatnya adalah d. Buktikan bahwa:

a. Panjang garis singgung persekutuan luar adalah $\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$.

b. Panjang garis singgung persekutuan dalam adalah $\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$.

c. Panjang minimal sabuk lilitan luar yang menghubungkan kedua lingkaran adalah

$$2\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}+2\pi\left\{\frac{360^{\circ}-2\alpha}{360^{\circ}}r_1+\frac{2\alpha}{360^{\circ}}r_2\right\}$$

d. Panjang minimal sabuk lilitan dalam yang menghubungkan kedua lingkaran adalah

$$2\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}+2\pi\left\{\frac{360^{\circ}-2\alpha}{360^{\circ}}(r_1+r_2)\right\}$$

Latihan 4.5

1. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran di titik yang diberikan.
   a. $x^2 + y^2 = 10$ di titik (1, –3),
   b. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 45 = 0$ di titik (4, –1),
   c. $3x^2 + 3y^2 - 6x - 9y - 3 = 0$ di titik (–1,2).
2. Sebuah lingkaran berpusat di (3,4) dan berjari-jari 5.
   a. Tentukan titik potong lingkaran dengan sumbu-sumbu koordinat.
   b. Tentukan persamaan garis singgung di ketiga titik potong tersebut. Buktikan bahwa dua di antaranya sejajar.
   c. Tentukan koordinat titik keempat pada lingkaran sehingga keempat garis singgungnya membentuk jajaran genjang.
3. Buktikan bahwa garis $y = 3x + 10$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 20 = 0$, dan tentukan titik singgungnya.
4. Buktikan bahwa sumbu-y adalah garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2a\cos\theta\, x - 2a\sin\theta\, y + a^2\sin^2\theta = 0$.

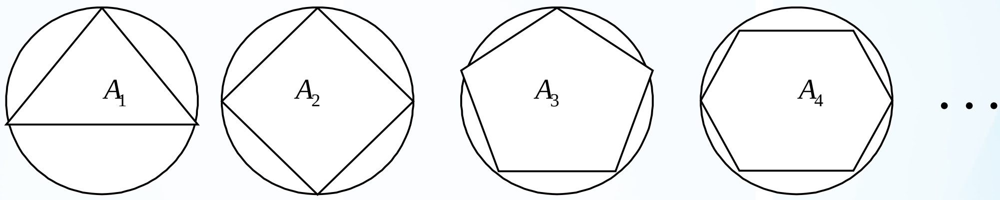
5. Diketahui lingkaran $x^2 + y^2 - 20y + 20 = 0$ dan titik $A(-8,6)$ terletak pada lingkaran.
   a. Tentukan gradien jari-jari yang melalui A. Tentukan pula persamaan garis singgung lingkaran di titik A.
   b. Buktikan bahwa garis singgung ini juga menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 20$.
6. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran melalui titik yang diberikan.
   a. $x^2 + y^2 = 9$ melalui titik (6,6).
   b. $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 14 = 0$ melalui titik (0,3).
7. Pada garis singgung di titik (5,4) pada lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ di ambil titik yang ordinatnya $5\frac{1}{2}$. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik tersebut.
8. Tentukan persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ yang sejajar garis $2x - y - 5 = 0$.
9. Berapa nilai k agar garis $y = 2x + k$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0$?
10. a. Tentukan persamaan lingkaran yang berpusat di titik $A(4,3)$ dan melalui O(0,0).
    b. Titik tengah tali busur PQ adalah titik $M(2,2)$. Tentukan titik P dan Q.
    c. Jika $R(-6, -2)$, buktikan bahwa RP dan RQ menyinggung lingkaran.

Rangkuman

1. Lingkaran adalah tempat kedudukan titik-titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tetap.
2. Persamaan lingkaran dengan pusat $O(0,0)$ dan berjari-jari r adalah $x^2 + y^2 = r^2$.
3. Persamaan lingkaran dengan pusat $P(a,b)$ dan berjari-jari r adalah $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.
4. Jika titik $A(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik A mempunyai persamaan
$$(x_0 - a)(x-a) + (y_0 - b)(y-b) = r^2$$
5. Jika titik $A(x_0, y_0)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka persamaan garis singgung lingkaran yang melalui titik A mempunyai persamaan $x_0x + y_0y = r^2$.
6. Jika garis ℓ dengan gradien m menyinggung lingkaran $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, maka ℓ mempunyai persamaan $y - b = m(x-a) \pm r\sqrt{1+m^2}$
7. Jika garis ℓ dengan gradien m menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, maka ℓ mempunyai persamaan $y = mx \pm r\sqrt{1+m^2}$.

Math Info

Pada zaman Yunani Kuno, 2500 tahun yang lalu, untuk mencari luas bidang menggunakan "metode penghabis" (*method of exhaustion*). Untuk mencari luas suatu lingkaran adalah dengan meletakkan poligon-poligon di bagian dalam lingkaran tersebut, kemudian membiarkan sisi poligon bertambah banyak. Gambar 4.12 mengilustrasikan proses ini dengan poligon beraturan di dalamnya.



Gambar 4.12

Misalkan A_n adalah luas poligon sebelah dalam kurva dengan n sisi. Seiring bertambahnya n, tampak bahwa semakin mendekati luas lingkaran. Kita katakan bahwa luas lingkaran adalah limit dari luas poligon sebelah dalam, dan kita tuliskan

$$A = \lim_{n \to \infty} A_n$$

Orang Yunani sendiri tidak menggunakan limit secara eksplisit. Tetapi, dengan menggunakan penalaran tak langsung, Eudoxus (abad kelima sebelum Masehi) menggunakan metode penghabis ini untuk membuktikan rumus umum luas lingkaran yang terkenal.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di (1,2) dan menyinggung garis $y = x$ adalah ....

   A. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 9/2 = 0$
   B. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 9/2 = 0$
   C. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 9/2 = 0$
   D. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 9/2 = 0$
   E. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9/2 = 0$

2. Lingkaran yang melalui titik-titik $A(7,17)$, $B(2,-8)$, dan $C(19,9)$ mempunyai jari-jari ... .
   A. 11
   B. 12
   C. 13
   D. 14
   E. 15
3. Jika lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By - 12 = 0$ mempunyai jari-jari 5, maka ... .
   A. $A^2 + B^2 = 52$
   B. $A^2 + B^2 = 40$
   C. $A^2 + B^2 = 50$
   D. $A^2 + B^2 = 25$
   E. $A^2 + B^2 = 49$
4. Suatu lingkaran menyinggung sumbu-x dan menyinggung garis $3x - 4y = 0$ di titik (4,3). Jari-jari lingkaran tersebut adalah ... .
   A. $\frac{5}{3}$
   B. $\frac{3}{5}$
   C. 3
   D. 5
   E. $\frac{5}{4}$
5. Garis $3x + 4y = 13$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$ di titik A dan B. Panjang $AB = \ldots$
   A. 6
   B. 8
   C. 9
   D. 10
   E. 12
6. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 31 = 0$ berpusat di titik P dan memotong garis $3x + 4y + 5 = 0$ di titik A dan B. Jika sudut $\angle APB = \alpha$, maka $\tan\alpha = \ldots$
   A. $-\frac{1}{2}$
   B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
   C. $\sqrt{2}$
   D. -2
   E. $-\sqrt{3}$
7. Garis $3x + 4y + k = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, apabila $k = \ldots$
   A. 7 atau 43
   B. 7 atau -43
   C. -7 atau 43
   D. -7 atau -43
   E. ± 9 atau ± 13

8. Garis $x - 7y + 20 = 0$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$ di titik ... .

A. $\left(\frac{2}{5}, -\frac{14}{5}\right)$
D. $\left(-\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$
B. $\left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{5}\right)$
E. $\left(-\frac{9}{5}, \frac{13}{5}\right)$
C. $\left(\frac{13}{5}, \frac{9}{5}\right)$

9. Suatu lingkaran melalui (1, 0) dan menyinggung garis $2x - y + 3 = 0$ di titik (2, 7), mempunyai persamaan ... .

A .$x^2 + y^2 - 24x - 4y + 30 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 24x - 4y + 23 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 26 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 12x - 8y - 12 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 14x - 8y - 40 = 0$

10. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 = 0$ yang melalui titik (2,7) adalah ... .

A. $x + y - 9 = 0$ atau $x + 3y - 23 = 0$
B. $3x + 2y - 20 = 0$ atau $2x - 3y + 17 = 0$
C. $2x + 3y - 25 = 0$ atau $3x - 2y + 8 = 0$
D. $3x + y - 13 = 0$ atau $x - 3y + 19 = 0$
E. $2x + y - 11 = 0$ atau $x - y + 5 = 0$

11. Panjang garis singgung persekutuan luar lingkaran $x^2 + y^2 - 16x + 12y + 51 = 0$ dan $x^2 + y^2 + -2x + 2y - 1 = 0$ adalah ... .

A. 4
D. 10
B. 6
E. 12
C. 8

12. Titik A terletak pada sumbu-x dan titik B terletak pada sumbu-y, sehingga panjang AB = 10. Jika P di tengah-tengah AB maka tempat kedudukan P adalah suatu lingkaran dengan persamaan ... .

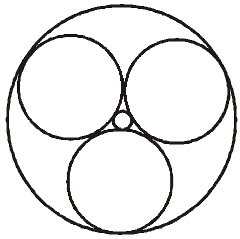
A. $x^2 + y^2 = 100$
D. $x^2 + y^2 = 20$
B. $x^2 + y^2 = 50$
E. $x^2 + y^2 = 10$
C. $x^2 + y^2 = 25$

13. Diketahui titik-titik P(–3, 4), Q(3, –2), dan $S(x,y)$ sehingga $PS : PQ = 2:1$. Titik S terletak pada lingkaran ... .

A. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 119 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 119 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 11\,9 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 12x + 8y - 119 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 10x + 12y - 9 = 0$

14. Tiga buah lingkaran yang berjari-jari sama saling bersinggungan luar, lingkaran kecil L_1 menyinggung ketiga lingkaran tersebut dan lingkaran besar L_2 juga menyinggung ketiga lingkaran tersebut, seperti pada gambar 4.13. Perbandingan jari-jari lingkaran L_2 dan jari-jari lingkaran L_1 adalah ... .

    A. $(1+\sqrt{3})$
    B. $14 : 1$
    C. $(7+4\sqrt{3}):1$
    D. $(7-4\sqrt{3}):1$
    E. $(7+2\sqrt{3}):1$



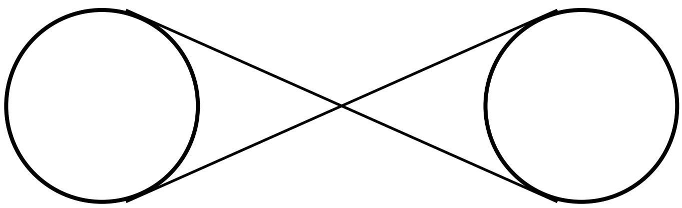
Gambar 4.13

15. Tiga pipa plastik yang masing-masing berdiameter a cm, diikat erat jadi satu. Jika arah tali pengikat tegak lurus pada arah panjang pipa, maka panjang tali yang melilit pipa-pipa itu adalah ... .

    A. $(\pi+3)\frac{a}{2}$
    B. $4\pi a$
    C. $a\pi$
    D. $(\pi+3)a$
    E. $(\pi+1)\frac{a}{3}$

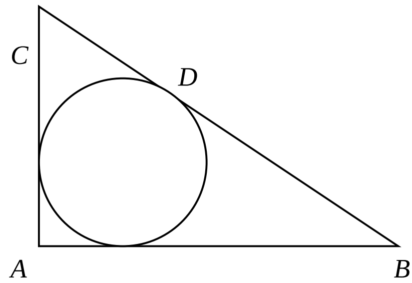
B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Garis $2x+3y=6$ memotong lingkaran $x^2+y^2=30$ di titik A dan B. Garis-garis singgung di A dan di B berpotongan di P, tentukan koordinat titik P.
17. Diketahui titik $A(-8, 0)$ dan titik $B(-2, 0)$. Buktikan bahwa tempat kedudukan titik $P(x,y)$ sehingga $PA = 3PB$ adalah sebuah lingkaran. Tentukan pula semua garis singgung lingkaran yang melalui titik $(0,-5)$.
18. Sebuah tali mengelilingi secara ketat dua lingkaran dengan persamaan $(x-1)^2+(y+2)^2=16$ dan $(x+9)^2+(y-10)^2=16$. Berapakah panjang tali ini?
19. Tentukan panjang dari tali yang bersilangan pada gambar 4.14, yang dipasang erat di sekeliling lingkaran $(x-2)^2+(y-2)^2=9$ dan $(x-10)^2+(y-8)^2=9$.



Gambar 4.14

20. Segitiga ABC adalah segitiga siku-siku di A dengan sisi miring $a = |BC|$, lihat gambar 4.15.



Gambar 4.15

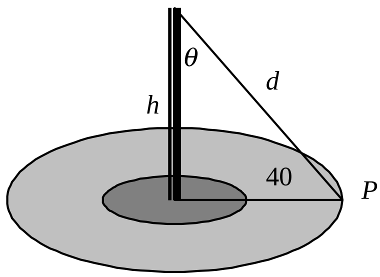
a. Jika lingkaran yang diletakkan di dalam menyinggung sisi miring pada D, perlihatkan bahwa

$$|CD| = \tfrac{1}{2}\left(|BC| + |AC| - |AB|\right)$$

b. Jika $\theta = \frac{1}{2}\angle ACB$, maka nyatakan jari-jari r lingkaran yang diletakkan di dalam sebagai a dan θ.

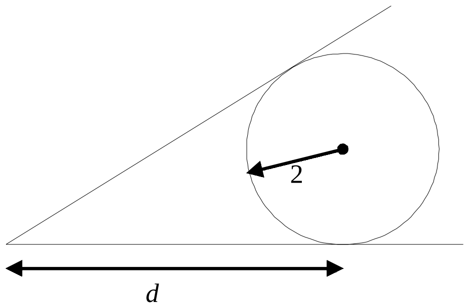
Soal Analisis

1. Jendela Norman mempunyai bentuk persegi panjang yang di atasnya berupa setengah lingkaran. Jika keliling jendela 30 meter, nyatakan luas jendela, A, sebagai fungsi lebar x.
2. Sebuah lampu diletakkan pada puncak tiang tinggi h meter untuk menerangai suatu lingkaran lalu lintas yang sibuk, yang berjari-jari 40 meter. Intensitas penyinaran I pada sembarang titik P pada lingkaran berbanding langsung terhadap kosinus sudut θ (lihat gambar 4.16) dan berbanding terbalik terhadap kuadrat jarak d dari sumber cahaya. Nyatakan fungsi intensitas cahaya sebagai fungsi θ.



Gambar 4.16

3. Langit-langit atau plafon pada sebuah loteng membentuk sudut 30^{o} terhadap lantai. Sebuah pipa dengan jari-jari 2 inci ditempatkan sepanjang tepi loteng itu sedemikian sehingga satu sisi pipa menyentuh langit-langit dan sisi yang lain menyentuh lantai (lihat gambar 4.17). Berapakah jarak *d* dari tepi loteng ke posisi di mana pipa menyentuh lantai?



Gambar 4.17

4. Dalam fisika, gerak melingkar sebuah partikel dengan laju konstan dalam waktu yang dibutuhkan untuk satu putaran lengkap disebut periode (*T*). Jika jari-jari lingkaran adalah *r*, maka selama satu periode partikel menempuh jarak $2\pi r$, dengan besarnya laju dan percepatan masing-masing adalah:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad \text{dan} \quad a = \frac{v^2}{T}$$

Sebuah bola yang terikat bergerak dalam lingkaran horisontal yang berjari-jari 2m. Bola membuat satu putaran dalam 3 detik. Tentukan percepatannya.

5. Sebuah satelit dekat permukaan bumi bergerak dengan laju konstan dalam orbit melingkar mengelilingi pusat bumi. Jika percepatannya 9,81 m/detik^2, berapakah laju dan waktu yang dibutuhkan untuk membuat satu putaran penuh.

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Persamaan lingkaran
Kelompok	:	Semester	: 1 (satu)
Kegiatan	: Menentukan panjang garis singgung lingkaran		
Tujuan	: Mengetahui panjang garis singgung lingkaran, jika diketahui garis singgung yang lain		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Selembar karton
2. Buku catatan
3. Alat tulis
4. Jangka
5. Busur derajat
6. Penggaris

B. Cara kerja

1. Gambarlah sebuah lingkaran dengan jari-jari 20 cm.
2. Buat garis mendatar yang menyinggung lingkaran di titik Q.
3. Gambarlah sebuah garis singgung lain yang membentuk sudut 15^o dengan garis singgung mendatar.
4. Namakan perpotongan kedua garis singgung adalah titik P.
5. Dengan penggaris ukurlah panjang ruas garis PQ.
6. Lakukan langkah 3 sampai dengan 5 untuk sudut 30^o , 45^o , dan 60^o .

No.	Besar Sudut	Panjang Garis PQ
1.	15°	
2.	30°	
3.	45°	
4.	60°	

C. Analisis

1. Gambarlah garis yang melalui titik P dan pusat lingkaran.
2. Gambarlah dua garis masing-masing melalui pusat lingkaran dan titik singgung.
3. Lakukan analisis dengan Teorema Phytagoras untuk menghitung panjang garis PQ.
4. Cocokkan hasil ini dengan percobaan Anda.

Teka-Teki Matematika

Menebak Umur Seseorang

Andaikan kita akan menebak umur seseorang umurnya 60 tahun ke bawah. Susunlah bilangan-bilangan 1, 2, 3, ..., 60 itu dalam 6 kartu sebagai berikut.

A

1	3	5	7	9
11	13	15	17	19
21	23	25	27	29
31	33	35	37	39
41	43	45	47	49
51	53	55	57	59

B

2	3	6	7	10
11	14	15	18	19
22	23	26	27	30
31	34	35	38	39
42	43	46	47	50
51	54	55	58	59

C

4	5	6	7	12
13	14	15	20	21
22	23	28	29	30
31	36	37	38	39
44	45	46	47	52
53	54	55	60	

D

8	9	10	11	12
13	14	15	24	25
26	27	28	29	30
31	40	41	42	43
44	45	46	47	56
57	58	59	60	

E

16	17	18	19	20
21	22	23	24	25
26	27	28	29	30
31	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

F

32	33	34	35	36
37	38	39	40	41
42	43	44	45	46
47	48	49	50	51
52	53	54	55	56
57	58	59	60	

Mintalah orang yang akan ditebak umurnya itu meneliti bilangan-bilangan yang tertulis pada kartu-kartu itu. Dan supaya ia mengatakan "ya" seandainya umurnya tercantum pada kartu-kartu itu, dan mengatakan "tidak" seandainya umurnya tidak tercantum. Andaikan ia mengatakan "ya" untuk kartu-kartu bernomor A, C, dan E. Maka umur orang itu ialah 21 tahun. Ini diperoleh dengan jalan menjumlahkan bilangan-bilangan pada sudut kiri atas dari setiap kartu yang ia sebutkan "ya", yaitu

1 + 4 + 16 = 21.

Latihan Ulangan Umum Semester 1

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Nilai rataan ulangan matematika dari 35 siswa adalah 58. Jika nilai Santi dan Tono digabungkan dengan kelompok tersebut nilai rataannya menjadi 59. Nilai rataan Santi dan Tono adalah ... .

   A. 77,5 D. 74,5
   B. 76,5 E. 73,5
   C. 75,5

2. Suatu data dengan rataan 20 dan jangkauan 4. Jika setiap nilai data dikalikan dengan p kemudian dikurangi dengan q diperoleh data baru dengan rataan 25 dan jangkauan 6, maka nilai $2p + q = \ldots$.

   A. 4 D. 7
   B. 5 E. 8
   C. 6

3. Median dan modus dari kelompok data:

   3 6 7 5 8 4 6 9

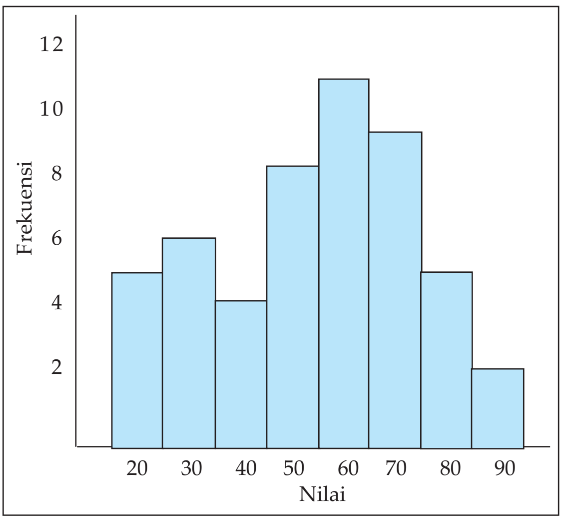
   adalah … .

   A. 7 dan 5 D. 5 dan 6,5
   B. 6 dan 6 E. 5 dan 6
   C. 6 dan 7

4. Umur rataan dari kelompok pegawai swasta dan pegawai negeri adalah 42 tahun. Jika umur rataan pegawai swasta 39 tahun dan umur rataan pegawai negeri adalah 47 tahun, maka perbandingan jumlah pegawai swasta dan pegawai negeri adalah ... .

   A. 3 : 4 D. 5 : 4
   B. 3 : 5 E. 5 : 3
   C. 3 : 7

5. Suatu kelompok data mempunyai histogram seperti di bawah ini.



   A. kuartil ketiga 70 dan rataan 54,2
   B. kuartil bawah 40 dan rataan 52,4
   C. median 60 dan kuartil atas 80
   D. median 65 dan rataan 54,2
   E. modus 54,2 dan median 60

6. Diketahui kumpulan data:

   8 11 11,5 12 13 13,5 14 18

   Pernyataan berikut yang benar adalah … .

   A. Rentang R adalah 5
   B. Hamparan H adalah 2,25
   C. Nilai data terkecil adalah pencilan
   D. Simpangan kuartil adalah 1,5
   E. Semua nilai data konsisten

7. Diberikan data sebagai berikut.

Interval	Frekuensi
20 – 24	2
25 – 29	4
30 – 34	10
35 – 39	a
40 – 44	8

   Jika rataan kelompok data adalah 35, maka nilai a = ...

   A. 16
   B. 14
   C. 10
   D. 8
   E. 6

8. Ragam atau variansi dari kumpulan data:

   3 5 9 10 6 6 8 9 10

   adalah ... .

   A. 4
   B. 5
   C. 6
   D. 7
   E. 8

9. Dalam suatu kelas terdapat 40 siswa, nilai rataan matematikanya 7. Jika seorang siswa yang nilainya 10 dan 3 orang siswa yang nilainya 3 tidak disertakan, maka rataannya berubah menjadi ... .

   A. 7,05
   B. 7,45
   C. 7,55
   D. 7,25
   E. 7,65

10. Hasil ujian 30 calon pegawai menghasilkan kelompok data berikut.

Interval	Frekuensi
21 – 30	1
31 – 40	1
41 – 50	a
51 – 60	9
61 – 70	b
71 – 80	6
81 – 90	2

   Calon dikatakan lulus apabila nilainya lebih dari 60. Jika banyaknya pegawai yang diterima adalah 16 orang, maka ab = ...

   A. 18
   B. 20
   C. 24
   D. 25
   E. 30

11. Diketahui data:

1,5 2,5 6,5 7,5 9,5

Rataan simpangan data di atas adalah ... .

A. 14
B. 5,5
C. 2,8
D. 1,8
E. 0

12. Seorang siswa diwajibkan mengerjakan 8 dari 10 soal, tetapi soal nomor 1 sampai dengan nomor 9 harus dikerjakan. Banyak pilihan yang dapat diambil adalah ....

A. 3
B. 5
C. 6
D. 8
E. 10

13. Dari angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri 3 angka kurang dari 400. Banyak bilangan dengan angka-angka yang berlainan adalah ... .

A. 20
B. 35
C. 40
D. 80
E. 120

14. Sebuah panitia beranggotakan 5 orang akan dipilih dari 10 pria dan 7 wanita. Banyaknya cara memilih ada ... .

A. 1.557
B. 1.575
C. 1.595
D. 5.175
E. 5.715

15. Jika diketahui $C_5^{n+2} = 2C_4^{n+1}$, maka $C_{10}^{2n} = \dots$.

A. 802
B. 808
C. 1.280
D. 1.820
E. 4.108

16. Akan dibuat nomor-nomor undian yang terdiri atas satu huruf dan diikuti dua buah angka yang berbeda dengan angka kedua bilangan ganjil. Banyak nomor undian adalah ... .

A. 1.185
B. 1.180
C. 1.170
D. 1.165
E. 1.160

17. Banyak segitiga yang dapat dibuat dari 9 titik yang tidak segaris adalah ... .

A. 128
B. 104
C. 92
D. 84
E. 48

18. Dalam kotak berisi 4 bola merah dan 6 bola putih. Diambil 3 bola sekaligus. Peluang terambilnya bola berbeda warna adalah ... .

A. $\frac{1}{12}$
B. $\frac{1}{6}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{2}{5}$
E. $\frac{4}{5}$

19. Dua buah dadu sisi enam dilemparkan bersama. Peluang munculnya jumlah mata dadu 7 atau 10 adalah ... .

A. $\frac{5}{9}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{7}$

D. $\frac{1}{9}$

E. $\frac{2}{9}$

20. Dilemparkan empat keping mata uang logam secara bersama sebanyak 72 kali. Frekuensi harapan muncul dua gambar adalah ... .

A. 48 kali

B. 36 kali

C. 27 kali

D. 21 kali

E. 18 kali

21. Sebuah koatk berisi 4 balon kuning dan 6 balon hijau. Jika dilakukan 3 kali pengembilan tanpa dikembalikan maka peluang pada 2 pengambilan pertama hijau dan pengambilan ketiga kuning adalah ... .

A. $\frac{1}{15}$

B. $\frac{1}{12}$

C. $\frac{1}{8}$

D. $\frac{2}{15}$

E. $\frac{1}{6}$

22. Peluang Kanta lulus SPMB adalah 0,95 sedang peluang lulus Liana 0,92. Peluang Kanta tidak lulus tetapi Liana lulus SPMB adalah ... .

A. 0,043

B. 0,046

C. 0,049

D. 0,92

E. 0,958

23. Jika $\pi/2 < x < \pi$ dan $\sin x = p$, maka $\cos x - \tan x = \cdots$

A. $\frac{p^2 + p - 1}{\sqrt{1-p^2}}$

B. $\frac{p^2 - p - 1}{\sqrt{1-p^2}}$

C. $\frac{p^2 - p + 1}{\sqrt{1-p^2}}$

D. $\frac{-p^2 + p + 1}{\sqrt{1-p^2}}$

E. $\frac{p^2 + p + 1}{\sqrt{1-p^2}}$

24. Jika segitiga ABC siku-siku di C, dan diketahui $\sin A \cos B = \frac{3}{5}$, maka $\frac{\tan A}{\tan B} = \cdots$

A. 3

B. $\frac{3}{2}$

C. 1

D. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{3}$

25. Jika $3\cos^2 2x + 4\cos 2x - 4 = 0$, maka nilai $\cos x = \cdots$

A. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$ atau $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$

D. $\frac{1}{6}\sqrt{30}$ atau $-\frac{1}{6}\sqrt{30}$

E. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ atau $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$

26. Jika $A + B = 270^{\circ}$, maka $\cos A + \sin B = \cdots$

A. $2\sin B$

B. $2\cos B$

C. $\sin 2B$

D. $\cos B + \sin A$

E. 0

27. Jika dalam segitiga ABC, diketahui $\tan A = \frac{3}{4}$ dan $\tan B = \frac{4}{3}$, maka nilai $\sin C = \ldots.$

A. -1

B. $-\frac{24}{25}$

C. $-\frac{7}{25}$

D. $\frac{24}{25}$

E. 1

28. Diketahui segitiga ABC dengan sudut $B = 45^{\circ}$ dan CT garis tinggi dari sudut C. Jika $BC = a$ dan $AT = \frac{3}{2}a\sqrt{2}$, maka $AC = \ldots.$

A. $a\sqrt{2}$

B. $a\sqrt{3}$

C. $a\sqrt{5}$

D. $a\sqrt{7}$

E. $a\sqrt{11}$

29. Nilai dari $\dfrac{2\tan t}{1 + \tan^2 t} = \cdots$

A. $\sin 2t$

B. $\sin t \cos t$

C. $1 - 2\sin t$

D. $2\sin t$

E. $2\cos t$

30. Titik-titik sudut segitiga samakaki ABC terletak pada lingkaran yang berjari-jari 7 cm. Jika alas $AB = 2\sqrt{7}$ cm, maka $\tan A = \ldots$

A. $\frac{1}{7}\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$

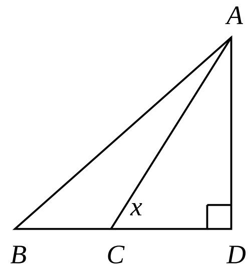
B. $\frac{1}{6}\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$

C. $\frac{1}{3}\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$

D. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$

E. $\left(\sqrt{6} + \sqrt{7}\right)$

31. Jika pada gambar $BC = CD$, maka $\cos B = \dots$



A. $\dfrac{2\tan x}{\sqrt{4+\tan^2 x}}$

B. $\dfrac{\tan x}{\sqrt{4+\tan^2 x}}$

C. $\dfrac{2\tan^2 x}{\sqrt{4+\tan^2 x}}$

D. $\dfrac{2}{\sqrt{4+\tan^2 x}}$

E. $\dfrac{2}{\tan x\sqrt{1+\tan^2 x}}$

32. Persamaan lingkaran yang melalui (1,0) dan menyinggung garis $y = 2x + 3$ di titik (2,7) adalah ... .

A. $x^2 + y^2 - 24x - 4y + 30 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 24x - 4y + 23 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 26 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 12x - 8y - 12 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 14x - 8y - 40 = 0$

33. Suatu lingkaran menyinggung sumbu x di titik (6,0) dan menyinggung garis $y = \sqrt{3}x$ mempunyai jari-jari ... .

A. $6\sqrt{3}$
B. $3\sqrt{2}$
C. $2\sqrt{3}$
D. $6\sqrt{3}$ atau $2\sqrt{3}$
E. $6\sqrt{2}$ atau $2\sqrt{2}$

34. Suatu lingkaran berpusat di (2,1) dan memotong garis $3x + 4y + 5 = 0$ di titik A dan B. Jika panjang $AB = 8$, maka persamaan lingkaran tersebut adalah … .

A. $x^2 + y^2 - 24x - 2y - 20 = 0$
B. $x^2 + y^2 - 24x - 2y - 4 = 0$
C. $x^2 + y^2 - 12x - 2y - 11 = 0$
D. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$
E. $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

35. Garis $y = 2x + k$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 20$, apabila $k = \dots$

A. 5 atau – 5
B. $2\sqrt{5}$ atau $-2\sqrt{5}$
C. $5\sqrt{2}$ atau $-5\sqrt{2}$
D. $5\sqrt{3}$ atau $-5\sqrt{3}$
E. 10 atau – 10

36. Lingkaran $4x^2 + 4y^2 - 24x + 8y - 24 = 0$ berpusat di titik ... .

A. $(-3,-1)$ D. $(3,1)$

B. $(3,-1)$ E. $(-1,3)$

C. $(-3,1)$

37. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 5$ yang melalui titik (7,1) adalah ....

A. $x-2y=5$ atau $2x-11y=30$

B. $2x-y=13$ atau $3x-y=20$

C. $x-2y=5$ atau $2x+11y=25$

D. $3x-y=20$ atau $4x-3y=25$

E. $x-2y=5$ atau $2x+y=15$

38. Panjang garis singgung dari titik (0,5) ke lingkaran $x^2 + y^2 = 9$ adalah ....

A. $\sqrt{32}$ D. 1

B. 4 E. $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

C. $\sqrt{33}$

39. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ yang sejajar dengan garis $3x - 4y = 0$ adalah ....

A. $y = \frac{3}{4}x - \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

B. $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{3}{4}x + \frac{7}{2}$

C. $y = \frac{4}{3}x + \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{2}$

D. $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{2}$

E. $y = \frac{3}{4}x + \frac{13}{2}$ dan $y = \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

40. Garis $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ menyingggung lingkaran $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 19 = 0$ di titik ... .

A. (1,2). D. (2,5)

B. (– 1 ,2) E. (4,10)

C. (2,1)

B. *Kerjakan soal-soal berikut dengan langkah-langkah yang tepat!*

41. Nilai ulangan matematika Kelas II suatu SMA diberikan oleh data berikut. Nilai rataan seluruhnya adalah 68. Nilai rataan Kelas II IPA adalah 75, dan nilai rataan Kelas II IPS adalah 64.

a. Tentukan perbandingan banyak siswa Kelas II IPA dengan banyak siswa Kelas II IPS.

b. Jika banyak siswa kelas II IPS adalah 210, maka berapa bayak siswa Kelas II IPA?

42. Diketahui kelompok data yang disajikan dalam tabel distribusi frekuensi berikut.

Interval	Frekuensi
21 – 30	2
31 – 40	5
41 – 50	0
51 – 60	20
61 – 70	15
71 – 80	0
81 – 90	8

a. Buatlah histogram dan poligon frekuensinya.
b. Buatlah *ogive* positif dan *ogive* negatifnya
c. Tetukan median, modus, dan rataan.

43. Misalkan A adalah kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak laki-laki dan perempuan, B adalah kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak paling bayak satu laki-laki.
a. Tunjukkan bahwa kejadian A dan B merupakan kejadian saling lepas, apabila suatu keluarga mempunyai 3 anak laki-laki.
b. Tunjukkan bahwa kejadian A dan B merupakan kejadian tidak saling lepas, apabila suatu keluarga mempunyai 2 anak laki-laki.

44. Peluang bahwa 10 tahun lagi seorang suami masih hidup adalah 1/4 dan peluang bahwa 10 tahun lagi istrinya masih hidup adalah 1/3. Berapakah peluang bahwa keduanya masih hidup dalam 10 tahun lagi?

45. Peluang terjadinya kebakaran pada musim kemarau adalah 0,1 sedang pada musim penghujan adalah 0,05. Jika menurut catatan, lamanya musim panas adalah 60% dari sepanjang tahun, berapakah peluang terjadinya kebakaran tepat pada musim hujan.

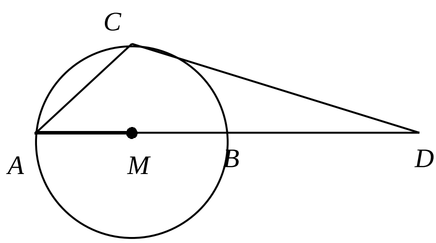
46. Jika dalam segitiga ABC berlaku $\tan A + \tan C = 2\tan B$, tentukan $\tan A \tan C$.

47. Jika $x + y = \dfrac{\pi}{6}$ dan $\cos x \cos y = \dfrac{3}{4}$, tentukan $\cos(x - y)$.

48. Garis $x - 2y = 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ di titik A dan B. Berapakah luas segitiga yang dibentuk oleh titik A, B, dan pusat lingkaran?

49. Tentukan persamaan garis yang sejajar garis $x - 2y = 10$ dan membagi lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + 10 = 0$ atas dua bagian yang sama besar.

50. Suatu lingkaran berpusat di M, dan titik D adalah perpanjangan diameter AB sedemikian sehingga garis singgung DC pada lingkaran membentuk $\angle BDC = 10^\circ$, berapakah besar $\angle CAB$?



BAB V

SUKUBANYAK

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan algoritma pembagian sukubanyak,
2. menentukan derajat suku banyak hasilbagi dan sisa pembagian dalam algoritma pembagian,
3. menentukan hasilbagi dan sisa pembagian sukubanyak oleh bentuk linear dan bentuk kuadrat,
4. menentukan sisi pembagian sukubanyak oleh bentuk linear dan bentuk kuadrat dengan teorema sisa,
5. menentukan faktor linear dari sukubanyak dengan teorema faktor,
6. menyelesaikan persamaan sukubanyak dengan menentukan faktor linear,
7. membuktikan teorema sisa dan teorema faktor.

Pengantar

Gambar 1.1 Seorang anak sedang membuat kotak dari kayu

Herman bermaksud membuat suatu kotak yang volumenya 270 dm^3, dengan ketentuan bahwa lebar kotak 3 dm lebih pendek dari panjangnya, dan tingginya 1 dm lebih pendek dari lebarnya. Berapa ukuran kotak yang dapat dibuat oleh Herman? Untuk meyelesaikan kotaknya Herman mempunyai alur pemikiran berikut ini.

Misal lebar kotak adalah x dm, maka panjang kotak adalah $(x + 3)$ dm, dan tingginya adalah $(x - 1)$ dm, sehingga volume kotak adalah $(x + 3)\ x\ (x - 1)$ dm^3. Karena Herman membatasi bahwa volume kotak adalah 270 dm^3, maka ia mempunyai

$$(x + 3)\ x\ (x - 1) = 270 \text{ atau } x^3 + 2x^2 - 3x - 270 = 0.$$

Dengan demikian untuk menentukan ukuran kotak itu, Herman harus mencari x sehingga memenuhi persamaan sukubanyak itu. Terdapat cara yang mendasar yang dapat dilakukan oleh Herman, yaitu dengan subtitusi x yang dipilih atau dengan memfaktorkan sukubanyak itu lebih dahulu. Tetapi Herman kebingungan dengan besarnya pangkat x dan besarnya konstanta persamaan di atas.

Untuk membantu menyelesaikan masalah Herman di atas, kita lebih dahulu perlu mengingat kembali konsep-konsep tentang operasi hitung bilangan real, pangkat, koefisien, algoritma pembagian bilangan bulat, peubah atau variabel pada bentuk aljabar, dan sistem persamaan linear.

Dengan menguasai konsep-konsep tersebut secara tuntas, kita dapat membantu menyelesaikan masalah Herman di atas.

5.1 Menghitung Nilai Suatu Sukubanyak

Bentuk aljabar $x^2 + 3x - 7$ dan $3x^5 + x^3 - 8x + 1$ disebut suku banyak (polinom) dalam peubah (variabel) x yang masing masing berderajat dua dan lima. Derajat suatu sukubanyak dalam x dimaksudkan adalah pangkat tertinggi dari x dalam sukubanyak itu. Secara umum, sukubanyak atau polinom dalam x berderajat n dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dengan:

- $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ adalah konstanta-konstanta bilangan real dan $a_n \neq 0$. Konstanta a_k disebut koefisien dari suku x^k dan a_0 disebut suku tetap.
- n adalah bilangan cacah yang menyatakan derajat sukubanyak.

Sebagai contoh, jika kita mempunyai sukubanyak berderajat 3,

$$2x^3 - 5x^2 + 3$$

maka koefisien dari x^3 adalah 2, koefisien dari x^2 adalah -5, koefisien dari x adalah 0, dan suku tetap adalah 3.

Suatu sukubanyak dalam x dapat kita tuliskan sebagai fungsi dari x. Misalkan sukubanyak dalam bentuk umum di depan dapat dituliskan sebagai fungsi $F(x)$ sebagai berikut.

$$F(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Dengan menyatakan sukubanyak sebagai fungsi, maka nilai sukubanyak itu dengan mudah dapat ditentukan. Secara umum, nilai suku banyak $F(x)$ untuk $x = h$ adalah nilai yang diperoleh dengan mengganti x dengan h, yaitu $F(h)$. Sebagai contoh, untuk

$$F(x) = -2x^3 + 5x - 8$$

maka nilai sukubanyak untuk $x = 2$ adalah

$$F(2) = -2 \cdot 2^3 + 5 \cdot 2 - 8 = -14$$

Cara subtitusi untuk menghitung nilai sukubanyak seperti di atas merupakan cara yang panjang, kecuali dalam keadaan yang sederhana. Adakah cara yang lebih efektif dan mudah menghitung nilai sembarang sukubanyak?

Misalkan kita menghitung $F(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ untuk $x = h$. Dengan cara subtitusi kita peroleh $F(h) = a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h + a_0$. Kita dapat menuliskan $a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h + a_0$ ke dalam bentuk:

$$a_3 h^3 + a_2 h^2 + a_1 h + a_0 = \left[a_3 h^2 + a_2 h + a_1\right]h + a_0 = \left[(a_3 h + a_2)h + a_1\right]h + a_0 .$$

Dengan membalik proses itu, kita dapat membentuk $a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$ dengan 3 langkah berikut.

1) *Langkah pertama*

   Kalikan a_3 dengan h dan jumlahkan hasilnya dengan a_2, maka diperoleh

$$a_3h + a_2$$

2) *Langkah kedua*

   Kalikan $a_3h + a_2$ dengan h dan jumlahkan hasilnya dengan a_1, maka diperoleh

$$a_3h^2 + a_2h + a_1$$

3) *Langkah ketiga*

   Kalikan $a_3h^2 + a_2h + a_1$ dengan h dan jumlahkan hasilnya dengan a_0, maka diperoleh

$$a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$$

   Proses mengalikan dan menjumlahkan pada langkah-langkah di atas, dapat kita susun dalam skema berikut ini.

$$\begin{array}{c|cccc}
h & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & a_3h & a_3h^2 + a_2h & a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h \\
\hline
 & a_3 & a_3h + a_2 & a_3h^2 + a_2h + a_1 & \multicolumn{1}{|c}{a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0 = F(h)}
\end{array}$$

   Tanda $\nearrow$ menyatakan "kalikan dengan *h*".

Pada proses perhitungan ini kita perhatikan bahwa:

1) Baris pertama sebelah kanan garis tegak adalah koefisien sukubanyak yang disusun dari koefisien pangkat tertinggi sampai koefisien dengan pangkat terrendah. Dalam hal salah satu suku muncul, koefisiennya diambil sama dengan nol.
2) Setiap panah menunjukkan perkalian dengan *h* yang kemudian diikuti dengan penjumlahan.

Cara menghitung nilai $F(h)$ dengan proses ini lebih dikenal dengan skema Horner. Kita dapat menunjukkan bahwa cara ini benar untuk sembarang suku banyak.

Contoh 5.1.1

Hitunglah nilai sukubanyak $F(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5$ untuk $x = 2$.

Penyelesaian:

Sukubanyak $F(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5$ mempunyai koefisien-koefisien $a_3 = 2$, $a_2 = 7$, $a_1 = 0$ dan $a_0 = -5$. Dengan skema Horner, kita peroleh

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 2 & 7 & 0 & -5 \\
 & & 4 & 22 & 44 \\
\hline
 & 2 & 11 & 22 & \multicolumn{1}{|c}{39 = F(2)}
\end{array}$$

Tanda $\nearrow$ menyatakan "kalikan dengan 2". Jadi, nilai sukubanyak adalah $F(2) = 39$. □

Latihan 5.1

1. Sebutkan nama peubah, derajat, dan koefisien-koefisien dari setiap sukubanyak berikut.

   a. $x^2 + 3x + 1$ c. $5 - t^2 - 4t^4$

   b. $3y^3 - 6y - 4$ d. $x^6 - 4x^3 + 8x^2 - 6x$

2. Tentukan koefisien :

   a. x^2 dalam $(3x + 4)\,(1 - 2x)$ c. x^3 dalam $(2x - 9)\,(3x^2 + 2)$

   b. x dalam $(x + 2)\,(2x - 1)$ d. x dalam $(x + 1)\,(x^2 + x + 3)$

3. Tulislah faktor yang lain pada :

   a. $2x^2 - 5x - 7 = (x + 1)\,(\ \ldots\ )$ b. $4x^2 - 20x - 7 = (2x - 1)\,(\ \ldots\ )$

4. Hitunglah $F(a)$ untuk nilai a yang diberikan dari setia sukubanyak yang diberikan:

   a. $F(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1;\ a = 2$ c. $F(x) = x^4 - 2x^2 + 1;\ a = -4$

   b. $F(x) = x^3 + 3x + 8\,;\ a = -3$

5. Hitunglah nilai setiap sukubanyak yang diberikan untuk x yang ditentukan.

   a. $x^3 + 5x^2 - 4x + 7$ untuk $x = 1$ c. $2x^4 + 9x^2 - 3x + 2$ untuk $x = -1$

   b. $5x^2 - 3x - 8$ untuk $x = 1/2$ d. $4x^4 - 8x^2 + 15x + 2$ untuk $x = -2$

6. Gunakan skema Horner untuk menghitung $F(a)$ untuk nilai a yang ditentukan, dari setiap sukubanyak yang diberikan.

   a. $F(x) = 2x^2 + 6x + 8\,;\ a = 3,$ d. $2x^3 - 3x^2 + 9x + 12\,;\ a = 0{,}5,$

   b. $F(x) = x^3 + 4x^2 + 1\,;\ a = -1,$ e. $5x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 1\,;\ a = 0{,}6,$

   c. $2x^4 + 3x^2 + 5x\,;\ a = -2,$ f. $x^5 - 0{,}5x^2 + 3\,;\ a = 0{,}5.$

5.2 Pembagian Sukubanyak

Kita ingat kembali cara pembagian bilangan bulat dalam bentuk panjang ketika di Sekolah Dasar dulu. Untuk mengingat kembali algoritma itu, kita ikuti contoh berikut ini.

Contoh 5.2.1

Hitunglah 183 : 15 dalam bentuk panjang.

Penyelesaian:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \overline{)183} \\ \underline{150} \\ 33 \\ \underline{30} \\ 3 \end{array}$$

Pembagian itu menunjukkan:

$183 = (15 \times 10) + 33$

$\quad = (15 \times 10) + (15 \times 2) + 3$

$\quad = (15 \times 12) + 3$

Pembagian berhenti di sini karena sisanya 3 kurang dari 15.

Jadi $183 = (15 \times 12) + 3$.

Pada pembagian di atas: 183 disebut terbagi, 15 disebut pembagi, 12 disebut hasilbagi, 3 disebut sisa. Algoritma pembagian bentuk panjang itu dapat pula kita lakukan dalam pembagian sukubanyak.

□

Contoh 5.2.2

Bagilah $2x^3 + 7x^2 - 5$ dengan $x - 2$.

Penyelesaian:

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 11x + 22 \\
\hline
\big)\; 2x^3 + 7x^2 - 5 \\
\underline{2x^3 - 4x^2} \\
11x^2 - 5 \\
\underline{11x^2 - 22x} \\
22x - 5 \\
\underline{22x - 44} \\
39
\end{array}
$$

Pembagian itu menunjukkan:

$$
\begin{aligned}
2x^3 + 7x^2 - 5 &= (x-2)2x^2 + 11x^2 - 5 \\
&= (x-2)\,2x^2 + (x-2)11x + 22x - 5 \\
&= (x-2)2x^2 + (x-2)11x + (x-2)22 + 39 \\
&= (x-2)(2x^2 + 11x + 22) + 39
\end{aligned}
$$

Pembagian berakhir di sini karena sisanya 39 berderajat lebih rendah daripada $x - 2$.

Jadi hasilbaginya $2x^2 + 11x + 22$ dan sisanya 39.

Bandingkan sisa pembagian pada contoh 5.2.2 di atas dengan hasil pada contoh 5.1.1. Apa yang dapat kita simpulkan? Benar bahwa dalam kedua contoh itu, sisa pembagian sama dengan nilai $F(2)$.

□

Hasil ini tetap benar untuk $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Kita perhatikan dua perhitungan berikut ini.

Pertama, menentukan nilai $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ jika x diganti dengan h dengan skema Horner,

$$
\begin{array}{c|cccc}
h & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & a_3h & a_3h^2 + a_2h & a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h \\
\hline
 & a_3 & a_3h + a_2 & a_3h^2 + a_2h + a_1 & \boxed{a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0 = F(h)}
\end{array}
$$

Kedua, pembagian sukubanyak $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ oleh $x - h$ dengan algoritma pembagian,

$$
\begin{array}{r}
a_3x^2 + (a_3h + a_2)x + (a_3h^2 + a_2h + a_1) \\
\hline
\big)\; a_3x^3 + a_2x^2 \qquad + a_1x \qquad\qquad + a_0 \\
\underline{a_3x^3 - a_3hx^2} \\
(a_3h + a_2)x^2 + a_1x \\
\underline{(a_3h + a_2)x^2 - (a_3h^2 + a_2h)x} \\
(a_3h^2 + a_2h + a_1)x + a_0 \\
\underline{(a_3h^2 + a_2h + a_1)x - (a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h)} \\
a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0 = \text{sisa}
\end{array}
$$

Dengan membandingkan kedua perhitungan tersebut, maka kita dapat menyimpulkan bahwa jika $F(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ dibagi dengan $x - h$:

1. Sisa pembagian adalah $F(h) = a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0$
2. Koefisien hasilbagi $a_3x^2 + (a_3h + a_2)x + (a_3h^2 + a_2h + a_1)$ tepat sama dengan bilangan-bilangan yang terletak pada baris terbawah pada perhitungan pertama, tanpa $F(h)$.
3. Jumlah derajat pembagi dan derajat hasilbagi sama dengan derajat terbagi. Derajat sisa paling besar satu lebih kecil dari derajat pembagi.

Ternyata perhitungan pertama merupakan cara yang sangat singkat dan skematik untuk menunjukkan pembagian $F(x)$ oleh $x - h$. Pembagian skema Horner ini dikenal sebagai pembagian sintetik.

Contoh 5.2.3

Tentukan hasil bagi dan sisanya dari pembagian $x^4 + x^2 - 16$ oleh $x^2 + 3x + 2$ dengan algoritma pembagian.

Penyelesaian:

Karena pembagi berderajat 2, maka hasil bagi berderajat 2 dan sisa paling besar berderajat 1.

$$
\begin{array}{rl}
 & x^2 - 6x + 17 \\
\hline
\big) & x^4 \qquad + x^2 - 16 \\
 & \underline{x^4 + 6x^3 + 2x^2} \\
 & -6x^3 - x^2 - 16 \\
 & \underline{-6x^3 - 18x^2 + 12x} \\
 & 17x^2 - 12x - 16 \\
 & \underline{17x^2 + 51x + 34} \\
 & -63x - 50
\end{array}
$$

Jadi, hasil bagi pembagian $x^4 + x^2 - 16$ oleh $x^2 + 3x + 2$ adalah $x^2 - 6x + 17$ dan sisanya $-63x - 50$.

□

Contoh 5.2.4

Bagilah sukubanyak $F(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 1$ dengan $x + 3$. Tulislah sukubanyak itu dalam bentuk $F(x) = (x+3)H(x) + S$, dengan $H(x)$ adalah hasil bagi dan S adalah sisa.

Penyelesaian:

Pembaginya adalah $x + 3 = x - (-3)$,

$$
\begin{array}{r|rrrr}
-3 & 1 & 3 & -4 & 1 \\
 & & -3 & 0 & 12 \\
\hline
 & 1 & 0 & -4 & \boxed{13}
\end{array}
$$

sedang hasilbagi adalah $x^2 - 4$ dan sisanya 13. Lebih lanjut, sukubanyak dapat kita tuliskan sebagai bentuk

$F(x) = (x+3)H(x) + S$, dengan $H(x) = x^2 - 4$ dan $S = 13$.

□

Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(x - h)$ memberikan sisa sama dengan 0, maka kita katakan bahwa $F(x)$ habis dibagi dengan $(x - h)$ atau $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$. Hal ini akan kita diskusikan pada sub-bab 5.4.

Latihan 5.2

1. Kerjakan setiap pembagian berikut dengan algoritma pembagian dan sajikan hasilnya dalam bentuk : terbagi = (pembagi $\times$ hasilbagi) + sisa, seperti pada contoh 5.2.1.
   a. 46 : 7   c. 3543 : 28
   b. 100 : 13   d. 8041 : 36.
2. Kerjakan setiap pembagian berikut dengan algoritma pembagian dan sajikan hasilnya dalam bentuk : terbagi = (pembagi $\times$ hasilbagi) + sisa.
   a. $6x + 8$ dibagi $x - 3$
   b. $x^2 + 5x + 4$ dibagi $x + 2$
   c. $8x^3 + x^2 - 4x + 11)$ dibagi $x + 5$
   d. $2x^3 - 4x^2 - 5x + 9$ dibagi $x^2 + 5x + 1$
3. Tentukan sisa pada pembagian berikut, dan bandingkan hasilnya dengan $F(a)$ untuk $F(x)$ dan a yang diberikan.
   a. $x^2 + 3x + 7$ dibagi oleh $x - 1$; $F(x) = x^2 + 3x + 7$, $a = 1$.
   b. $x^2 - 8x - 13$ dibagi oleh $x + 2$; $F(x) = x^2 - 8x - 13$, $a = -2$.
   c. $2x^3 + 3x^2 - 5x + 21$ dibagi oleh $x + 3$; $F(x) = x^2 - 8x - 13$, $a = -3$.
4. Kerjakan pembagian berikut dengan pembagian sintetik untuk menentukan hasil bagi dan sisanya.
   a. $2x^2 + 3x + 4$ dibagi $x - 1$ c. $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$ dibagi $x - 3$
   b. $3x^2 - 5x + 7$ dibagi $x + 2$ d. $5x^3 - 7x^2 + 5x + 4$ dibagi $x + 3$
5. Jika $P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$, buktikan bahwa $x + 2$ adalah faktor dari $P(x)$. Nyatakan $P(x)$ dalam faktor tersebut.
6. Dari faktor-faktor linear $x - 1$, $x + 2$ dan $x - 3$ manakah (jika ada) yang merupakan faktor dari $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.
7. Buktikan bahwa $x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ habis dibagi oleh $x - 2$.
8. Jika persamaan $x^3 - x^2 - 32x + a = 0$ mempunyai akar 2. Tentukan a dan akar-akar yang lain.

5.3 Teorema Sisa

Apakah benar jika $F(x)$ sembarang sukubanyak dibagi dengan $(x - h)$ sisanya pasti $F(h)$? Pembahasan pada sub-bab 5.2 menunjukkan bahwa hal itu benar untuk sembarang sukubanyak berderajat lebih kecil atau sama dengan tiga. Lebih lanjut, pembagian sintetik menunjukkan bahwa menentukan sisa pembagian oleh $(x - h)$ adalah proses yang sama seperti menghitung $F(h)$. Ternyata hasil ini benar untuk sembarang sukubanyak.

Jika suatu sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(x - h)$ maka hasilbaginya adalah suatu sukubanyak yang lain yang dapat dinyatakan dengan $H(x)$. Dengan algoritma pembagian kita memperoleh hubungan

$$F(x) = (x - h)H(x) + S$$

dengan S sisa yang berupa suatu konstanta yaitu tidak memuat x. Karena, jika sisa S masih memuat x maka pembagian itu masih dapat dilakukan satu langkah lagi.

Teorema 5.1 (Teorema Sisa)

Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(x - h)$, maka sisanya adalah $F(h)$.

Bukti:

Misalkan hasilbaginya $H(x)$ dan sisanya S. Derajat S lebih rendah satu daripada derajat $(x-h)$. Oleh karena itu, S adalah konstanta. Padahal $F(x) = (x-h)H(x) + S$ untuk semua x. Jika x diganti dengan h, maka diperoleh :

$$\begin{aligned} F(h) &= (h-h)H(h) + S \\ &= 0 \cdot H(h) + \mathrm{S} \\ &= 0 + \mathrm{S} \end{aligned}$$

Jadi, $F(h) = S$.

□

Contoh 5.3.1

Tentukan sisa jika $3x^5 + 5x - 6$ dibagi $(x - 2)$.

Penyelesaian:

Jika $F(x) = 3x^5 + 5x - 6$, maka

$$F(2) = 3.2^5 + 5.2 - 6 = 100$$

Jadi, menurut Teorema Sisa, sisanya adalah 100.

□

Contoh 5.3.2

Buktikan bahwa $4x^7 - 9x^2 + 5$ habis dibagi oleh $(x - 1)$.

Bukti:

Untuk membuktikan $F(x) = 4x^7 - 9x^2 + 5$ habis dibagi oleh $(x - 1)$, cukup dibuktikan bahwa sisa pembagian itu sama dengan 0. Perhatikan bahwa

$$F(1) = 4.1^7 - 9.1^2 + 5 = 0.$$

Karena sisanya $F(1) = 0$, maka sukubanyak $4x^7 - 9x^2 + 5$ habis dibagi oleh $(x - 1)$.

□

Karena $ax - b = a\left(x - \frac{b}{a}\right)$, maka pada pembagian $F(x)$ oleh $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ sisanya adalah $F\left(\frac{b}{a}\right)$, dan hasil baginya adalah $H(x)$. Dalam hal ini,

$$F(x) = \left(x - \frac{b}{a}\right)H(x) + F\left(\frac{b}{a}\right) \Leftrightarrow F(x) = (ax-b)\frac{H(x)}{a} + F\left(\frac{b}{a}\right)$$

Hal ini membuktikan teorema berikut ini.

Teorema 5.2

Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(ax - b)$, maka sisanya $F\left(\frac{b}{a}\right)$.

Contoh 5.3.3

Tentukan hasil bagi dan sisanya jika $F(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + 6x - 1$ dibagi $(2x - 1)$.

Penyelesaian:

Pembaginya adalah $2x - 1 = 2(x - \tfrac{1}{2})$,

$$\begin{array}{c|ccccc}
\tfrac{1}{2} & 2 & 1 & -1 & 6 & -1 \\
 & & 1 & 1 & 0 & 3 \\
\hline
 & 2 & 2 & 0 & 6 & \boxed{2}
\end{array}$$

$$F(x) = (x - \tfrac{1}{2})(2x^3 + 2x^2 + 6) + 2 = (2x - 1)(x^3 + x^2 + 3) + 2.$$

Jadi, hasil bagi pembagian $2x^4 + x^3 - x^2 + 6x - 1$ oleh $(2x - 1)$ adalah $x^3 + x^2 + 3$ dan sisanya 2.

□

Dengan memperhatikan Teorema 5.1 dan 5.2, secara umum kita peroleh bahwa sisa merupakan sukubanyak yang berderajat satu lebih kecil dari derajat pembaginya. Oleh karena itu, Teorema Sisa dapat kita terapkan pula apabila pembaginya suatu sukubanyak yang dapat difaktorkan menjadi sukubanyak berderajat satu.

Contoh 5. 3.4

Sukubanyak $F(x)$ dibagi $(x + 2)$ sisanya 14, dan jika dibagi $(x - 4)$ sisanya -4. Tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $x^2 - 2x + 8$.

Penyelesaian:

Misalkan hasilbaginya adalah $H(x)$ dan sisanya adalah $ax + b$,

$$\begin{aligned} F(x) &= (x^2 - 2x + 8)\ H(x) + (ax + b) \\ &= (x - 4)(x + 2)\ H(x) + (ax + b) \end{aligned}$$

Dengan Teorema Sisa,

$$F(-2) = 14 \quad \text{dan } F(4) = -4$$

Di pihak lain,

$$F(-2) = (-2 - 4)(-2 + 2)\ H(-2) - 2a + b = -2a + b$$
$$F(4) = (4 - 4)(4 + 2)\ H(4) + 4a + b = 4a + b$$

Kita peroleh sistem persamaan linear

$$-2a + b = 14 \text{ dan } 4a + b = -4,$$

yang mempunyai penyelesaian $a = -3$ dan $b = 8$. Jadi, jika $F(x)$ dibagi $x^2 - 2x + 8$ memberikan sisa $(8 - 3x)$.

□

Contoh 5.3.6

Misalkan sukubanyak $x^5 + ax^3 + b$ dibagi $(x^2 - 1)$ sisanya adalah $(2x + 1)$. Tentukan a dan b.

Penyelesaian:

Misalkan hasilbaginya hádala $H(x)$. Dari Teorema Sisa

$$\begin{aligned} x^5 + ax^3 + b &= (x^2 - 1).\ H(x) + 2x + 1 \\ &= (x - 1)(x + 1)\ H(x) + 2x + 1 \end{aligned}$$

Untuk $x = 1 \Longrightarrow 1^5 + a.1^3 + b = (1 - 1)(1 + 1).\ H(1) + 2.1 + 1$

$$a + b = 3$$

Untuk $x = -1 \Rightarrow (-1)^5 + a.(-1)^3 + b = (-1-1)(-1+1).\,H(-1) + 2.(-1) + 1$

$$-a + b = 0$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan linear

$$a + b = 3 \text{ dan } -a + b = 0$$

kita peroleh $a = b = 3/2$. Jadi, nilai yang memenuhi adalah $a = b = 3/2$.

□

Latihan 5.3

1. Tentukan sisa dari setiap pembagian berikut.
   a. $x^3 - 3x^2 + 5x - 9$ dibagi $(x + 2)$
   b. $x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 4x - 2$ dibagi $(x - 2)$
   c. $5x^3 + 21x^2 + 9x - 1$ dibagi $(5x + 1)$
   d. $6x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 6x - 10$ dibagi $(3x + 2)$
2. Tentukan hasilbagi dan sisa, dari setiap pembagian yang diberikan.
   a. $2x^3 + 5x^2 - 11x + 8$ dibagi $(2x - 1)$
   b. $2x^3 - x^2 - 1$ dibagi $(2x + 3)$
   c. $4x^4 - 5x^2 + 6x - 12$ dibagi $(2x + 1)$
   d. $3x^4 + 5x^3 - 11x^2 + 6x - 10$ dibagi $(3x - 1)$
3. Tentukan a dan atau b sehingga:
   a. $6x^3 - x^2 - 9x + a$ habis dibagi $(2x + 3)$
   b. $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 8x + a$ habis dibagi $(2x - 1)$
   c. $x^3 - 4x^2 + ax + b$ habis dibagi $(x^2 - 3x + 2)$
   d. $x^4 - 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ habis dibagi $(x^2 - 2x - 3)$
4. Tentukan sisa dari setiap pembagian yang diberikan.
   a. $2x^3 - 5x^2 - x + 4$ dibagi $(x^2 - 4x - 5)$
   b. $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 6$ dibagi $(x^2 - x - 2)$
   c. $x^7 - 4x^4 + 3x$ dibagi $(x^3 - 4x)$
   d. $x^9 + 5x^2 - 4$ dibagi $(x^3 - x)$
5. Sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x + 1)$ sisanya adalah -3, dan jika dibagi $(x - 1)$ sisanya adalah 5. Tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $(x^2 - 1)$.
6. Sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x - 1)$ sisanya adalah 4, dan jika dibagi $(x - 2)$ sisanya adalah 5. Tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $x^2 - 3x + 2$.
7. Sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x - 1)$ sisanya adalah 24, jika dibagi $(x + 1)$ sisanya adalah 8, dan jika dibagi $(x - 3)$ sisanya 32. Tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $(x^2 - 1)(x - 3)$.
8. Sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x^2 - x)$ sisanya adalah $(5x + 1)$, jika dibagi $(x^2 + x)$ sisanya adalah $(3x + 1)$. Tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $(x^2 - 1)$.
9. Tentukan a dan atau b jika:
   a. $2x^4 + ax^3 + 2x^2 - 3x + b$ dibagi $(x^2 - 1)$ sisanya adalah $(6x + 5)$
   b. $2x^4 + ax^3 + x + b$ dibagi $(x^2 - x - 2)$ sisanya adalah $(8x + 5)$
   c. $x^7 + ax^5 + b$ dibagi $(x^2 - 1)$ sisanya adalah $(4x + 1)$
10. Sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x^2 - 4)$ sisanya adalah $(3x - 2)$, tentukan sisanya jika $F(x)$ dibagi $(x + 2)$.

5.4 Teorema Faktor

Jika kita mempunyai bilangan 27, maka kita dapat menyatakan bilangan itu sebagai perkalian,

$$27 = 3 \cdot 9$$

Dalam hal ini kita mengatakan bahwa 3 dan 9 adalah faktor dari 27. Demikian juga, jika kita mempunyai sukubanyak $F(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$, maka kita dapat menguraikan menjadi faktor-faktor linear

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2).$$

Dengan fakta ini kita dapat membaca bahwa: $(x + 1)$, $(x - 1)$ dan $(x - 2)$ adalah faktor linear, sukubanyak $x^3 - 2x^2 - x + 2$ jika dan hanya jika pembagian sukubanyak itu oleh faktor-faktor linear tersebut memberikan sisa 0. Lihat kembali Contoh 5.2.7 di depan. Hal ini dibenarkan oleh teorema berikut ini.

> Teorema 5.3 (Teorema Faktor)
>
> Misalkan $F(x)$ sukubanyak, maka $F(h) = 0$ *jika dan hanya jika* $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$.

Bukti:

Menurut Teorema Sisa,

$$F(x) = (x - h) \cdot H(x) + F(h)$$

Jika $F(h) = 0$ maka $F(x) = (x - h).H(x)$, yaitu bahwa $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$.
Sebaliknya, jika $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$, maka

$$F(x) = (x - h) \cdot H(x)$$

untuk suatu sukubanyak $H(x)$. Oleh karena itu,

$$F(h) = (h - h) \cdot H(h) = 0 \cdot H(h) = 0$$

Contoh 5.4.1

Tentukan faktor-faktor dari $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$.

Penyelesaian:

Misalkan $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$. Dengan Teorema Faktor 5.3, $(x - h)$ faktor dari sukubanyak $F(x)$ jika dan hanya jika $F(h) = 0$. Dalam hal ini, $(x - h)$ merupakan faktor sukubanyak $F(x)$ apabila h merupakan pembagi dari 6, yaitu ± 1, ± 2, ± 3, ± 6. Kita mencoba dengan nilai-nilai itu. Jelaslah $F(1) \neq 0$, $F(-1) \neq 0$, $F(2) \neq 0$. Mengapa? Kita coba mengihitung $F(3)$,

$$\begin{array}{c|cccc}
3 & 2 & -3 & -11 & 6 \\
 & & 6 & 9 & 6 \\
\hline
 & 2 & 3 & -2 & \boxed{0 = F(3)}
\end{array}$$

Karena $F(3) = 0$, maka $(x - 3)$ merupakan faktor sukubanyak $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$. Faktor yang lain adalah $2x^2 + 3x - 2$. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 &= (x - 3)\ (2x^2 + 3x - 2). \\ &= (x - 3\ )\ (2x - 1)\ (x + 2). \end{aligned}$$

Jadi, faktor-faktor dari $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$ adalah $(x - 3)$, $(2x - 1)$, dan $(x + 2)$. □

Catatan: Dalam buku ini kita memfokuskan hanya faktor rasional, yaitu faktor yang koefisien-koefisiennya merupakan bilangan rasional, misalnya $(x-2)$ dan $(2x-1)$. Faktor $(x\sqrt{3}-2)$ bukan faktor rasional, karena $\sqrt{3}$ bukan bilangan rasional.

Latihan 5.4

1. Dengan menggunakan Teorema Faktor buktikan bahwa:
   a. $(x-1)$ dan $(x+6)$ adalah faktor-faktor dari x^2+5x-6.
   b. $(x-4)$ adalah faktor dari $2x^4-9x^3+5x^2-3x-4$.
   c. $(2x+1)$ adalah faktor dari $2x^3+11x^2+3x-1$.
   d. $(x-1)$ adalah faktor dari $x^3-(2a+1)x^2+(a^2+2a)x-a^2$.
2. Faktorkan setiap sukubanyak yang diberikan.
   a. x^3-7x+6
   b. $2x^3+7x^2+2x-3$
   c. y^3-39y^2+70
   d. $2z^3-5z^2+4z-21$
3. Tentukan a dan atau b sehingga:
   a. $x^4+4x^3+ax^2+4x+1$ mempunyai faktor $(x+1)$.
   b. x^3-ax^2+5x+b mempunyai faktor x^2-2x-3.
   c. $x^4-2ap^2x^2+9p^4$ mempunyai faktor $x-3p$.
   d. $x^4+2x^3-7x^2+ax+b$ mempunyai faktor x^2+2x-3. Kemudian faktorkan!
4. Hitunglah a, b dan c apabila $x-y+1$ adalah faktor dari $ax^2+bxy+cy^2+3x-y+2$.
5. Buktikan bahwa:
   a. $(x+y)(y+z)(z+x)$ adalah faktor dari $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$.
   b. $(x+y+z)$ adalah faktor dari $x^3+y^3+z^3-3yxz$.
6. Sukubanyak $F(x)$ berderajat dua mempunyai faktor $(x+2)$. Jika $F(x)$ dibagi dengan $(x-1)$ sisanya adalah 6 dan jika $F(x)$ dibagi dengan $(x-2)$ sisanya adalah 12. Tentukan sukubanyak $F(x)$ tersebut.

5.5 Persamaan Sukubanyak

Perasamaan sukubanyak kita maksudkan adalah persamaan yang berbentuk

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

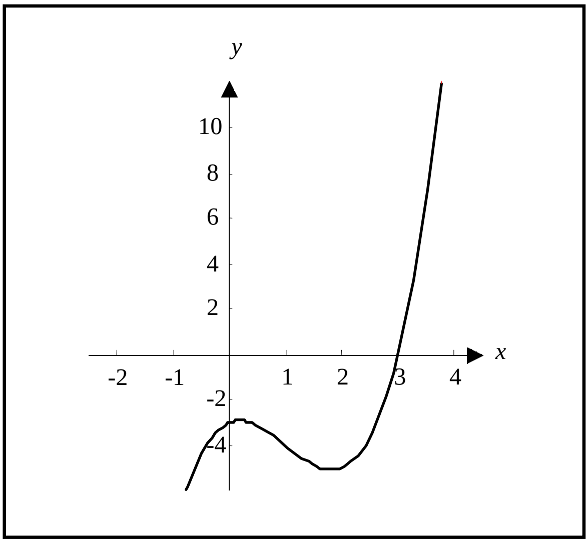
dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ adalah konstanta, $a_n \neq 0$ dan n bilangan asli. Harga $x = h$ yang jika kita subtitusikan ke sukubanyak memenuhi persamaan (5.1), maka h disebut akar dari persamaan itu.
Sebagai contoh, persamaan

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$$

mempunyai akar 3, karena untuk $x = 3$,

$$3^3 - 3.3^2 + 3 - 3 = 0$$

Secara geometri, jika $x = h$ akar dari persamaan sukubanyak $F(x) = 0$, maka grafik dari $y = F(x)$ memotong sumbu-x di h. Sebagai contoh, jika $F(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$, maka grafik dari $y = F(x)$ memotong sumbu-x di 3, lihat gambar 5.2.



Gambar 5.1

Pada sub-bab 5.4 telah kita pahami bahwa jika $F(x)$ sukubanyak, maka Teorema Faktor menyatakan bahwa $F(h) = 0$ *jika dan hanya jika* $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$. Dengan demikian dapat kita simpulkan bahwa:

$$h \text{ akar persamaan } F(x) = 0 \textit{ jika dan hanya jika } F(h) = 0.$$

Jika $F(x)$ sukubanyak berderajat n, maka $F(x)$ mempunyai faktor linear paling banyak n. Oleh karena itu, jika $F(x) = 0$ persamaan sukubanyak berderajat n, maka persamaan itu paling banyak mempunyai n akar.

Contoh 5.5.1

Buktikan bahwa 2 adalah akar persamaan $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ dan tentukan akar-akar yang lain.

Penyelesaian:

Misalkan $F(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Karena $F(x)$ berderajat tiga, maka $F(x) = 0$ paling banyak mempunyai 3 akar. Untuk membuktikan bahwa 2 adalah akar dari persamaan $F(x) = 0$, cukup dibuktikan $F(2) = 0$,

$$\begin{array}{c|cccc}
2 & 1 & -2 & -1 & 2 \\
 & & 2 & 0 & -2 \\
\hline
 & 1 & 0 & -1 & \boxed{0}
\end{array}$$

Pembagian sintetik menghasilkan $F(2) = 0$. Jadi, 2 adalah akar persamaan $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$. Lebih lanjut, pada pembagian tersebut hasil baginya adalah $(x^2 - 1)$, sehingga

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= (x - 2)(x^2 - 1) \\ &= (x - 2)(x - 1)(x + 1) \end{aligned}$$

Jadi, akar-akar dari $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ adalah 2, 1, dan -1.

□

Pada akhir bab ini kita akan membantu permasalahan Herman yang diberikan pada ilustrasi awal bab.

Contoh 5.5.2

Herman bermaksud membuat suatu kotak yang volumenya 270 dm^3, dengan ketentuan bahwa lebar kotak 3 dm lebih pendek dari panjangnya, dan tingginya 1 dm lebih pendek dari lebarnya. Berapa dimensi kotak yang dapat dibuat oleh Herman?

Penyelesaian:

Misal lebar kotak adalah x dm, maka panjang kotak adalah $(x+3)$ dm, dan tingginya adalah $(x-1)$ dm, sehingga volume kotak adalah

$$V(x) = (x+3)\,x\,(x-1)\text{ dm}^3$$

Karena disyaratkan bahwa volume kotak adalah 270 dm^3, maka haruslah

$$(x+3)\,x\,(x-1) = 270 \quad\text{atau}\quad x^3 + 2x^2 - 3x - 270 = 0$$

Permasalahannya sekarang adalah mencari akar real dari persamaan sukubanyak ini. Dengan Teorema Faktor, karena $F(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 270$ berderajat 3, maka $F(x) = 0$ paling banyak mempunyai 3 akar real. Pembagi bulat yang mungkin dari -270, diantaranya adalah 6, dan kita lakukan pembagian sintetik

$$\begin{array}{r|rrrr}
6 & 1 & 2 & -3 & -270 \\
 & & 6 & 48 & 270 \\
\hline
 & 1 & 8 & 45 & \boxed{0}
\end{array}$$

Pembagian sintetik menghasilkan bahwa

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 270 = (x-6)\,(x^2 + 8x + 45).$$

Akan tetapi persamaan kuadrat $x^2 + 8x + 45 = 0$ tidak mempunyai akar real. Mengapa? Dengan demikian, nilai x yang mungkin hanyalah 6. Jadi, kotak yang dibuat Herman dengan volume 270 dm^3 berukuran: lebar 6 dm, panjang 9 dm dan tinggi 5 dm.

□

Tugas Kelompok

Diskusikan penyelesaian dari soal-soal berikut dengan kelompok Anda.

1. Diketahui kerucut lingkaran tegak berjari-jari 5 cm dan tinggi 12 cm, kemudian di dalam kerucut tersebut dibuat suatu tabung. Jika jari-jari tabung adalah r cm, dan tingginya adalah h cm.
   a. Nyatakan volume tabung sebagai sukubanyak dalam peubah r.
   b. Jika volume tabung adalah $\frac{400}{9}\pi$ cm^3, berapakah jari-jari tabung ini?
2. Jika sebuah tangki menampung 5000 liter air, yang mengalir keluar dari alas tangki dalam 40 menit, maka Hukum Torricelli memberikan isi V dari air yang tersisa di tangki setelah t menit adalah

$$V = 5000\left(1 - \frac{t}{40}\right)^2, \quad 0 \le t \le 40$$

   a. Tentukan sisa air dalam tangki setelah 5 menit, 10 menit, dan 30 menit.
   b. Kapan air dalam tangki tersisa hanya 1250 liter?

Latihan 5.5

1. Buktikan bahwa 1 adalah akar persamaan $x^3 - 9x^2 + 20x - 12 = 0$, dan tentukan akar-akar yang lain.
2. Buktikan bahwa $-\frac{1}{2}$ adalah akar persamaan $4x^3 - 24x^2 + 27x + 20 = 0$ dan tentukan akar-akar yang lain.
3. Jika 3 adalah akar persamaan $x^3 - 37x^2 + a = 0$, tentukan a dan akar-akar yang lain.
4. Tentukan akar-akar bulat dari setiap persamaan yang diberikan.
   a. $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$
   b. $x^3 - 3x + 2 = 0$
   c. $x^4 - 16 = 0$
   d. $x^4 - 15x^2 - 10x + 24 = 0$
5. Diketahui $(x + 2)$ merupakan faktor dari $F(x) = 2x^3 + ax^2 + 5x + 6$.
   a. Tentukan a.
   b. Tentukan akar-akar persamaan $F(x) = 0$ untuk nilai a tersebut.

Rangkuman

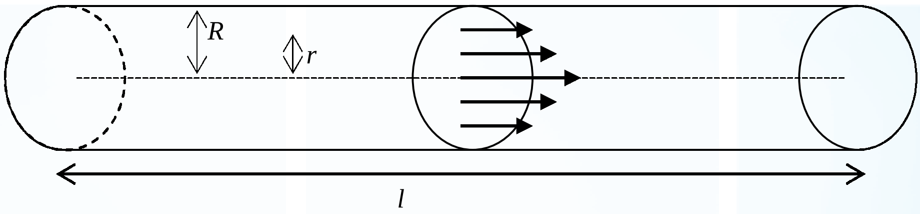
1. Sukubanyak atau polinom dalam x berderajat n dapat dituliskan dalam bentuk berikut ini.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

   dengan $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ adalah konstanta-konstanta bilangan real dan $a_n \neq 0$ yang disebut koefisien dari suku x^k dan a_0 disebut suku tetap, dan n adalah bilangan cacah yang menyatakan derajat sukubanyak.
2. Teorema Sisa: Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(x - h)$, maka sisanya adalah $F(h)$.
3. Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi dengan $(ax - b)$, maka sisanya $F\left(\frac{b}{a}\right)$.
4. Teorema Faktor: Misalkan $F(x)$ sukubanyak, maka $F(h) = 0$ jika dan hanya jika $(x - h)$ merupakan faktor dari $F(x)$.
5. Persamaan sukubanyak $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$
   dikatakan mempunyai akar h jika h memenuhi dari persamaan itu.

Math Info

Pada waktu kita meninjau aliran darah melalui pembuluh darah, seperti urat darah halus atau arteri, kita dapat mengambil bentuk pembuluh darah berupa tabung dengan jari-jari R dan panjang l seperti diilustrasikan dalam gambar 5.3 berikut.



Gambar 5.3

Karena gesekan pada dinding tabung, kecepatan darah v adalah terbesar sepanjang sumbu pusat tabung dan berkurang ketika jarak r dari sumbu bertambah besar samapai v menjadi 0 pada permukaan dinding. Kaitan antara v dan r diberikan oleh Hukum Aliran Laminar yang ditemukan oleh fisikawan perancis Jean-Louis-Marie Poiseuille pada tahun 1840, berupa sukubanyak berderajat dua

$$v = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

dengan η adalah viskositas darah, dan P adalah selisih tekanan di antara ujung tabung.

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Pecahan $\dfrac{2x^3 + px^2 - qx + 3}{x^2 - 3x + 2}$ dapat disederhanakan, maka nilai $p + q = \ldots$

   A. -6 | D. -3
   B. -5 | E. -2
   C. -4

2. Jika sukubanyak $F(x) = x^3 + 2ax^2 + 5x + p$ dibagi oleh $(x-2)$ dan $(x+1)$ masing-masing memberikan sisa 20 dan 12, maka nilai $a + p = \ldots$

   A. $-\dfrac{18}{3}$ | D. $\dfrac{70}{3}$
   B. $\dfrac{16}{3}$ | E. $\dfrac{91}{3}$
   C. $\dfrac{62}{3}$

3. Jika sukubanyak $F(x)$ dibagi oleh $x^2 + 3x - 4$ dan $x^2 - 6x + 5$ mempunyai sisa $3x + 5$ dan $x + 7$, dan jika dibagi oleh $x^2 - x - 20$ mempunyai sisa $ax + b$, maka nilai $9a - 3b = \ldots$

   A. $11\frac{1}{3}$ | D. $4\frac{1}{2}$
   B. $14\frac{2}{3}$ | E. $6\frac{1}{3}$
   C. 8

4. Salah satu akar persamaan sukubanyak $2x^3 - 7x^2 - 7x + 30 = 0$ adalah 3, maka jumlah dua akar yang lain adalah ...

   A. $-\dfrac{1}{2}$ | D. 3
   B. $\dfrac{1}{2}$ | E. 5
   C. 1

5. Jika sukubanyak $4x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 8x + a$ dan $6x^2 - 11x + 4$ mempunyai satu faktor yang sama, maka nilai a = ...
   A. –4
   B. –2
   C. 0
   D. 2
   E. 4

6. Sukubanyak $x^3 - 12x + k$ habis dibagi oleh $(x-2)$, maka ia juga habis dibagi oleh ....
   A. $x+1$
   B. $x+2$
   C. $x+4$
   D. $x-1$
   E. $x-3$

7. Jika $x^5 - 4x^4 + 5x^3 + x^2 - x + 7$ dibagi dengan $(x+1)$, maka sisanya adalah ...
   A. 4
   B. 3
   C. –2
   D. –1
   E. 0

8. Jika $(x - y + 1)$ adalah faktor dari $px^2 + qxy + ry^2 + 5x - 2y + 4$, maka nilai $p + q - r$ = ...
   A. 6
   B. 4
   C. 1
   D. – 3
   E. – 5

9. Jika persamaan sukubanyak $2x^3 - ax^2 + (2a+1)x - 2 = 0$ mempunyai dua akar saling berkebalikan, maka nilai a = ...
   A. –6
   B. – 1
   C. 3
   D. 4
   E. 5

10. Jumlah akar real dari $x^5 + 4x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ adalah ...
    A. 1
    B. 2
    C. 3
    D. 4
    E. 5

11. Jika akar-akar dari persamaan $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ adalah p, q, dan r, maka nilai $p^2 + q^2 + r^2 = ...$
    A. 45
    B. 35
    C. 28
    D. 5
    E. 1

12. Jika $H(x) = x^2 + x - 6$ adalah faktor dari $G(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 6$, maka nilai a = ...

A. -3
B. -1
C. 1
D. 2
E. 5

13. Suatu sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x-1)$ sisanya 6 dan jika dibagi $(x+3)$ sisanya -2, maka $F(x)$ jika dibagi $x^2 + 2x - 3$ sisanya adalah ....

A. $4x+2$
B. $2x+4$
C. $\frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$
D. $-\frac{1}{2}x - \frac{13}{2}$
E. $-2x+8$

14. Suatu sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x+2)$ sisanya 2 dan jika dibagi $(x-1)$ sisanya 5, sisa pembagian $F(x)$ oleh $x^2 + x - 2$ adalah ....

A. $x+4$
B. $2x+4$
C. $3x+2$
D. $-x-4$
E. $-x+6$

15. Suatu sukubanyak $F(x)$ jika dibagi dengan $(x-a)$ dan $(x-2a)$ berturut-turut memberikan sisa $10a$ dan $20a$. Jika $F(x)$ dibagi dengan $x^2 - 3ax + 2a^2$ sisanya adalah ... .

A. $10ax - a$
B. $5ax - 10$
C. ax
D. $10x$
E. $5x$

B. *Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!*

16. Jika $F(x)$ dibagi oleh $(x^2 - x)$ dan $(x^2 + x)$ masing-masing bersisa $(5x+1)$ dan $(3x+1)$, berapakah sisa pembagian $F(x)$ oleh $(x^2 - 1)$?

17. Sukubanyak $F(x)$ dan $G(x)$ masing-masing jika dibagi dengan $(x-1)$ mempunyai sisa 4 dan 10, dan jika dibagi dengan $(x+5)$ mempunyai sisa 8 dan -12. Misalkan diketahui suku-banyak $H(x) = 2F(x) + 3G(x)$. Jika $H(x)$ dibagi dengan $x^2 + 4x - 5$ mempunyai sisa $ax + b$, maka berapakah nilai $3a - 2b$?

18. Jika $(p-1)x^2+(q-2)xy+ry^2-5x-2y+3$ habis dibagi dengan $(x-y+1)$, hitunglah nilai $p+2q+4r$.

19. Jika $x^4-ax^3-(a-b)x^2+(3a+b+2)x-(3a+b)$ dibagi dengan x^2+x-2 mempunyai sisa $x-3$, berapa nilai dari ${}^{a}\log(10b+2)$?

20. Jika sukubanyak x^8-ax^3-b habis dibagi oleh x^2-1, dan jika dibagi oleh $(x-2)$ mempunyai sisa $20t+55$, tentukan nilai dari $8t+a+9b$.

Soal Analisis

1. Suatu pabrik pembuat kotak kaleng akan membuat suatu kotak tanpa tutup dari selembar kaleng berukuran 8×15 inci dengan cara memotong keempat bujur sangkar di sudutnya dan melipat bagian sisinya.
   a. Jika panjang sisi bujur sangkar yang dipotong adalah x inci, nyatakan volume kotak sebagai persamaan sukubanyak dalam peubah x.
   b. Jika volume kotak adalah 44 inci^3, bagaimana ukuran kotak seharusnya?
2. Suatu tanah lapang berbentuk persegi panjang dikelilingi pagar sepanjang 240 m.
   a. Jika x meter menyatakan panjang tanah lapang, nyatakan luas tanah lapang tersebut sebagai persamaan sukubanyak dalam peubah x.
   b. Jika luas tanah lapang tersebut adalah 3.200 m^2, berapakah panjang tanah lapang tersebut?
3. Suatu kebun berbentuk persegi panjang ditempatkan sehingga salah satu sisi rumah merupakan batasnya, dan akan dibuat pagar sepanjang 100 m untuk ketiga sisinya.
   a. Jika x meter menyatakan panjang sisi kebun yang sejajar rumah, nyatakan luas kebun tersebut sebagai persamaan sukubanyak dalam peubah x.
   b. Jika luas kebun adalah 1.250 m^2, berapakah lebar kebun tersebut?
4. Suatu perusahaan mulai beroperasi pada 1 Januari 2005. Pendapatan kotor tahunan perusahaan itu setelah t tahun adalah p juta rupiah, dengan

$$p=50.000+18.000t+600t^2$$

   a. Berapakah pendapatan kotor perusahaan itu pada 1 Januari 2008?
   b. Setelah berapa tahun perusahaan itu akan memperoleh pendapatan kotor sebesar 455 milyar rupiah?
5. Gelombang udara dingin mendekati suatu sekolah SMA. Suhu t jam setelah tengah malam adalah T, dengan

$$T=0{,}1(400-40t+t^2),\ 0\le t\le 12$$

   a. Berapa suhu di sekolah tersebut pada pukul 05.30 pagi?
   b. Pada pukul berapa suhu di sekolah tersebut adalah 10° C?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

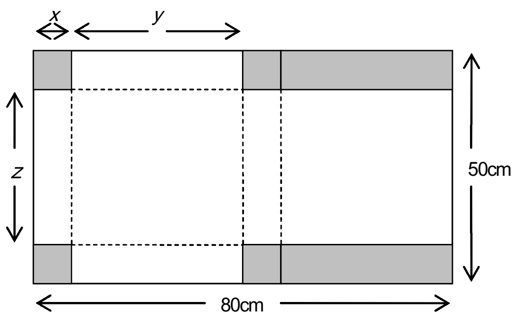
Nama	: ………………..	Tanggal	: ……….
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Sukubanyak
Kelompok	: ………………..	Semester	: 2 (dua)
Kegiatan	: Membuat kotak tertutup.		
Tujuan	: Menentukan ukuran kotak dengan volume tertentu.		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Selembar karton berukuran: 50 cm $\times$ 80 cm
2. Buku catatan
3. Alat tulis
4. Gunting
5. Kertas perekat
6. Penggaris

B. Cara kerja

1. Gambarkan sketsa jaring-jaring kotak tertutup.



2. Gunting sketsa tersebut dan buang bagian gambar yang diarsir.
3. Lipat dengan bantuan penggaris tepat pada garis putus-putus.
4. Rekatkan jaring-jaring kotak dengan menggunakan kerta perekat. Kotak yang diperoleh mempunyai lebar z cm, panjang y cm, dan tingi x cm.
5. Tentukan nilai x, y, dan z yang mungkin. Jika volume kotak adalah V, lengkapi tabel berikut ini.

No.	x	y	z	V
1.				
2.				
3.				
4.				
5.				

C. Analisis

1. Tentukan rumus volume kotak dalam x.
2. Tentukan nilai x, y, dan z sehingga volume kotak 9.000 cm^3.
3. Tentukan volume kotak yang maksimum.

BAB VI

KOMPOSISI FUNGSI DAN INVERS FUNGSI

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. membedakan pengertian relasi dan fungsi,
2. memberikan contoh fungsi-fungsi sederhana,
3. menjelaskan sifat-sifat fungsi,
4. menentukan aturan fungsi dari komposisi beberapa fungsi,
5. menentukan nilai fungsi komposisi terhadap komponen pembentuknya,
6. menentukan komponen fungsi jika aturan komposisinya diketahui,
7. memberikan syarat agar fungsi mempunyai invers,
8. menentukan aturan fungsi invers dari suatu fungsi,
9. menggambarkan grafik fungsi invers dari grafik fungsi asalnya.

Pengantar

Gambar 6.1 Anak SMA sedang melakukan percobaan kimia di sebuah laboratorium kimia
Sumber: elcom.umy.ac.id

Santi harus melakukan percobaan kimia melalui dua tahap yaitu tahap I dan tahap II. Lamanya (dalam menit) proses percobaan pada setiap tahap merupakan fungsi terhadap banyaknya molekul yang dicobakan. Pada tahap I untuk bahan sebanyak x mol diperlukan waktu selama $f(x) = x + 2$, sedangkan pada tahap II memerlukan waktu $g(x) = 2x^2 - 1$. Jika bahan yang harus dilakukan untuk percobaan sebanyak 10 mol, maka berapa lama satu percobaan sampai selesai dilakukan? Sebaliknya, jika dalam percobaan waktu yang diperlukan adalah 127 menit berapa mol bahan yang harus disediakan?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, Anda sebaiknya ingat kembali beberapa konsep tentang: himpunan, logika matematika, bentuk pangkat dan akar, persamaan kuadrat, dan trigonometri. Dengan telah menguasai konsep-konsep ini, maka permasalahan di atas akan dengan mudah diselesaikan.

6.1 Produk Cartesius dan Relasi

Produk Cartesius

Pasangan bilangan (x, y) dengan x sebagai urutan pertama dan y sebagai urutan kedua disebut pasangan terurut. Karena urutan diperhatikan, maka pasangan terurut (2, 5) dan (5, 2) memberikan dua makna yang berbeda. Selanjutnya, misalkan diketahui dua himpunan tak kosong A dan B. Dari dua himpunan ini kita dapat membentuk himpunan baru C yang anggota-anggotanya adalah semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ sebagai urutan pertama dan $y \in B$ sebagai urutan kedua. Himpunan C yang dibentuk dengan cara ini disebut produk Cartesius atau perkalian Cartesius himpunan A dan himpunan B, yang disimbolkan dengan $A \times B$. Oleh karena itu, produk Cartesius dapat didefinisikan berikut ini.

Definisi 6.1

Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka produk Cartesius himpunan A dan B adalah himpunan semua pasangan terurut (x, y) dengan $x \in A$ dan $y \in B$. Ditulis dengan notasi

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$$

Grafik dari produk Cartesius disebut grafik Cartesius. Ide perkalian himpunan $A \times B$ pertama kali diperkenalkan oleh Renatus Cartesius yang nama aslinya adalah Rene Descartes (1596 –1650), matematikawan berkebangsaan Perancis.

Contoh 6.1.1

Diberikan himpunan $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{1,2\}$. Tentukan tiap produk Cartesius berikut.

a. $A \times B$ b. $B \times A$ c. $A \times A$

Penyelesaian:

a. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\} = \{(a,1), (b,1), (c,1), (a, 2), (b, 2), (c, 2)\}$,

b. $B \times A = \{(x, y) \mid x \in B \text{ dan } y \in A\} = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,

c. $A \times A = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in A\} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$,

□

Dalam contoh 6.1.1, himpunan A mempunyai 3 anggota dan himpunan B mempunyai 2 anggota. Dari penyelesaian pertama tampak bahwa produk Cartesius $A \times B$ mempunyai $3 \times 2 = 6$ anggota, yaitu $(a,1)$, $(b,1)$, $(c,1)$, $(a, 2)$, $(b, 2)$, dan $(c, 2)$. Secara umum, jika banyak anggota himpunan A adalah m dan banyak anggota himpunan B adalah n, maka banyak anggota produk Cartesius $A \times B$ adalah $m \times n$ anggota.

Relasi

Kita perhatikan kembali produk Cartesius dari himpunan $A = \{a, b, c\}$ dengan himpunan $B = \{1,2\}$ pada contoh 6.1.1 bagian (a), yaitu

$$A \times B = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$$

Dari produk Cartesius $A \times B$ ini kita dapat mengambil beberapa himpunan bagian, misalnya:

$$R_1 = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (1, c), (2, c)\},$$
$$R_2 = \{(1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\},$$
$$R_3 = \{(2, a), (1, c)\}.$$

Himpunan-himpunan R_1, R_2, dan R_3 yang merupakan himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$, kita katakan sebagai relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B. Dengan pemaparan ini suatu relasi atau hubungan dapat didefinisikan berikut ini.

> Definisi 6.2
>
> Suatu relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$.

Jika R adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B dan pasangan terurut (x, y) adalah anggota R, maka dikatakan x berelasi dengan y, ditulis $x\ R\ y$. Tetapi jika pasangan (x, y) bukan anggota R, maka dikatakan x tidak berelasi dengan y, ditulis $x \not R\ y$. Untuk ke tiga relasi R_1, R_2, dan R_3 di atas.

$R_1 = \{(1, a), (2, a), (1, b,), (1, c), (2, c)\}$,

$1\ R_1\ a$, $2\ R_1\ a$, $1\ R_1\ b$, $1\ R_1\ c$, dan $2\ R_1\ c$, tetapi $2 \not R_1\ b$.

$R_2 = \{(1, b,), (2, b), (1, c), (2, c)\}$,

$1\ R_2\ b$, $2\ R_2\ b$, $1\ R_2\ c$, dan $2\ R_2\ c$, tetapi $1 \not R_2\ a$, dan $2 \not R_2\ a$.

$R_3 = \{(2, a), (1, c)\}$.

$2\ R_3\ a$ dan $1\ R_3\ c$, tetapi $1 \not R_3\ a$, $1 \not R_3\ b$, $2 \not R_3\ b$, dan $2 \not R_3\ c$.

Misalkan R adalah suatu relasi dari himpunan A ke himpunan B yang ditulis sebagai $R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$. Himpunan semua ordinat pertama dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah asal atau domain, ditulis dengan D_R. Himpunan B disebut daerah kawan atau kodomain, ditulis dengan K_R. Himpunan semua ordinat kedua dari pasangan terurut (x,y) disebut daerah hasil atau range, ditulis dengan R_R.

Sebagai contoh, jika $A = \{x, y, z\}$ dan $B = \{1, 2, 3\}$, dan R adalah relasi dari A ke B yang diberikan oleh $R = \{(x,1), (y, 1), (z, 2)\}$, maka :

- daerah asalnya adalah $D_R = \{x, y, z\}$
- daerah kawannya adalah $K_R = \{1, 2, 3\}$
- daerah hasilnya adalah $R_R = \{1, 2\}$.

Relasi $R = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$ dapat digambarkan dengan dua cara, yaitu dengan menggunakan diagram panah atau grafik pada bidang Cartesius.

Contoh 6.1.2

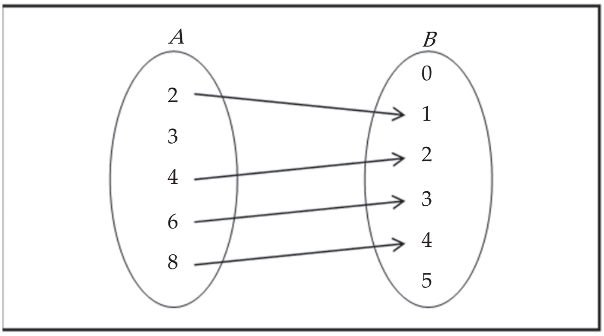
Misalkan $A = \{2, 3, 4, 6, 8\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

a. Jika $a \in A$ dan $b \in B$, tentukan relasi R dari A ke B yang menyatakan relasi *a dua kali b*.
b. Tunjukkan relasi R dengan diagram panah.
c. Tunjukkan relasi R dalam grafik Cartesius.

Penyelesaian:

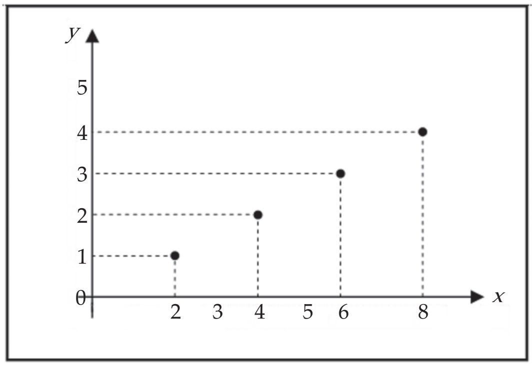
a. Relasi $R = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$

b. Diagram panah untuk R adalah



Gambar 6.2 Diagram panah relasi R

c. Grafik Cartesius dari R adalah



Gambar 6.3 Grafik Cartesius relasi R

□

Latihan 6.1

1. Misalkan A adalah himpunan dari semua siswa di kelasmu, dan B = {motor, angkot, bus, sepeda, jalan kaki}. Buatlah relasi *ke sekolah dengan* dari himpunan A ke himpunan B dengan diagram panah.
2. Pilih 10 teman sekelasmu. Namakan A adalah himpunan yang anggotanya teman-temanmu tadi, dan ambil himpunan $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
   a. Dengan diagram panah buatlah relasi *anak nomor ke* dari A ke B.
   b. Tulislah relasi itu sebagai pasangan terurut.
3. Setiap relasi berikut adalah relasi dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasilnya.
   a. $\{(1, p), (2, q), (4, r), (4, s)\}$
   b. $\{(1, q), (2, q), (3, r), (4, s)\}$
   c. $\{(1, r), (2, r), (4, r), (4, r)\}$
   d. $\{(1, p), (1, q), (3, r), (3, s)\}$

4. Himpunan pasangan terurut dari dua himpunan ditentukan dengan:

$$\{(-1,2), (1,4), (3,6), (5,8), (7,10)\}$$

Tuliskan anggota kedua himpunan yang dimaksud. Buatlah suatu relasi yang mungkin dari himpunan pertama ke himpunan kedua.

5. Suatu relasi R diberikan oleh:

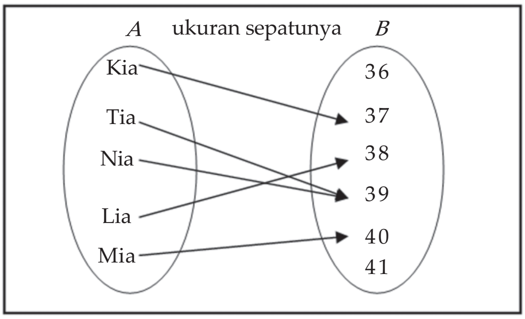
$$\{(\tfrac{1}{2},8), (1,4), (2,2), (4,1), (8,\tfrac{1}{2})\}.$$

a. Tuliskan anggota-anggota dari himpunan pertama dan anggota-anggota himpunan kedua. Nyatakan suatu relasi yang mungkin dari himpunan pertama ke himpunan kedua.

b. Gambarkan grafik Cartesius relasi R itu, kemudian gambarkan kurva yang melalui titik-titik dari relasi R.

2.2 Fungsi atau Pemetaan

Diagram panah pada gambar 6.4 menunjukkan relasi *ukuran sepatunya* dari himpunan siswa-siswa (A) ke himpunan ukuran-ukuran sepatu (B). Setiap siswa hanya mempunyai tepat satu ukuran sepatu, sehingga setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B.



Gambar 6.4 Diagram panah relasi ukuran sepatunya

Relasi dari A ke B yang mempunyai sifat seperti di atas disebut fungsi atau pemetaan, yang definisi formalnya diberikan berikut.

> Definisi 6.3
>
> Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang mengawankan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B.

Suatu fungsi f yang memetakan setiap x anggota himpunan A ke y anggota himpunan B, dinotasikan dengan

$$f : x \to y = f(x)$$

Yang dibaca: "f memetakan x ke y", y disebut peta (bayangan) dari x oleh f atau nilai fungsi f, dan x disebut prapeta dari y oleh f. Sebagai contoh, jika fungsi

$$f\colon\ x \to x^2 + 3x - 1$$

maka $f(x) = x^2 + 3x - 1$. Nilai $f(x) = x^2 + 3x - 1$ disebut rumus untuk fungsi f.

Grafik fungsi f dimaksudkan adalah himpunan pasangan (x, y) pada bidang, sehingga (x, y) adalah pasangan terurut dalam f.

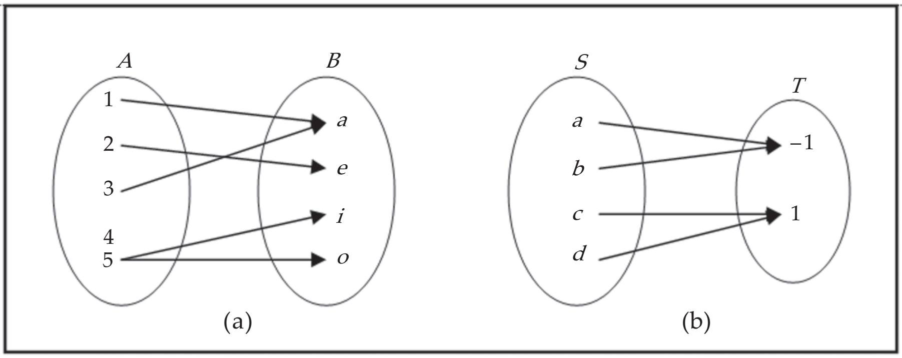
Dari definisi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa pasangan terurut pada fungsi mempunyai sifat bahwa setiap anggota A hanya muncul sekali menjadi elemen pertama dalam pasangan-pasangan terurut tersebut. Oleh karena itu, (4,2) dan (4,9) tidak mungkin muncul bersama sebagai pasangan-pasangan terurut pada fungsi.

Sebagaimana pada relasi, untuk fungsi dari himpunan A ke himpunan B kita mempunyai istilah-istilah yang sama. Himpunan A disebut daerah asal atau daerah definisi (domain), ditulis D_f. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), ditulis K_f. Himpunan semua peta dalam B disebut daerah hasil (range), ditulis R_f. Untuk contoh fungsi di depan, fungsinya adalah "*ukuran sepatunya*" dengan

- daerah asal adalah $A = \{$Kia, Tia, Nia, Lia, Mia$\}$,
- daerah kawan adalah $B = \{36, 37, 38, 39, 40, 41\}$,
- daerah hasil adalah $\{37, 38, 39, 40\}$.

Contoh 6.2.1

Dari relasi yang diberikan oleh diagram panah berikut manakah yang merupakan fungsi?



Gambar 6.5

Penyelesaian:

Dari dua relasi tersebut yang merupakan fungsi adalah relasi (b). Relasi (a) bukan fungsi karena elemen 4 tidak mempunyai kawan, dan juga elemen 5 mempunyai dua kawan.

□

Untuk kajian selanjutnya, notasi $\mathbb{R}$ adalah menyatakan himpunan semua bilangan real.

Contoh 6.2.2

Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan rumus $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

a. Tentukan $f(0)$, $f(4)$, $f(6)$ dan $f(-1)$.

b. Tentukan bilangan a, sehingga $f(a) = 17$.

c. Gambarkan grafik fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ dalam bidang Cartesius.

d. Tentukan daerah hasilnya f, jika daerah asal f ditentukan sebagai $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 5\}$.

Penyelesaian:

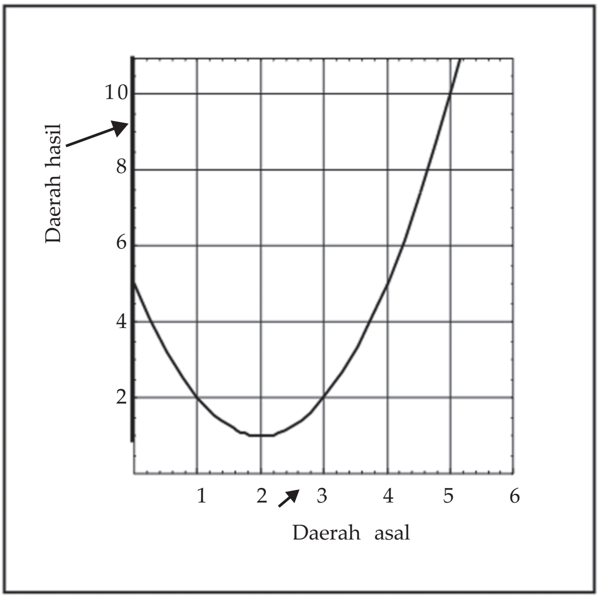
Dari rumus yang diketahui $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, maka setiap bilangan real x dipetakan ke bilangan real y yang nilainya sama dengan $x^2 - 4x + 5$.

a. Untuk $x = 0$, maka $f(0) = 0^2 - 4(0) + 5 = 5$,
   untuk $x = 3$, maka $f(3) = 3^2 - 4(3) + 5 = 2$,
   untuk $x = 5$, maka $f(5) = 5^2 - 4(5) + 5 = 10$,
   untuk $x = -1$, maka $f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 5 = 10$.

b. Untuk $x = a$, maka $f(a) = a^2 - 4a + 5$. Karena diketahui $f(a) = 17$, maka diperoleh hubungan

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 5 = 17 &\Leftrightarrow a^2 - 4a - 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (a-6)(a+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 6 \text{ atau } a = -2 \end{aligned}$$

c. Grafik fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$ diperlihatkan pada gambar 6.6 berikut ini.



Gambar 6.6 Grafik fungsi $y = f(x) = x^2 - 4x + 5$

d. Dari gambar 6.6, untuk daerah asal $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 4\}$ diperoleh daerah hasil $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid 1 \le y < 10\}$.

□

Jika daerah asal fungsi f tidak atau belum diketahui, maka daerah asal f diambil semua himpunan bilangan real yang mungkin sehingga daerah hasilnya adalah himpunan bilangan real. Daerah asal seperti ini sering disebut daerah asal alami.

Contoh 6.2.3

Tentukan daerah asal alami untuk setiap fungsi berikut.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ b. $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ c. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$

Penyelesaian:

a. Fungsi $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ bernilai real asalkan penyebutnya tidak sama dengan 0. Hal ini dipenuhi apabila $x \neq 3$. Jadi, daerah asal alami $f(x)=\dfrac{1}{x-3}$ adalah $D_f=\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$.

b. Fungsi $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ bernilai real asalkan bilangan di bawah tanda akar tidak bernilai negatif, sehingga harus dipenuhi $x^2-16 \geq 0$,

$$x^2-16 \geq 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-4) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4$$

Jadi, daerah asal alami $f(x)=\sqrt{x^2-16}$ adalah $D_f=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq 4\}$.

c. Fungsi $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ bernilai real asalkan penyebutnya tidak sama dengan 0, yaitu apabila bilangan di bawah tanda akar bernilai positif, sehingga harus $x^2-5x+6>0$,

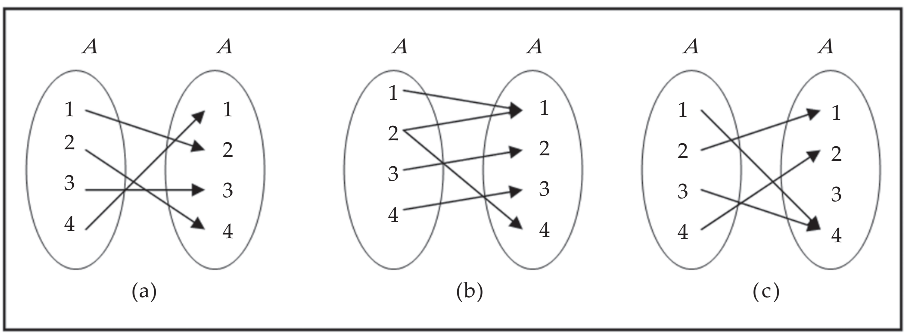
$$x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)>0$$
$$\Leftrightarrow x \leq 2 \text{ atau } x \geq 3$$

Jadi, daerah asal alami $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$ adalah $D_f=\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 3\}$.

□

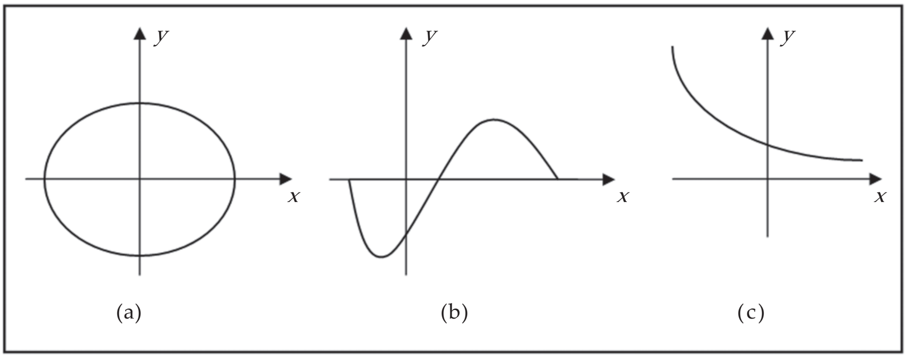
Latihan 6.2

1. Diketahui $A=\{1, 2, 3, 4\}$ dan $B=\{a, b, c\}$. Apakah relasi-relasi dari A ke B berikut merupakan fungsi? Jika tidak mengapa?
   a. $R_1=\{(1, a), (3, b), (4, c)\}$
   b. $R_2=\{(1, c), (2, b), (3, c), (4, c)\}$
   c. $R_3=\{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$
   d. $R_4=\{(1, b), (2, b), (3, a), (4, c)\}$
2. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil untuk fungsi-fungsi pada soal nomor 1.
3. Dari relasi-relasi pada himpunan A = {1, 2, 3, 4} dinyatakan dengan diagram panah berikut, manakah yang merupakan fungsi?



Gambar 6.7

4. Tentukan daerah asal, daerah kawan, dan daerah hasil untuk fungsi-fungsi pada soal nomor 3.
5. Dari relasi pada $\mathbb{R}$ yang digambarkan dalam bidang Cartesius pada gambar 6.8, manakah yang merupakan suatu fungsi?



Gambar 6.8

6. Fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ditentukan oleh $f(x)=2^x$.
   a. Tentukan $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$, $f(2)$.
   b. Elemen mana dari daerah asal sehingga petanya 64?
7. Diketahui fungsi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dengan $f(x)=ax^2+bx-3$, $x\in\mathbb{R}$, $f(1)=0$, dan $f(-3)=12$.
   a. Tentukan nilai a dan b.
   b. Hitung $f(0)$, $f(2)$, $f(5)$, dan $f(-2)$.
   c. Gambarkan sketsa grafik fungsi $y=f(x)$ pada bidang Cartesius.
   d. Tentukan daerah hasil fungsi f, jika daerah asal fungsi f diambil himpunan berikut.
      (i) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid -3\le x\le 1\}$
      (ii) $D_f=\{x\in\mathbb{R}\mid -1\le x\le 4\}$
9. Perhatikan kembali contoh 5.5.2. Lebar kotak 3 dm lebih pendek dari panjangnya, dan tingginya 1 dm lebih pendek dari lebarnya.
   a. Jika lebar kotak adalah x dm, nyatakan volume kotak sebagai fungsi dari x.
   b. Tentukan daerah asal fungsi ini.
10. Lihat kembali soal analisis nomor 1 bab 5. Suatu pabrik pembuat kotak kaleng akan membuat suatu kotak tanpa tutup dari selembar kaleng berukuran 8×15 inchi dengan cara memotong keempat bujur sangkar di sudutnya dan melipat bagian sisinya.
    a. Jika panjang sisi bujur sangkar yang dipotong adalah x inchi, nyatakan volume kotak sebagai fungsi dari x.
    b. Tentukan daerah asal fungsi ini.
11. Suatu tanah lapang berbentuk persegi panjang dikelilingi pagar sepanjang 240 m.
    a. Jika x meter manyatakan panjang tanah lapang tersebut, nyatakan luas tanah lapang tersebut (dalam meter persegi) sebagai fungsi dari x.
    b. Apakah daerah asal fungsi ini?

6.3 Beberapa Fungi Khusus

Berikut ini akan kita pelajari beberapa jenis fungsi yang mempunyai ciri-ciri khusus yang sering kita jumpai dalam penerapan. Termasuk jenis fungsi khusus antara lain: fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi modulus, fungsi tangga, fungsi genap, dan fungsi ganjil

6.3.1. Fungsi Konstan

Fungsi f disebut fungsi konstan jika untuk setiap x pada daerah asal berlaku $f(x) = c$, dengan c bilangan konstan.

Contoh 6.3.1

Diketahui fungsi konstan $f(x) = 3$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

a. Carilah $f(0)$, $f(7)$, $f(-1)$, dan $f(a)$.
b. Carilah daerah hasilnya.
c. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:

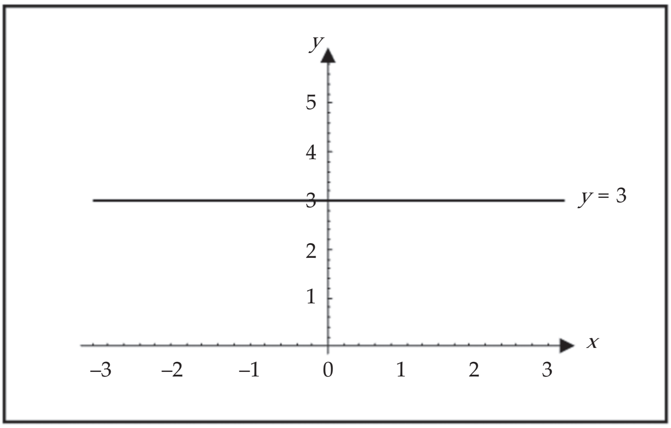
a. Dari definisi f, kita peroleh

$$f(0) = 3, \quad f(7) = 3, \quad f(-1) = 3, \text{ dan } f(a) = 3.$$

Semua elemen di daerah asal berkawan dengan 3.

b. Daerah hasilnya adalah $R_f = \{3\}$.

c. Grafiknya



Gambar 6.9 Grafik fungsi f (x) = 3

□

6.3.2 Fungsi Identitas

Fungsi f disebut fungsi identitas jika untuk setiap x pada daerah asal berlaku $f(x) = x$, fungsi ini sering disimbolkan dengan I.

Contoh 6.3.2

Untuk fungsi identitas $I(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

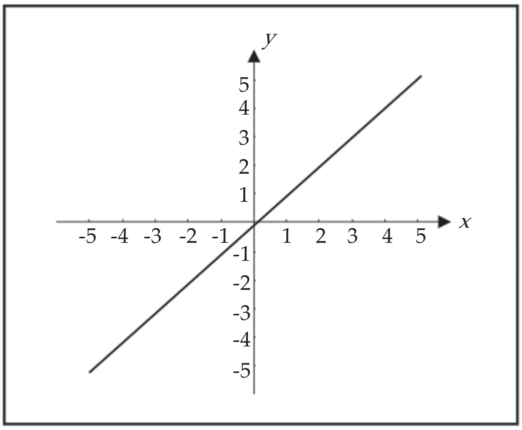
a. Carilah $I(0)$, $I(7)$, $I(-1)$, dan $I(a)$.
b. Carilah daerah hasilnya.
c. Gambarlah grafiknya.

Penyelesaian:

a. Dengan definisi I,
$I(0) = 0,\ I(7) = 7,\ I(-1) = -1$, dan $I(a) = a$.

b. Daerah hasilnya adalah $R_f = \mathbb{R}$.

c. Grafiknya



Gambar 6.10 Grafik fungsi identitas

6.3.3 Fungsi Linear

Fungsi f disebut fungsi linear, jika f dapat dinyatakan sebagai $f(x) = ax + b$, untuk semua x dalam daerah asal, dengan a dan b konstan sehingga $a \neq 0$. Grafik fungsi linear berbentuk garis lurus, yang mempunyai persamaan $y = ax + b$.

Contoh 6.3.3

Diketahui fungsi $f(x) = 3x + 6,\quad x \in \mathbb{R}$.

a. Carilah $f(0)$, $f(2)$, dan $f(a+b)$.

b. Gambarlah grafiknya.

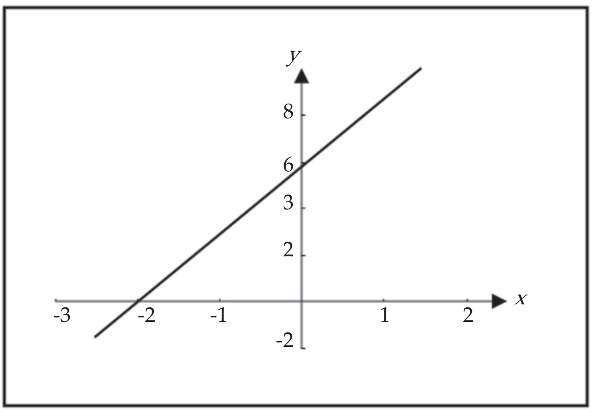
c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

a. Dari $f(x) = 3x + 6$, kita peroleh

$$f(0) = 3.0 + 6 = 6,\quad f(2) = 3.2 + 6 = 12,$$
$$f(a+b) = 3(a+b) + 6 = 3a + 3b + 6$$

b. Grafiknya



Gambar 6.11 Grafik fungsi f (x) = 3x + 6

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f = \mathbb{R}$. □

6.3.4 Fungsi Kuadrat

Jika fungsi f dapat dinyatakan sebagai $f(x) = ax^2 + bx + c$, untuk setiap x dalam daerah asal, dengan a, b, dan c konstan dan $a \neq 0$, maka fungsi f disebut fungsi kuadrat. Grafik fungsi kuadrat mempunayi persamaan $y = ax^2 + bx + c$ yang berbentuk parabola. Kita ingat kembali pelajaran pada kelas X, bahwa:

a. Grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik balik dengan koordinat $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{D}{4a}\right)$, dengan $D = b^2 - 4ac$.

b. Jika $a > 0$, maka diperoleh titik balik minimum. Jika $a < 0$, maka diperoleh titik balik maksimum.

c. Sumbu simetrinya ialah $x = -\frac{b}{2a}$

Contoh 6.3.4

Diketahui $f(x) = -x^2 + x + 6,\ \ x \in \mathbb{R}$.

a. Carilah $f(0)$, $f(3)$, $f(a)$, dan $f(a+2)$.
b. Gambarlah grafiknya.
c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

a. Dari rumus fungsi yang diberikan $f(x) = -x^2 + x + 6$, sehingga

$$f(0) = 6,$$

$$f(3) = -3^2 + 3 + 6 = 0,$$

$$f(a) = -a^2 + a + 6,$$

$$f(a+2) = -(a+2)^2 + (a+2) + 6 = -a^2 - 3a + 4.$$

b. Untuk menggambarkan grafiknya, kita ikuti langkah-langkah berikut.

(1) Titik potong grafik dengan sumbu x, yaitu untuk $y = f(x) = 0$,

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(x-3)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = -2$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu x adalah (3,0) dan (–2 ,0).

(2) Titik potong grafik dengan sumbu y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 6$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu y adalah (0,6).

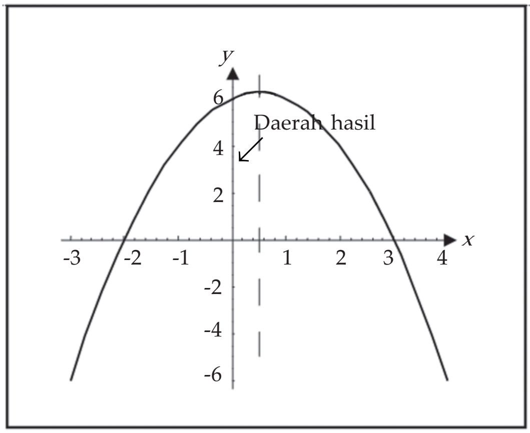
(3) Dari rumus fungsi kita peroleh $D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-1)(6) = 25$, sehingga

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2} \text{ dan } -\frac{D}{4a} = -\frac{25}{4(-1)} = \frac{13}{2}$$

Jadi, titik baliknya adalah $\left(\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$.

(4) Sumbu simetri: $x = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$.

(5) Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + x + 6$ adalah



Gambar 6.12 Grafik fungsi $f(x) = -x^2 + x + 6$

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f = \{y \in \mathbb{R} \mid y \le 13/2\}$.

6.3.5 Fungsi Mutlak atau Fungsi Modulus

Nilai mutlak atau modulus dari *a*, dinotasikan $|a|$, dibaca nilai mutlak *a*, didefinisikan sebagai

$$|a| = \begin{cases} a & \text{, untuk } a \ge 0 \\ -a & \text{, untuk } a < 0 \end{cases}$$

Dengan definisi ini, maka kita mempunyai

$|3| = 3$, $|-1| = -(-1) = 1$, $|5-2| = 5-2 = 3$ dan $|2-5| = -(2-5) = 3$.

Fungsi yang rumusnya memuat nilai mutlak disebut fungsi mutlak atau fungsi modulus.

Contoh 6.3.5

Diketahui fungsi *f* dengan dengan $f(x) = |x|$

a. Carilah $f(0)$, $f(-2)$, $f(5)$, $f(a^2)$, dan $f(3x+1)$.

b. Gambarlah grafiknya.

c. Carilah daerah hasilnya.

Penyelesaian:

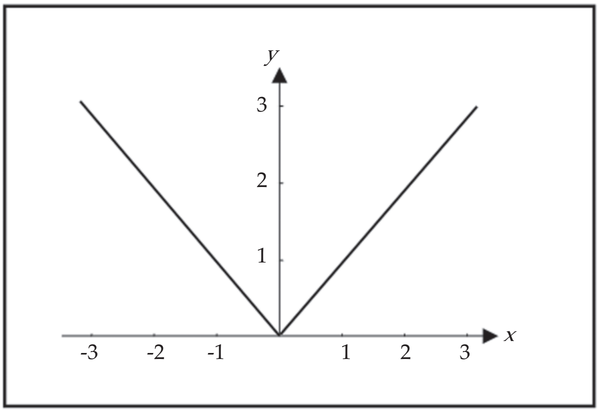
a. Dengan memperhatikan definisi nilai mutlak kita peroleh

$f(0) = 0$, $f(-2) = -(-2) = 2$, $f(5) = 5$,

$f(a^2) = a^2$, karena $a^2 \ge 0$ untuk setiap $a \in \mathbb{R}$,

$$f(3x+1) = \begin{cases} 3x+1 & \text{, untuk } 3x+1 \ge 0 \\ -(3x+1) & \text{, untuk } 3x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x+1 & \text{, untuk } x \ge -1/3 \\ -3x-1) & \text{, untuk } x < -1/3 \end{cases}$$

b. Grafik fungsi $f(x)=|x|$ adalah



Gambar 6.13 Grafik fungsi $f(x)=|x|$

c. Dari grafik tampak bahwa daerah hasilnya adalah $R_f=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geq 0\}$.

□

6.3.6 Fungsi Tangga atau Fungsi Nilai Bulat Terbesar

Fungsi tangga atau fungsi nilai bulat terbesar didefinisikan sebagai $f(x)=[\![x]\!]$ untuk semua nilai x dalam daerah asalnya. Notasi $[\![x]\!]$ dibaca "nilai bulat terbesar x" didefinisikan sebagai *bilangan bulat terbesar yang lebih kecil* atau *sama dengan x*. Sebagai contoh,

$[\![3]\!]=3$, karena 3 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 3;

$[\![3,8]\!]=3$, karena 3 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 3,8;

$[\![0,6]\!]=0$, karena 0 adalah nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan 0,6;

$[\![-1,8]\!]=-2$, karena –2 nilai bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan –1,8.

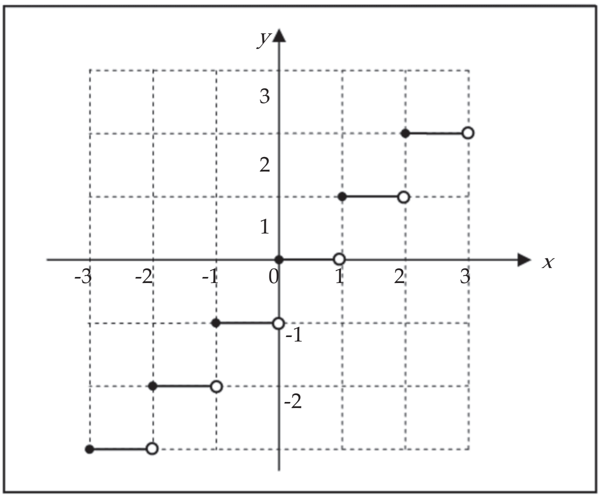
Dengan demikian, setiap bilangan real x berada dalam suatu interval yang dibatasi dua bilangan bulat dapat ditentukan nilai $[\![x]\!]$. Sebagai contoh;

untuk interval $0\leq x<2$, maka $[\![x]\!]=0$,

untuk interval $-1\leq x<0$, maka $[\![x]\!]=-1$,

untuk interval $-3\leq x<-2$, maka $[\![x]\!]=-3$.

Dengan penjelasan di atas, grafik fungsi $f(x)=[\![x]\!]$ dengan daerah asal $\mathbb{R}$ pada bidang Cartesius dapat dilukiskan seperti pada gambar 6.14.



Gambar 6.14 Grafik fungsi $f(x) = [\![x]\!]$

Terlihat pada Gambar 6.16 bahwa daerah hasil fungsi $f(x) = [\![x]\!]$ adalah himpunan bilangan bulat. Mengapa? □

6.3.7 Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f dikatakan genap jika berlaku $f(-x) = f(x)$. Fungsi f dikatakan ganjil jika berlaku $f(-x) = -f(x)$. Jika $f(-x) \neq f(x)$ dan $f(-x) \neq -f(x)$, maka fungsi f dikatakan tak genap dan tak ganjil.

Contoh 6.3.6

Selidiki fungsi-fungsi berikut genap, ganjil, atau tidak keduanya.

a. $f(x) = x^4 + x^2 + 3,\ x \in \mathbb{R}$

b. $g(x) = 2x + \sin x,\ x \in \mathbb{R}$

d. $k(x) = x + 2,\ x \in \mathbb{R}$

c. $h(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$

Penyelesaian:

a. Perhatikan bahwa

$$f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 + 3 = x^4 + x^2 + 3 = f(x)$$

Jadi, f adalah fungsi genap.

b. Dari sifat fungsi sinus,

$$g(-x) = 2(-x) + \sin(-x) = -(2x + \sin x) = -g(x)$$

Jadi, g adalah fungsi ganjil.

c. Dari sifat fungsi cosinus,

$$h(-x) = \cos(-x) = \cos x = h(x)$$

Jadi, h adalah fungsi genap.

d. Jika $k(x) = x + 2$, maka $k(-x) = -x + 2$. Tampak bahwa k adalah bukan fungsi genap dan bukan fungsi ganjil.

□

Tugas Mandiri

Jika fungsi f memenuhi $f(x+y) = f(x) + f(y)$, untuk m dan n bilangan asli. Buktikan bahwa:

a. $f(2x) = 2f(x)$
b. $f(nx) = nf(x)$
c. $f(1/n) = (1/n)\, f(1)$
d. $f(m/n) = (m/n)\, f(1)$

Latihan 6.3

1. Gambarkan grafik setiap fungsi berikut pada bidang Cartesius dalam daerah asal $\mathbb{R}$.
   a. $f(x) = -2$
   b. $f(x) = 2x$
   c. $f(x) = 3 - 2x$
   d. $f(x) = x^2 - 9$
   e. $f(x) = 3x - x^2$
   f. $f(x) = x^2 - 4x - 12$
2. Diketahui fungsi $f(x) = (-1)^x$ dengan daerah asal himpunan bilangan bulat.
   a. Hitunglah $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, dan $f(3)$.
   b. Gambarkan grafik fungsi f pada bidang Cartesius.
   c. Tentukan daerah hasilnya.
3. Gambarkan grafik setiap fungsi berikut pada bidang Cartesius dalam daerah asal $\mathbb{R}$.
   a. $f(x) = |3x - 1|$
   b. $f(x) = 1 - |x|$
   c. $f(x) = |3x - x^2|$
   d. $f(x) = x|x|$
   e. $f(x) = 1 - [\![x]\!]$
   f. $f(x) = [\![x]\!] - x$
4. Tentukan daerah hasil dari setiap fungsi pada soal nomor 3.
5. Selidiki apakah setiap fungsi berikut ganjil, genap atau tidak keduanya.
   a. $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$
   b. $f(x) = 5x^3 + 4x$
   c. $f(x) = |x|$
   d. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
6. Terdapat fungsi yang sekaligus genap dan ganjil. Fungsi apakah itu?
7. Misalkan f adalah sembarang fungsi sehingga jika x di dalam daerah asalnya, maka $-x$ juga termuat di dalam daerah asal tersebut. Buktikan:
   a. $f(x) - f(-x)$ adalah fungsi ganjil,
   b. $f(x) + f(-x)$ adalah fungsi genap,
   c. f selalu dapat dinyatakan sebagai jumlah suatu fungsi ganjil dan fungsi genap.

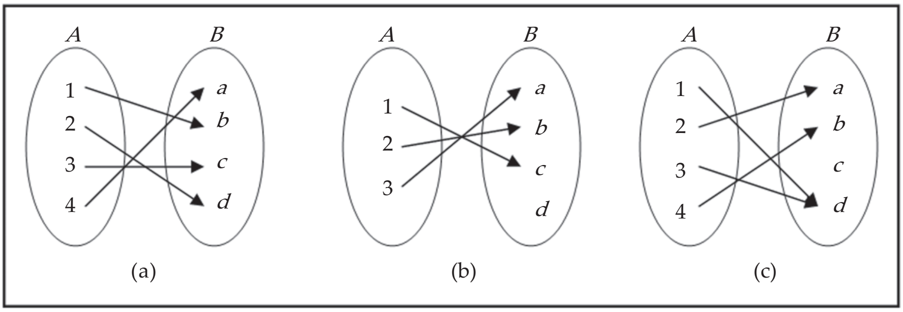
8. Pada hari libur, pengunjung pada suatu toserba mengikuti fungsi $x = 216t - 24t^2$, dengan x adalah jumlah pengunjung yang masuk ke toserba setelah jam ke-t. Jika toserba dibuka mulai jam 08.00, jam berapa:
   a. Pengunjung paling banyak masuk?
   b. Tidak ada pengunjung?
9. Harga barang ditentukan oleh permintaan akan barang tersebut. Harga barang ditentukan oleh fungsi $p = 80 - \frac{2}{3}x$, dengan x adalah jumlah permintaan barang, dan p dalam ribuan.
   a. Berapakah harga barang tersebut apabila jumlah permintaan adalah 18 unit.
   b. Berapakah jumlah permintaan jika harga barang Rp. 50.000
   c. Gambarkan fungsi harga tersebut pada bidang Cartesius.
   d. Selidiki apakah fungsi p merupakan fungsi genap atau fungsi ganjil?

6.4 Sifat-Sifat Fungsi

Terdapat tiga sifat penting dari fungsi, yang akan kita pelajari, yaitu fungsi satu-satu, fungsi pada dan fungsi pada dan satu-satu.

1.1.1 Fungsi Satu-Satu (Injektif)

Kita perhatikan ketiga diagram panah fungsi dari himpunan A ke himpunan B berikut ini.



Gambar 6.15

Ketiga diagram di atas mendefinisikan suatu fungsi, tetapi fungsi (a) dan (b) mempunyai sifat bahwa setiap dua elemen dari A yang berbeda dipetakan ke elemen yang berbeda pula di B. Tetapi untuk fungsi (c) ada dua elemen, yaitu 1 dan 3 dipetakan ke elemen yang sama c. Fungsi (a) dan (b) semacam ini disebut fungsi satu-satu, sedangkan fungsi (c) bukan fungsi satu-satu, yang definisinya diberikan berikut.

Definisi 6.4

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan satu-satu atau injektif, jika untuk setiap $a, b \in A$, dengan $a \neq b$ berlaku

$$f(a) \neq f(b)$$

Ekuivalen dengan definisi di atas, fungsi f dari A ke B adalah fungsi satu-satu jika untuk $f(a) = f(b)$, maka $a = b$.

Contoh 6.4.1

Diketahui $f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$. Apakah f tersebut fungsi satu-satu?

Penyelesaian:

Jika kita ambil $a = -2$ dan $b = 2$, maka jelas $a \neq b$. Tetapi,

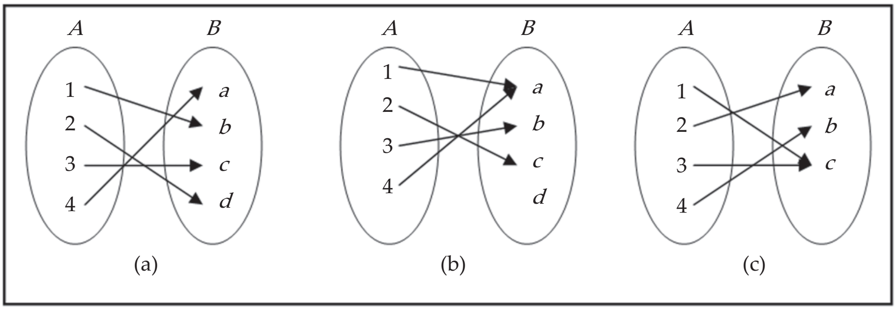
$$f(a) = (-2)^2 = 4 = 2^2 = f(b)$$

Jadi, f bukan fungsi satu-satu.

□

6.4.2 Fungsi Pada (Surjektif atau Onto)

Kita perhatikan ketiga diagram panah fungsi dari himpunan A ke himpunan B berikut.



Gambar 6.16

Ketiga relasi di atas adalah fungsi. Fungsi (a) dan (c) bersifat bahwa untuk setiap elemen himpunan daerah kawan B merupakan peta dari setiap elemen dari daerah asal A. Fungsi yang demikian disebut fungsi pada. Tetapi untuk fungsi (b) terdapat elemen d dari dearah kawan B yang tidak mempunyai kawan di A, fungsi seperti ini kita katakan fungsi bukan pada. Definisi lengkapnya diberikan berikut ini.

Definisi 6.5

Diberikan fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakan pada atau surjektif atau onto, jika diambil sembarang elemen $b \in B$ terdapat elemen $a \in A$ sehingga

$$f(a) = b$$

Dengan kata lain, fungsi f dari A ke B merupakan fungsi pada, jika daerah hasil dari f sama dengan daerah kawan dari f, yaitu $f(A) = B$.

Contoh 6.4.2

Tunjukkan bahwa f adalah bukan fungsi pada, tetapi g fungsi pada, jika:

a. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2 + 1$

b. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^3$

Penyelesaian:

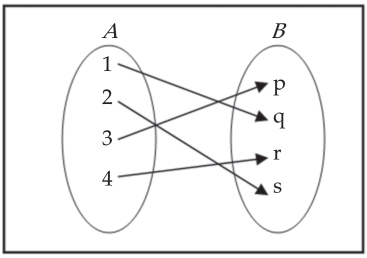
a. Fungsi f bukan fungsi pada, karena terdapat $-1 \in \mathbb{R}$ tetapi tidak ada $x \in \mathbb{R}$ sehingga $f(x) = -1$.

b. Jika diambil $y \in \mathbb{R}$, maka terdapat $x = y^{1/3} \in \mathbb{R}$ sehingga $g(x) = \left(y^{1/3}\right)^3 = y$. Jadi, g fungsi pada.

□

6.4.3 Fungsi Bijektif atau Korespondensi Satu-satu

Gambar 6.17 ini adalah diagram panah dari fungsi suatu fungsi pada sekaligus fungsi satu-satu dari himpunan $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ke himpunan $B = \{p, q, r, s\}$. Fungsi yang memenuhi dua sifat ini disebut fungsi bijektif.



Gambar 6.17

Definisi 6.6
Diberikan fungsi f dari himpunan A ke himpunan B dikatakatan bijektif atau korespondensi satu-satu, jika f merupakan fungsi pada dan satu satu.

Definisi ini mengakibatkan bahwa jika f fungsi bijektif dengan himpunan A dan B himpunan berhingga, maka himpunan A dan himpunan B mempunyai banyak anggota yang sama.

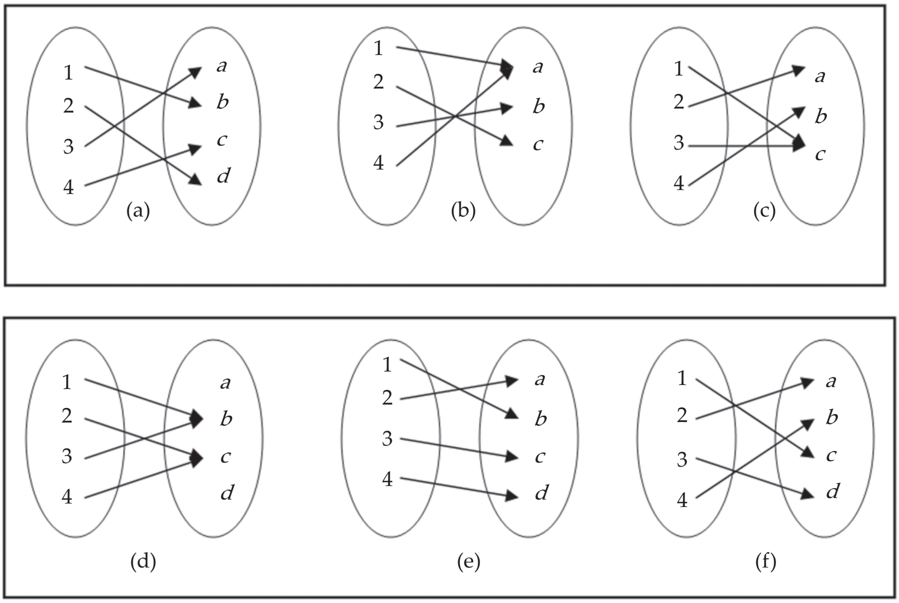
Contoh 6.4.3

a. Jika kita ingin melihat suatu pertunjukan setiap pengunjung harus membeli karcis, maka terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan penonton dengan himpunan karcis mereka.
b. Setiap negara mempunyai satu ibu kota negara. Terdapat korespondensi satu-satu antara himpunan negara dengan himpunan ibukota negara.

□

Latihan 6.4

1. Dari fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi satu-satu, pada atau bijektif.



Gambar 6.18

2. Dari setiap fungsi berikut manakah yang merupakan fungsi satu-satu, fungsi pada atau fungsi bijektif , jika daerah asalnya $A = \{a, b, c, d\}$:
   a. $f = \{(a, 1), (b, 3), (c, 5), (d, 6)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   b. $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 1)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3\}$.
   c. $f = \{(a, 4), (b, 3), (c, 2), (d, 1)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.
   d. $f = \{(a, 1), (b, 2), (c, 2), (d, 4)\}$, dengan daerah kawan $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Tentukan apakah dari setiap fungsi yang diberikan adalah satu-satu, pada atau bijektif.
   a. $f(x) = 5$
   b. $f(x) = 2x + 3$
   c. $f(x) = 3 - x^2$
   d. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$
   e. $f(x) = |x - 2|$

4. Selidiki fungsi f apakah satu-satu atau pada, jika

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1\text{ , untuk } x < 2 \\ x^2 - 4\text{ , untuk } 2 \le x \le 3 \\ x + 1\text{ , untuk } x > 3 \end{cases}$$

5. Misalkan $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ dan $f : A \to \mathbb{R}$, tentukan daerah kawan agar *f* menjadi fungsi pada (surjektif) *A*, jika *f* di bawah ini.

   a. $f(x) = 3x + 8$ c. $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

   b. $f(x) = x^2 + 1$ d. $f(x) = |x - 2|$

6. Carilah contoh di kehidupan sehari-hari suatu relasi yang merupakan fungsi satu-satu, pada atau bijektif.

7. Diberikan data hasil penjualan laptop (dalam ribuan) dari suatu distributor selama 7 tahun.

Tahun	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Penjualan	15	22	27	30	32	33	35

   Misalkan *A* adalah himpunan tahun, *B* himpunan penjualan, dan fungsi *f* adalah pemetaan dari *A* ke *B*, $f : A \to \mathbb{R}$ dalam bentuk pasangan terurut. Apakah *f* fungsi bijektif?

6.5 Aljabar Fungsi

Kita dapat membayangkan bahwa kedudukan fungsi-fungsi sebagaimana bilangan real, yang di dalamnya berlaku operasi aljabar penjumlahan, perkalian, dan pembagian. Tentu saja perlu juga kita perhatikan daerah asal dari fungsi-fungsi yang diperasikan. Untuk itu kita definisikan beberapa operasi aljabar dari fungsi-fungsi.

Definisi 6.7

Misalkan D_f dan D_g masing-masing menyatakan derah asal *f* dan *g*, maka

1. Hasil kali skalar fungsi *f* dengan skalar bilangan real *k* adalah $(kf)(x) = kf(x)$, dengan daerah asal $D_{kf} = D_f$.
2. Jumlah fungsi *f* dan fungsi *g* adalah $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, dengan daerah asal $D_{f+g} = D_f \cap D_g$.
3. Selisih fungsi *f* dan fungsi *g* adalah $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, dengan daerah asal $D_{f-g} = D_f \cap D_g$.
4. Perkalian fungsi *f* dan fungsi *g* adalah $(fg)(x) = f(x)g(x)$, dengan daerah asal $D_{f.g} = D_f \cap D_g$.
5. Pembagian fungsi *f* dan fungsi *g* adalah $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, dengan daerah asal $D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g$ dan $g(x) \neq 0$.

Contoh 6.5.1

Misalkan $f(x) = x^2$ dan $g(x) = \sqrt{x+2}$. Tentukan fungsi-fungsi berikut serta daerah asalnya.

a. $4f$ c. fg

b. $f+g$ d. $\dfrac{f}{g}$

Penyelesaian:

Daerah asal f adalah $D_f = \mathbb{R}$, dan daerah asal g adalah $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$, mengapa? Dengan Definisi 6.7 kita peroleh:

a. $(4f)(x) = 4f(x) = 4\,x^2$ dengan daerah asal $D_{4f} = D_f = \mathbb{R}$.

b. $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + \sqrt{x+2}$ dengan daerah asal adalah $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$.

c. $(fg)(x) = f(x)g(x) = x^2\sqrt{x+2}$ dengan daerah asal $D_{fg} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2\}$.

d. Nilai $g(x) \neq 0$ jika dan hanya jika $x > -2$, sehingga

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \text{ dengan daerah asal } D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -2\}.$$

□

Latihan 6.5

1. Jika $f(x) = x - 5$ dan $g(x) = x^2 - 1$. Tentukan fungsi-fungsi berikut serta daerah asalnya.

   a. $3f$ d. fg

   b. $f+g$ e. f/g

   c. $f-g$ f. $(3f+g^2)$

2. Untuk setiap dua fungsi yang diberikan hitung $f+g$, fg, dan f/g:

   a. $f(x) = \sqrt{x}$ dan $g(x) = x^2 + 1$

   b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ dan $g(x) = 1/x$

   c. $f(x) = |x|$ dan $g(x) = |x-3|$

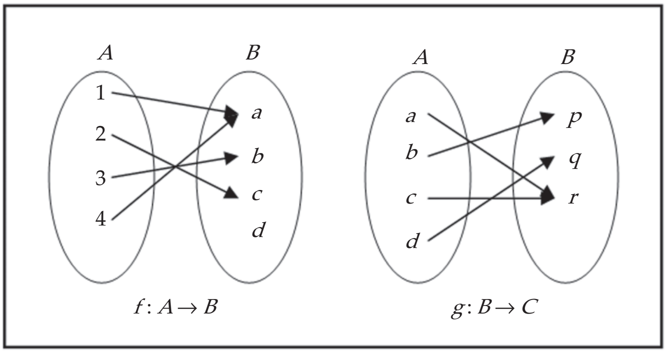
   d. $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$

3. Dua buah bolam lampu memberikan daya pijar yang bergantung pada besarnya daya listrik yang diberikan. Lampu I memberikan daya pijar sebesar $f(x)=\dfrac{x^2+3}{2}$, lampu II memberikan daya pijar sebesar $g(x)=x^2+5$.
   a. Tentukan fungsi perbandingan daya pijar kedua bolam lampu.
   b. Jika daya listrik yang diberikan sebesar 20 watt, berapa daya pijar yang dihasilkan oleh kedua bola lampu tersebut.
   c. Tentukan fungsi daya pijar yang dihasilkan oleh kedua bola lampu tersebut jika dinyalakan bersamaan.
4. Dimulai pada tengah hari, pesawat A terbang ke arah utara dengan kecepatan 400km/jam. Satu jam kemudian, pesawat B terbang ke arah timur dengan kecepatan 300km/jam. Dengan mengabaikan kelengkungan bumi dan dengan menganggap kedua pesawat terbang pada ketinggian sama, carilah rumus untuk $D(t)$, jarak antara dua pesawat tersebut t jam setelah tengah hari.

   Petunjuk: ada dua rumus untuk $D(t)$, satu untuk $0 < t < 1$, lainnya untuk $t > 1$.

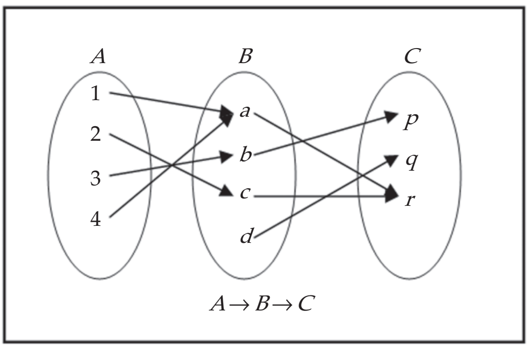
6.6 Komposisi Fungsi

Misalnya diketahui $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, dan $C = \{p,q,r\}$. Misalkan fungsi f dari A ke B dan g dari B ke C didefinisikan seperti diagram berikut.



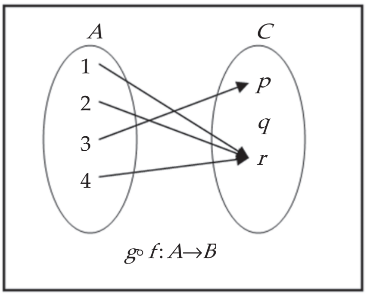
Gambar 6. 19

Dari dua fungsi itu, kita peroleh fungsi yang langsung memetakan himpunan A ke himpunan C seperti berikut.



Gambar 6.20

Fungsi yang langsung memetakan *A* ke *C* itu dapat dianggap sebagai fungsi tunggal, yang diagramnya tampak sebagai berikut.



Gambar 6.21

Fungsi tunggal dalam ilustrasi di atas disebut fungsi komposisi. Operasinya disebut komposisi atau pergandaan fungsi. Komposisi dari *g* dan *f* dinotasikan $g \circ f$.

Perhatikan bahwa $g \circ f$ adalah pergandaan yang mengerjakan *f* lebih dulu, baru diteruskan oleh *g*. Fungsi $g \circ f$ dibaca sebagai "fungsi *g* bundaran *f*".

Dari contoh di atas, kita peroleh:

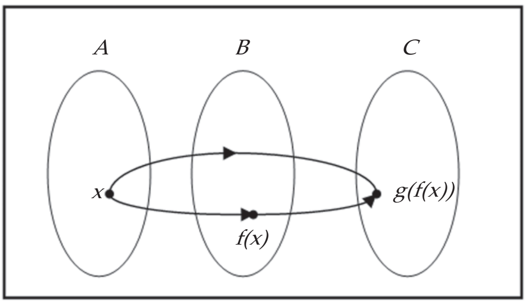
$$(g \circ f)(1) = r \qquad (g \circ f)(3) = p$$
$$(g \circ f)(2) = r \qquad (g \circ f)(4) = r$$

Penentuan itu dapat pula diperoleh dari *f* dan *g*, seperti berikut ini:

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = r$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = p$$
$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(a) = r$$

Secara umum komposisi di atas dirumuskan sebagai

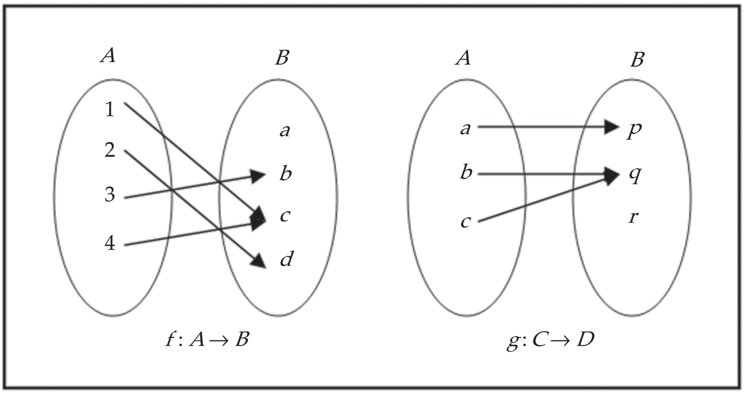
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



Gambar 6.22 Komposisi fungsi

6.6.1 Syarat Agar Dua Fungsi Dapat Dikomposisikan

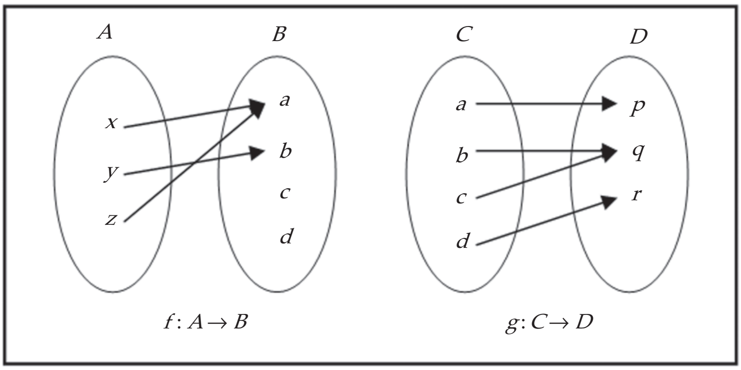
Jika kita mempunyai dua fungsi f dan g, apakah keduanya selalu dapat dikomposisikan? Kita perhatikan contoh berikut ini.



Gambar 6.23

Dari dua fungsi f dan g, kita peroleh $f(1) = d$, tetapi $g(d)$ tidak ada karena d bukan elemen dari C.

Sekarang perhatikan dua fungsi berikut ini.



Gambar 6.24

Dari dua fungsi f dan g itu, kita dapat membuat komposisinya, karena setiap peta dari elemen A oleh f merupakan elemen dari C (daerah asal g).

Dari dua contoh kasus di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa jika kita mempunyai dua fungsi tidak selalu dapat dikomposisikan. Lebih lanjut, dari contoh kedua kita menyimpulkan hasil berikut ini.

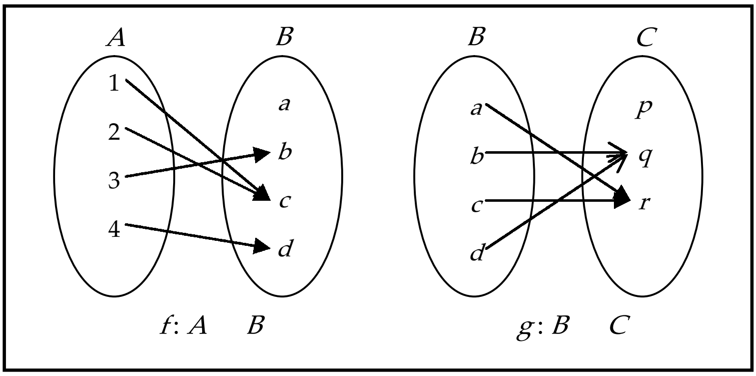
Teorema 6.1

Syarat fungsi g dan f dapat dikomposisikan, atau $g \circ f$ ada, jika daerah hasil dari f adalah himpunan bagian dari daerah asal dari g, yaitu

$$f(A) \subseteq D_g$$

Contoh 6.6.1

Diketahui fungsi f dan g diberikan oleh diagram panah berikut.



Gambar 6.25

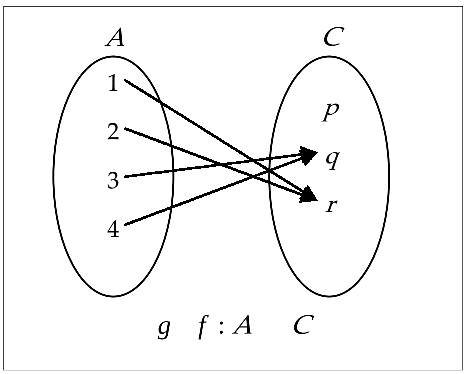
Gambarlah diagram panah dari $g \circ f$.

Penyelesaian:

Dari diagram panah di atas kita peroleh

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(c) = r$$
$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(b) = q$$
$$(g \circ f)(4) = g(f(4)) = g(d) = q$$

Diagram panah untuk $g \circ f$ adalah



Gambar 6.26

□

Contoh 6.6.2

Fungsi f dan g dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ dirumuskan oleh

$$f(x) = x - 3 \quad \text{dan } g(x) = x^2$$

Tentukan rumus untuk $g \circ f$.

Penyelesaian:

Dengan aturan komposisi,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-3) = (x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

□

Contoh 6.6.3

Diketahui f dan g dengan himpunan pasangan berurutan berikut.

$$f = \{(0, 2), (1, 3), (2, 4)\}$$
$$g = \{(2, 3), (3, 4), (4, 6), (5, 7)\}$$

Tentukan $g \circ f$ dan $(g \circ f)(2)$.

Penyelesaian:

Dengan menghitung satu per satu,

$$g \circ f = \{(0,3), (1,4), (2,6)\},$$

sehingga

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 6.$$

□

Tugas Mandiri

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk membuktikan bahwa operasi komposisi fungsi bersifat asosiatif, yaitu jika f, g dan h sembarang berlaku

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

6.6.2 Menentukan Komponen Fungsi Apabila Aturan Komposisinya Diketahui

Berikut ini akan kita pelajari beberapa contoh untuk mencari komponen fungsi apabila komposisinya diketahui. Prinsip dasar yang digunakan adalah definisi komposisi fungsi. Perlu kita catat di sini bahwa tidak semua kasus seperti ini dapat diselesaikan.

Contoh 6.6.4

Diketahui fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - 5$.
Tentukan fungsi f jika:

a. $(g \circ f)(x) = 4x + 1$

b. $(f \circ g)(x) = x^2 + 3x$

Penyelesaian:

a. Dari rumus komposisi fungsi kita peroleh

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 4x + 1 = (4x + 6) - 5$$

Jadi, $f(x) = 4x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.

b. Dengan prinsip komposisi fungsi kita peroleh

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 3x = (x - 5)^2 + 13(x - 5) + 40$$

Jadi, $f(x) = x^2 + 13x + 40$, $x \in \mathbb{R}$.

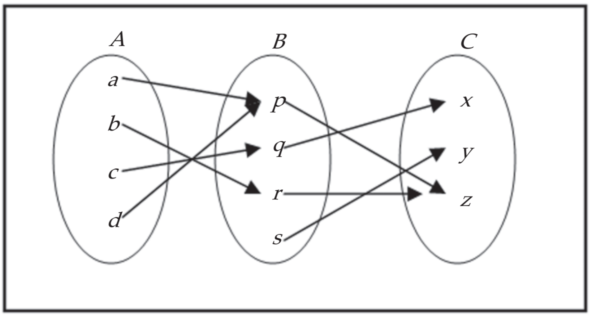
□

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk menentukan rumus f_n apabila $f_0(x) = x/(x+1)$, $f_{n+1} = f_0 \circ f_n$ untuk $n = 0, 1, 2, ...$

Latihan 6.6

1. Diketahui fungsi f: $A \to B$ dan g: $B \to C$ yang ditentukan oleh diagram berikut.



Gambar 6.27

   a. Tentukan $(g \circ f)(a)$, $(g \circ f)(b)$, $(g \circ f)(c)$ dan $(g \circ f)(d)$.
   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$.

2. Diketahui $A = \{p, q, r, s, t\}$, fungsi f dan g pada A yang ditentukan oleh:

$$f = \{(p, q), (q, s), (r, r), (s, p), (t, r)\}$$
$$g = \{(p, s), (q, t), (r, q), (s, s), (t, p)\}$$

   a. Tentukan $(g \circ f)(p)$, $(g \circ f)(r)$, $(g \circ f)(s)$, dan $(g \circ f)(t)$.
   b. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari $g \circ f$ dan $f \circ g$.

3. Diketahui $f(x) = x - 2$ dan $g(x) = x + 7$, tentukan setiap komposisi fungsi berikut serta daerah asalnya.

   a. $f \circ g$ c. $f \circ f$
   b. $g \circ f$ d. $g \circ g$

4. Jika g fungsi genap dan $h = f \circ g$. Apakah h selalu fungsi genap?

5. Jika g fungsi ganjil dan $h = f \circ g$. Apakah h selalu fungsi ganjil? Bagaimana jika f ganjil? Bagaimana jika f genap?

6. Diketahui $f(x) = 3x - 4$ dan $g(x) = 2x + a$. Jika $g \circ f = f \circ g$, tentukan nilai a.

7. Diketahui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tentukan $g(x)$, jika:

   a. $f(x) = x - 1$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 2$

   b. $f(x) = x^2 + 5$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 6$

8. Diketahui $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tentukan $f(x)$, jika:

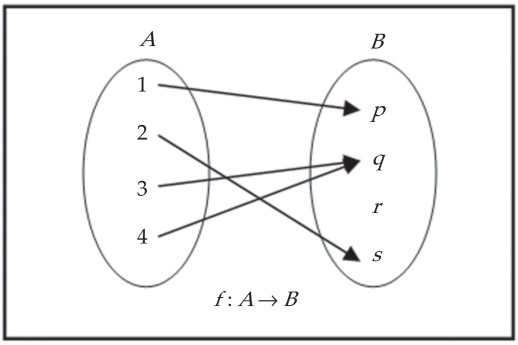
   a. $g(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 3x^2 + 4x$

   b. $g(x) = 1 - 2x$ dan $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$

   c. $g(x) = g(x) = 1 - 1/x$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$

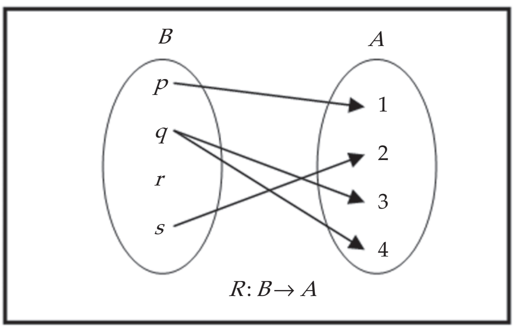
6.7 Invers Fungsi

Perhatikan fungsi f berikut ini



Gambar 6.28

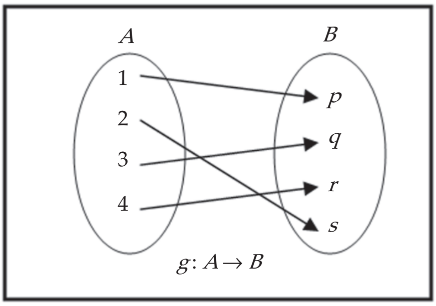
Jika fungsi f di atas kita balik, maka akan kita peroleh relasi berikut ini.



Gambar 6.29

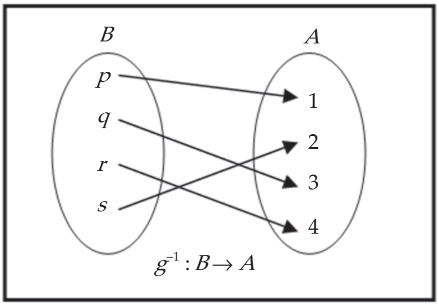
Relasi R disebut invers fungsi f. Relasi R biasa dinotasikan dengan f^{-1}. Apakah f^{-1} merupakan fungsi? Ternyata bukan, mengapa?

Sekarang perhatikan fungsi g berikut ini



Gambar 6.30

Jika fungsi g di atas kita balik, maka akan kita peroleh relasi g^{-1} berikut ini.



Gambar 6.31

Perhatikan bahwa relasi g^{-1} adalah fungsi pada *B*. Selanjutnya, invers fungsi yang merupakan fungsi disebut fungsi invers. Beberapa penulis menyebut fungsi invers sebagai fungsi balikan.

Dengan jalan pikiran yang sama seperti penyajian diagram panah, jika fungsi $f : A \rightarrow B$ dinyatakan sebagai pasangan terurut

$$f = \{(a,b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

maka invers fungsi f adalah $f^{-1} : B \rightarrow A$ yang ditentukan oleh

$$f^{-1} = \{(b,a) \mid b \in B \text{ dan } a \in A\}$$

Dari contoh di atas dapat kita simpulkan bahwa invers fungsi *tidak harus* merupakan fungsi. Tetapi, jika g^{-1} adalah fungsi, maka untuk setiap $x \in A$ akan berlaku

$$(g^{-1} \circ g)(x) = x = I_A(x) \text{ (dengan } I_A \text{ fungsi identitas pada } A\text{)}$$

dan untuk setiap $x \in B$ akan berlaku

$$(g \circ g^{-1})(x) = x = I_B(x) \text{ (dengan } I_B \text{ fungsi identitas pada } B\text{)}$$

Kita perhatikan kembali fungsi f dan g pada dua contoh di atas. Kenapa f^{-1} bukan fungsi tetapi g^{-1} fungsi. Relasi f^{-1} bukan fungsi karena ada q elemen B yang mempunyai dua kawan yang berbeda, 3 dan 4 di dalam A. Hal ini disebabkan karena f fungsi yang tidak satu-satu. Sedangkan g^{-1} adalah fungsi karena setiap elemen di dalam B mempunyai tepat satu kawan dalam A. Mudah kita pahami bahwa g fungsi satu-satu. Secara umum kita mempunyai sifat berikut ini.

Teorema 6.2
Misalkan f adalah fungsi dari A ke B, f^{-1} adalah fungsi invers dari f dari B ke A jika dan hanya jika f fungsi bijektif, dan

$$f^{-1} \circ f = I_A \text{ dan } f \circ f^{-1} = I_B$$

Jika fungsi inversnya ada, maka fungsi invers tersebut dapat dicari dengan dua cara:

a. Dengan membalik arah panah fungsi semula, apabila diagram panahnya diketahui.
b. Dengan menggunakan prinsip bahwa: jika $y = f(x)$, maka $x = f^{-1}(y)$.

Contoh 6.7.1

Diketahui fungsi $f(x) = 2x + 5,\ x \in \mathbb{R}$.

a. Tentukan rumus untuk f^{-1}.
b. Hitunglah $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$, dan $f^{-1}(3)$.

Penyelesaian:

a. Misalkankan $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} y = 2x+5 \Leftrightarrow 2x &= y-5 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{y-5}{2} \\ \Leftrightarrow f^{-1}(y) &= \frac{y-5}{2} \end{aligned}$$

Jadi, rumus untuk f^{-1} adalah $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$.

b. Dari $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{2}$, kita peroleh

$$f^{-1}(0) = \frac{0-5}{2} = -\frac{5}{2},\ f^{-1}(2) = \frac{2-5}{2} = -\frac{3}{2} \text{ dan } f^{-1}(-3) = \frac{-3-5}{2} = -4.$$

□

Contoh 6.7.2

Diketahui fungsi $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-4}$, untuk $x \neq 2$. Tentukan rumus untuk f^{-1}.

Penyelesaian:

Misalkan $y = f(x)$, untuk $x \neq 2$,

$$y = \frac{x+3}{2x-4} \Leftrightarrow x+3 = 2xy-4y$$
$$\Leftrightarrow x-2xy = -3-4y$$
$$\Leftrightarrow x(1-2y) = -3-4y$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-3-4y}{1-2y} = \frac{4y+3}{2y-1}$$

Jadi, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x+3}{2x-1}$ untuk $x \neq 1/2$.

□

Tugas Kelompok

Diketahui $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ dengan $ad - bc \neq 0$.

a. Tentukan rumus untuk f^{-1}.

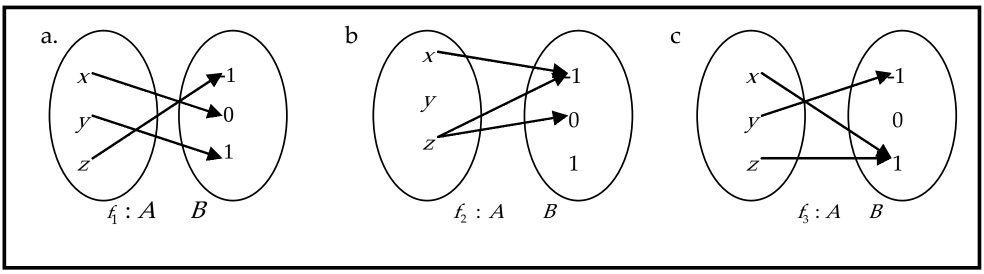
b. Apa syaratnya agar f^{-1} ada?

c. Apa syarat $a, b, c,$ dan d agar $f^{-1} = f$?

Diskusikan dengan kelompok Anda.

Latihan 6.7

1. Diketahui fungsi-fungsi dari $A = \{x, y, z\}$ ke $B = \{-1, 0, 1\}$ sebagai berikut:



Gambar 6.32

d. $f_4 = \{(x, 0), (y, 1), (z, 0)\}$

e. $f_5 = \{(y, -1), (z, 1), (x, 0)\}$

f. $f_6 = \{(z, -1), (x, 1), (y, 1)\}$.

Dari setiap fungsi di atas tentukan inversnya. Kemudian mana yang mempunyai fungsi invers?

2. Apakah setiap fungsi berikut mempunyai fungsi invers? Jika mempunyai fungsi invers, tentukan invers tersebut.

a. $f(x) = 5x - 3$ d. $f(x) = \sqrt{2x-6}$

b. $f(x) = 1 - x^2$ e. $f(x) = \sin x$

c. $f(x) = (4 - x)^3$ f. $f(x) = |x| + x$

3. Tunjukkan bahwa setiap fungsi berikut mempunyai fungsi invers, dan gambarkan grafik f dan f^{-1} pada susunan sumbu yang sama.

a. $f(x) = 4x - 3$ b. $f(x) = x^3 + 2$ c. $f(x) = \dfrac{3x+1}{2x+4}$

4. Tunjukkan bahwa setiap fungsi berikut tidak mempunyai fungsi invers, kemudian batasi daerah asalnya sehingga mempunyai fungsi invers.

a. $f(x) = x^2 + 4$ c. $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

b. $f(x) = 2x^2 - 6$ d. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 16}$

5. Tentukan nilai konstanta k sehingga fungsi yang didefinisikan oleh

$f(x) = \dfrac{x+3}{x+k}$ sama dengan fungsi inversnya.

6. Tentukan rumus untuk f^{-1} dari setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ c. $f(x) = \dfrac{x-3}{4x+1}$

b. $f(x) = \dfrac{2}{5-3x}$ d. $f(x) = \dfrac{5x+3}{3x+2}$

7. Diketahui fungsi $f(x+1) = \dfrac{x+3}{x-2}$, untuk $x \neq 2$. Tentukan rumus untuk f^{-1} serta daerah asalnya.

8. Diketahui $f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-5}$, untuk $x \neq 5/4$. Jika f^{-1} fungsi invers dari f, tentukan $f^{-1}(x-1)$.

9. Diketahui $f(x) = 2x + 7$.

a. Tentukan f^{-1}.

b. Dari f^{-1}, kemudian tentukan $(f^{-1})^{-1}$.

c. Apa yang dapat kamu simpulkan?

10. Tentukan f jika:

a. $f^{-1}(x) = x + 4$ c. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} + 1$

b. $f^{-1}(x) = 3x - 1$

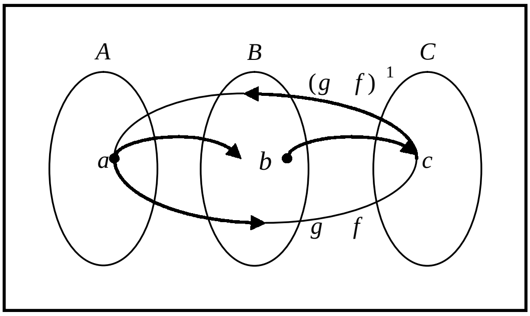
11. Diketahui dua fungsi:

$$f(x) = ax + b,\ a \neq 0 \text{ dan } g(x) = cx + d,\ c \neq 0$$

Tentukan hubungan antara a, b, c, dan d, sehingga f merupakan fungsi invers dari g.

6.8 Fungsi Invers dari Fungsi Komposisi

Perhatikan diagram panah berikut ini



Gambar 6.33

Pada gambar di atas, jika fungsi komposisi $g \circ f$ memetakan $a \in A$ ke $c \in C$, maka fungsi invers dari $g \circ f$, yaitu $(g \circ f)^{-1}$ memetakan $c \in C$ kembali ke $a \in A$.

Contoh 6. 8.1

Diketahui $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Tentukan $(g \circ f)^{-1}$.

Penyelesaian:

Dari pengertian komposisi fungsi

$$((g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = 2x^3 + 1$$

Misalnya $(g \circ f)^{-1}(x) = y$, maka

$$2x^3 + 1 = y \Leftrightarrow 2x^3 = y - 1$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{y-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$$

Jadi, $(g \circ f)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$.

□

Contoh 6.8.2

Diketahui $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$. Tentukan $f^{-1} \circ g^{-1}$.

Penyelesaian:

Mudah kita tunjukkan bahwa jika $f(x) = x^3$ dan $g(x) = 2x + 1$, maka

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{dan} \quad g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}$$

Oleh karena itu,

$$
\begin{aligned}
(f^{-1} \circ g^{-1})(x) &= f^{-1}(g^{-1}((x)) \\
&= f^{-1}(g^{-1}((x)) \\
&= f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) \\
&= \sqrt[3]{\frac{x\ -1}{2}}
\end{aligned}
$$

Dari contoh 6.8.1 dan contoh 6.8.2 di atas kita peroleh bahwa

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Apakah hubungan ini selalu benar untuk sembarang dua fungsi yang mempunyai fungsi invers ? Ya, formula ini memang berlaku untuk sembarang dua fungsi yang mempunyai fungsi invers.

Teorema 6.3

Jika f dan g dua fungsi yang mempunyai fungsi invers dan komposisi keduanya ada, maka berlaku

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

Bukti:

Untuk membuktikan sifat ini, menurut Teorema 6.2 cukup kita buktikan

$$(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) = I$$

Kita perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
(f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) &= f \circ (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= f \circ I \circ f^{-1} && (g \circ g^{-1} = I) \\
&= (f \circ I) \circ f^{-1} && \text{(sifat asosiatif)} \\
&= f \circ f^{-1} && (f \circ I = f) \\
&= I
\end{aligned}
$$

Jadi, terbukti bahwa $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

□

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk membuktikan bahwa:

$$(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$$

Contoh 6.8.3

Diketahui fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$ dengan $g(x) = x - 3$ dan $(g \circ f)(x) = 3x - 5$. Tentukan fungsi f.

Penyelesaian:

Dari fungsi g yang diberikan, kita mempunyai $g^{-1}(x) = x + 3$. Di pihak lain, kita mempunyai hubungan

$$f = g^{-1} \circ g \circ f$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} f(x) &= (g^{-1} \circ (g \circ f))(x) \\ &= g^{-1}((g \circ f))(x) \\ &= g^{-1}(3x - 5) \\ &= (3x - 5) + 3 \\ &= 3x - 2 \end{aligned}$$

Jadi, $f(x) = 3x - 2$.

□

Pada bagian akhir ini, kita kembali kepada ilustrasi di awal bab tentang percobaan kimia yang dilakukan oleh Santi.

Contoh 6.8.4

Santi harus melakukan percobaan kimia melalui dua tahap yaitu tahap I dan tahap II. Lamanya (dalam menit) proses percobaan pada setiap tahap merupakan fungsi terhadap banyaknya molekul yang diberikan. Pada tahap I untuk sebanyak x mol bahan, diperlukan waktu selama $f(x) = x + 2$, sedangkan pada tahap II memerlukan waktu

$$g(x) = 2x^2 - 1.$$

a. Jika bahan yang tersedia untuk percobaan sebanyak 10 mol, berapa lama satu percobaan sampai selesai dilakukan?
b. Jika waktu yang diperlukan untuk satu percobaan adalah 127 menit, berapa mol bahan yang diperlukan?

Penyelesaian:

a. Masalah ini merupakan aplikasi dari komposisi dua fungsi. Untuk melakukan satu percobaan sampai selesai, waktu yang diperlukan adalah

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(x + 2)^2 - 1 = 2x^2 + 4x + 3$$

Untuk $x = 10$, $(g \circ f)(10) = 2(10)^2 + 4(10) + 3 = 243$. Jadi, waktu yang perlukan untuk satu percobaan dengan bahan sebanyak 10 mol adalah 243 menit.

b. Sebaliknya, masalah ini merupakan penerapan dari invers komposisi dua fungsi. Dari $f(x) = x + 2$ dan $g(x) = 2x^2 - 1$, kita peroleh

$$f^{-1}(x) = x - 2 \text{ dan } g^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

Dengan menerapkan Teorema 6.3,

$$(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x) = f^{-1}(g^{-1}(x)) = \sqrt{\frac{x+1}{2} - 2}\ .$$

Untuk $x = 127$ diperoleh $(g \circ f)^{-1}(127) = \sqrt{\frac{127+1}{2} - 2} = 6$. Jadi, untuk waktu 127 menit percobaan itu memerlukan bahan sebanyak 6 mol.

□

Latihan 6.8

1. Tentukan rumus untuk $(f \circ g)^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$, apabila $f(x) = 2x + 3$ dan $g(x) = 2 - 3x$ dengan:
   a. mencari dahulu $f \circ g$ dan $g \circ f$,
   b. menggunakan sifat $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
2. Dengan Teorema 6.3, tentukan $(f \circ g)^{-1}$ dan $(g \circ f)^{-1}$ untuk f dan g yang diberikan.
   a. $f(x) = \dfrac{6}{x + 3}$ dan $g(x) = x^2$, untuk $x \geq 0$.
   b. $f(x) = 3x - 2$ dan $g(x) = x^2 - x + 3$, untuk $x \geq 1/2$.
3. Jika $f^{-1}(x) = 3x - 1$ dan $g^{-1}(x) = \sqrt{x}$ untuk $x \geq 0$, hitung $(f \circ g)^{-1}(2)$ dan $(g \circ f)^{-1}(2)$.
4. Jika $f(x) = 2x + 1$ dan $(f \circ g)(x) = f^{-1}(x)$, tentukan fungsi g.
5. Diberikan dua fungsi f dan g pada $\mathbb{R}$, tentukan fungsi g jika:
   a. $f(x) = 2x$ dan $(g \circ f)(x) = x + 6$,
   b. $f(x) = 2x$ dan $(g \circ f)(x) = 1 - 1/2x$,
   c. $f(x) = x^2 + 5$ dan $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 6$.
6. Jika $f(x) = \dfrac{8}{x + 2}$ dan $g(x) = x^2$ untuk $x \geq 0$, tentukan daerah asal dari $(f \circ g)^{-1}$.
7. Suatu perusahaan telah menaksir bahwa biaya (dalam jutaan rupiah) memproduksi x barang adalah

$$C(x) = 10.000 + 0,001x^2$$

   a. Jika barang yang diproduksi sebanyak 500, berapa total biaya yang diperlukan?
   b. Jika tersedia biaya sebesar 11 juta rupiah berapa banyak barang yang dihasilkan?

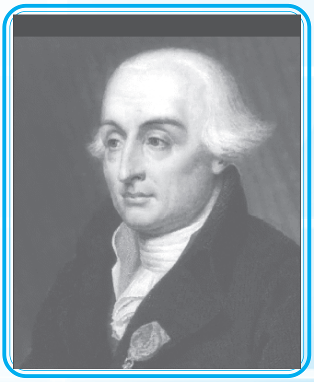
8. Pada suatu perusahaan, mesin I mengubah bahan mentah menjadi bahan setengah jadi, dan mesin II mengubah bahan setengah jadi menjadi bahan jadi. Kinerja mesin I mengikuti fungsi $f(x) = 2x$ sedangkan mesin II kinerjanya mengikuti fungsi $g(x) = 3x^2 - 5$ dengan x adalah banyak bahan mentah yang tersedia.
   a. Jika bahan mentah yang tersedia untuk produksi sebanyak 5 kg, maka berapa unit barang jadi yang dihasilkan?
   b. Jika proses produksi itu menghasilkan 427 unit barang jadi, maka berapa kg bahan mentah yang harus disediakan?

Rangkuman

1. Jika A dan B adalah dua himpunan tak kosong, maka produk Cartesius himpunan A dan B adalah himpunan $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ dan } y \in B\}$.
2. Suatu relasi atau hubungan dari himpunan A ke himpunan B adalah sembarang himpunan bagian dari produk Cartesius $A \times B$.
3. Fungsi atau pemetaan dari himpunan A ke himpunan B adalah relasi yang mengawankan setiap anggota A dengan tepat satu anggota B. Himpunan A disebut daerah asal atau daerah definisi (domain), ditulis D_f. Himpunan B disebut daerah kawan (kodomain), ditulis K_f. Fungsi $f : x \to y = f(x)$, y disebut peta (bayangan) dari x oleh f atau nilai fungsi f, dan x disebut prapeta dari y oleh f. Himpunan semua peta dalam B disebut daerah hasil (range), ditulis R_f.
4. Beberapa fungsi khusus: fungsi konstan, fungsi identitas, fungsi linear, fungsi kuadrat, fungsi mutlak atau fungsi modulus, fungsi tangga atau fungsi nilai bulat terbesar, fungsi genap, dan fungsi ganjil.
5. Sifat-sifat fungsi: fungsi satu-satu (injektif), fungsi pada (onto atau surjektif), dan fungsi pada dan satu-satu (bijektif).
6. Syarat fungsi g dan f dapat dikomposisikan, atau $g \circ f$ ada, jika daerah hasil dari f adalah himpunan bagian dari daerah asal dari g, yaitu $f(A) \subseteq D_g$.
7. Misalkan f adalah fungsi dari A ke B, f^{-1} adalah fungsi invers dari f dari B ke A jika dan hanya jika f fungsi bijektif, dan $f^{-1} \circ f = I_A$ dan $f \circ f^{-1} = I_B$.
8. Jika f dan g dua fungsi yang mempunyai fungsi invers dan komposisi keduanya ada, maka berlaku $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Math Info

Pengkajian teori fungsi dipelopori oleh matematikawan Italia kelahiran Perancis, Joseph Louis Lagrange pada akhir abad ke-18. Kemudian Louis Cauchy melanjutkan kajian Langrange tersebut pada awal abad ke-19. Lebih lanjut, Cauchy juga mengembangkan penelitiannya tentang fungsi bernilai bilangan kompleks. Hasil kerja keras Cauchy ini kemudian dikembangkan oleh dua matematikwan Jerman, yaitu Karl Theodor Weierstrass dan George Friederich B. Riemann.



Gambar 6.34 Lagrange
Sumber: www.sovlit.com

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Daerah asal fungsi $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+5x-6}{2-x}}$ adalah ....

   A. $\{x\in\mathbb{R} \mid x<2\}$
   B. $\{x\in\mathbb{R} \mid 1\le x<2\}$
   C. $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le -6 \text{ atau } 1\le x<2\}$
   D. $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le -6 \text{ atau } 1\le x<2\}$
   E. $\{x\in\mathbb{R} \mid x\le -6 \text{ atau } 1< x<2\}$

2. Jika

   $$f(x)=\begin{cases} 2x-1 & \text{, untuk } 0<x<1 \\ x^2+1 & \text{, untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

   maka $f(2)\,f(-4)+f(\tfrac{1}{2})\,f(3)=\ldots$.

   A. 210
   B. 105
   C. 85
   D. 55
   E. 52

3. Jika $f(x) = 2x$ dan $f(g(x)) = -\frac{x}{2} + 1$, maka $g(x) = \ldots$.

A. $\frac{x}{2} - 1$

B. $\frac{x}{2} + 1$

C. $\frac{1}{4}(2 - x)$

D. $\frac{1}{4}(x - 2)$

E. $\frac{1}{4}(-x - 2)$

4. Jika $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ dan $g(x) = \frac{x^2+1}{1-x^2}$, maka $f(g(x)) = \ldots$.

A. x^2

B. $x^2 + 1$

C. $x^2 - 1$

D. $\frac{x^2-1}{x^2+1}$

E. $\frac{x^2+1}{x^2-1}$

5. Jika $f(x) = x + 2$ dan $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 4x + 1$, maka $g(2x) = \ldots$.

A. $2x^2 - 4x + 1$

B. $2x^2 - 12x + 1$

C. $8x^2 - 8x + 1$

D. $8x^2 + 8x + 1$

E. $4x^2 - 8x + 1$

6. Jika $f(x) = 2^x$, maka $f(a + 2b - c) = \ldots$.

A. $f(a) + 2f(b) - f(c)$

B. $\frac{2f(a)f(b)}{f(c)}$

C. $\frac{f(a)f(b)^2}{f(c)}$

D. $\frac{f(a) + f(b)^2}{f(c)}$

E. $f(a + 2b) - f(c)$

7. Jika $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$ dan $g(x) = x^2 - 1$, maka $f(x - 2) = \ldots$.

A. $2x - 5$

B. $2x + 3$

C. $2x - 3$

D. $2x + 1$

E. $2x - 1$

8. Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$, maka $f^{-1}(x) = \ldots$.

A. $x + 9$

B. $2 + \sqrt{x}$

C. $2 + \sqrt{x+1}$

D. $2 + \sqrt{x+7}$

E. $x^2 - 2x - 3$

9. Jika $f(x - 2) = \sqrt[3]{2x + 5}$ dan $f^{-1}(3) = 4a + 1$, maka nilai $a = \ldots$.

A. -4

B. 2

C. 3

D. 4

E. 6

10. Jika titik (3, 2) terletak pada grafik fungsi invers $f(x) = 2x^2 + x + p$, maka nilai $p = \ldots$.

A. – 54
B. –15
C. 15
D. 16
E. 54

11. Jika $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = x^3 + 1$ dan $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 2$, maka nilai $a = \ldots$.

A. 94
B. 12
C. 15
D. 18
E. 21

12. Daerah hasil dari fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ adalah ... .

A. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -1 \text{ atau } y \geq 7\}$
B. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -7 \text{ atau } y \geq 1\}$
C. $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 7\}$
D. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1 \text{ atau } y \geq 7\}$
E. $\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 1 \text{ atau } y \geq -7\}$

13. Jika $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$, $x \neq 3$. Jika f^{-1} adalah fungsi invers dari *f*, maka $f^{-1}(x - 2) =$ ... .

A. $\dfrac{x+1}{x-2}, x \neq 2$
B. $\dfrac{2x-3}{x-5}, x \neq 5$
C. $\dfrac{2x-2}{x+1}, x \neq -1$
D. $\dfrac{3x-5}{x-4}, x \neq 4$
E. $\dfrac{2x+1}{x-3}, x \neq 3$

14. Jika $f(x) = 2x^{\frac{2}{3}}$ dan $g(x) = x^{\frac{3}{2}}$, maka $(g \circ f)^{-1}(\sqrt{2}) = \ldots$.

A. 1/2
B. $\sqrt{2}/2$
C. 1
D. 2
E. $2\sqrt{2}$

15. Jika $f(x) = 4x + 2$ dan $g(x) = 3$, maka $(g \circ f)(-2) = \ldots$.

A. – 6
B. – 3
C. 3
D. 6
E. 14

B. Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!

16. Diketahui fungsi *f* dan *g* diberikan oleh $f(x) = 3 - 2x$ dan $g(x) = x^2 + 1$.

a. Tentukan $(g \circ f)(2)$.
b. Jika $(g \circ f)(a) = 2$, tentukan *a*.

17. Tentukan daerah asal dan daerah hasil dari fungsi $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 2x + 1}{16 - x^2}}$.

18. Misalkan $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx - d}$. Jika $a^2 + bc \neq 0$ dan $x \neq a/c$, buktikan bahwa $f(f(x)) = x$. Kemudian hitung $f(f(x))$ untuk $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x + 2}$, $x \neq -2$.

19. Hubungan antara biaya P (dalam rupiah) untuk suatu barang tertentu dengan permintaan D (dalam ribuan unit) mengikuti fungsi

$$P = \sqrt{29 - 3D + D^2}$$

Di pihak lain, permintaan meningkat selama t tahun sejak tahun 2000 menurut

$$D = 2 + \sqrt{t}$$

a. Nyatakan P sebagai fungsi dari t

b. Hitung P jika $t = 15$.

20. Suatu penelitian mengenai hubungan obat anti asam urat dengan jumlah asam urat dalam tubuh dinyatakan dalam fungsi $f(x) = 256 - 4x^2$ dengan x adalah dosis obat anti asam urat (dalam gram) dan $f(x)$ adalah tingkat jumlah asam urat.
    a. Tentukan daerah asal f yang mungkin.
    b. Berapa tingkat asam urat tubuh jika diberikan obat anti asam urat sebanyak 6 gram?
    c. Jika seseorang memiliki tingkat asam urat sebesar 112, berapa banyak dosis obat anti asam urat yang diberikan?

Soal Analisis

1. Sebuah batu dilemparkan ke danau menciptakan suatu riak lingkar yang bergerak ke arah luar pada kecepatan 60 cm/detik.
    a. Nyatakan jari-jari r dari lingkaran ini sebagai fungsi waktu.
    b. Jika A adalah luas lingkaran ini sebagai fungsi jari-jari, carilah $A \circ r$ dan tafsirkan
2. Suatu pesawat terbang melaju pada kecepatan 350 km/jam pada ketinggian satu mil dan lewat tepat di atas stasiun radar pada saat $t = 0$.
    a. Nyatakan jarak mendatar d (dalam mil) yang telah ditempuh pesawat sebagai fungsi waktu.
    b. Nyatakan jarak s antara pesawat dan stasiun radar sebagai fungsi dari d.
    c. Gunakan komposisi untuk menyatakan s sebagai fungsi dari t.
3. Rumus $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, dengan $F \geq -459,67$ menyatakan suhu Celcius C sebagai fungsi dari suhu Fahrenheit F. Tentukan rumus untuk fungsi inversnya dan berikan interpretasinya. Apa daerah asal fungsi invers ini?
4. Dalam teori relativitas, massa suatu partikel dengan kecepatan v adalah

$$m = f(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dengan m_0 menyatakan massa partikel diam dan c laju cahaya di ruang hampa. Tentukan fungsi invers dari f dan jelaskan artinya.

5. Jika suatu populasi bakteri pada awalnya 100 bakteri dan melipat ganda setiap 3 jam, maka banyaknya bakteri setelah t jam adalah

$$n = f(t) = 100.2^{t/3}.$$

a. Tentukan invers dari fungsi ini dan jelaskan artinya.

b. Kapan populasi akan mencapai 50.000? (Ingat konsep logaritma di kelas X).

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Komposisi fungsi dan invers fungsi
Kelompok	:	Semester	: 2 (dua)
Kegiatan	: Mengukur suhu es batu dan air mendidih		
Tujuan	: Mengetahui relasi antara skala Celcius, Fahrenheit, Kelvin, dan Reamur		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Termometer skala Celcius, Fahrenheit, Kelvin, dan Reamur
2. Es batu dan air mendidih
3. Gelas/wadah tertutup sebagai tempat air dan es batu
4. Alat tulis
5. Buku catatan

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 5 siswa.
2. Tempatkan es batu dan air mendidih masing-masing pada gelas tertutup.
3. Ukur suhu es batu dan air mendidih masing-masing dengan keempat jenis termometer tersebut. Kemudian catat suhunya pada tabel di bawah.
4. Lakukan percobaan ini untuk masing-masing anggota.

	Besarnya Suhu			
Objek	Celcius (C)	Fahrenheit (F)	Kelvin (K)	Reamur (R)
Es batu				
Air mendidih				

C. Analisis

1. Dengan data yang Anda peroleh, diskusikan dalam kelompok Anda untuk membuat rumus konversi suhu C dengan F, C dengan K, C dengan R. Kemudian tulis rumus-rumus konversi yang disepakati.
2. Dengan rumus yang Anda peroleh, jika suhu $41^{o}\ F$ berapakah dalam skala C, K, dan R?
3. Berapa ^{o}C suhu normal tubuh manusia? Kemudian nyatakan suhu tersebut dalam F, K, dan R.
4. Dalam relasi C sebagai fungsi F, tentukan invers fungsi ini.

BAB VII

LIMIT FUNGSI

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menjelaskan arti limit fungsi di suatu titik,
2. menghitung limit fungsi aljabar di suatu titik,
3. menghitung limit fungsi trigonometri di suatu titik,
4. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit,
5. menjelaskan arti bentuk tak tentu dari limit fungsi aljabar,
6. menjelaskan limit dari bentuk tak tentu,
7. menjelaskan sifat-sifat yang digunakan dalam perhitungan limit fungsi bentuk tak tentu,
8. menentukan laju perubahan nilai fungsi terhadap peubah bebasnya,
9. menghitung limit fungsi yang mengarah kepada konsep turunan.

Pengantar

Gambar 7.1 Tungku pembuatan kristal

Sumber: matainginbicara.files.wordpress

Suhu sebuah tungku pembuatan kristal dipergunakan dalam penelitian untuk menentukan bagaimana cara terbaik untuk membuat kristal yang dipergunakan dalam komponen elektronik untuk pesawat ulang-alik. Untuk pembuatan kristal yang baik, suhu harus dikendalikan secara akurat dengan menyesuaikan daya masukan. Hubungan suhu dan daya masukan mengikuti fungsi

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

dengan T adalah suhu dalam ^oC , dan w adalah daya masukan dalam watt. Muncul beberapa pertanyaan berkaitan masalah ini. Berapa laju perubahan suhu sebagai fungsi w? Apa satuan besaran ini? Jika daya yang tersedia adalah 1000 watt, kapan laju perubahan terbesar? Kapan laju perubahan terkecil?

Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, sebaiknya Anda ingat kembali beberapa konsep tentang logika matematika, bentuk pangkat dan akar, trigonometri, dan fungsi.

7.1 Pengertian Limit

Konsep limit fungsi merupakan dasar untuk mempelajari kalkulus, meskipun kalkulus sendiri telah dikenalkan oleh Sir Isaac Newton dan Gottried Wilhelm Leibniz pada pertengahan abad ke-17, sedangkan konsep limit fungsi baru dikenalkan oleh Agustin Louis Cauchy pada abad ke-18.

Konsep limit fungsi di suatu titik yang akan kita pelajari adalah melalui pendekatan intuitif, yaitu dimulai dengan menghitung nilai-nilai fungsi di sekitar titik tersebut, terkecuali di titik itu sendiri. Sebagai contoh kita perhatikan fungsi f yang diberikan oleh

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$$

Periksa bahwa daerah asal dari f adalah semua bilangan real x kecuali x = 1, karena $f(1)$ tidak ada. Kita akan menyelidiki nilai fungsi f apabila x mendekati 1 tetapi tidak sama dengan 1. Misalkan x mengambil nilai 0; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9; 0,99; 0,999; 0,9999 dan seterusnya. Dalam hal ini kita mengambil nilai x yang semakin dekat 1 tetapi lebih kecil 1. Nilai-nilai fungsi f untuk harga-harga ini diberikan Tabel 7.1. Kemudian, misalkan x mendekati 1 sepanjang nilai yang lebih besar 1 , yaitu x mengambil nilai 2; 1,75; 1,5; 1,25; 1,1; 1,01; 1,001; 1,0001; 1,00001, dan seterusnya. Lihat Tabel 7.2.

Tabel 7.1

x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
0	1
0,25	1,25
0,5	1,5
0,75	1,75
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999
0,9999	1,9999

Tabel 7.2

x	$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$
2	3
1,75	2,75
1,5	2,5
1,25	2,25
1,1	2,1
1,01	2,01
1,001	2,001
1,0001	2,0001

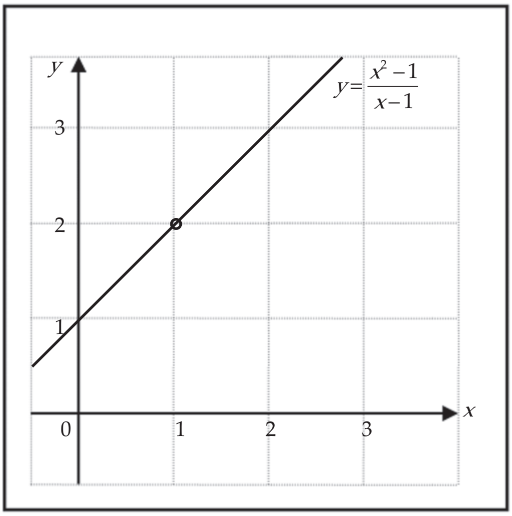
Dari kedua tabel di atas, kita periksa bahwa jika x bergerak semakin dekat ke 1 baik dari arah kiri maupun dari arah kanan, maka $f(x)$ bergerak semakin dekat ke 2. Sebagai contoh, dari Tabel 7.1, jika x = 0,999, maka $f(x)$ = 1,999. Yaitu jika x lebih kecil 0,001 dari 1, maka $f(x)$ lebih kecil 0,001 dari 2.

Dari Tabel 7.2, jika x = 1,001, maka $f(x)$ = 2,001. yaitu, jika x lebih besar 0,01 dari 1, maka $f(x)$ lebih besar 0,001 dari 2.

Situasi di atas mengatakan bahwa kita dapat membuat nilai $f(x)$ mendekati 2 asalkan kita tempatkan x cukup dekat dengan 1, meskipun nilainya $f(1)$ tidak ada. Situasi semacam ini secara matematika kita tuliskan dengan

$$\lim_{x\to 1} f(x)=2$$

Perlu dicatat di sini bahwa nilai $2 \neq f(1)$, karena f tidak terdefinisi di x = 1. Secara grafik situasi ini dapat digambarkan bahwa ketika x = 1, grafiknya terputus (berlubang).



Gambar 7.2 Grafik $y = (x^2-1)/(x-1)$

Secara umum, kita gunakan notasi berikut.

Definisi 7.1

Limit $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sembarang yang dekat dengan L (sedekat yang kita mau) dengan cara mengambil nilai x yang dekat dengan c, tetapi tidak sama dengan c.

Kasarnya, nilai $f(x)$ akan semakin mendekati nilai L ketika x mendekati nilai c (dari dua sisi) tetapi $x \neq c$. Definisi secara formal akan kita pelajari nanti ketika belajar kalkulus di perguruan tinggi.

Notasi alternatif untuk

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

adalah

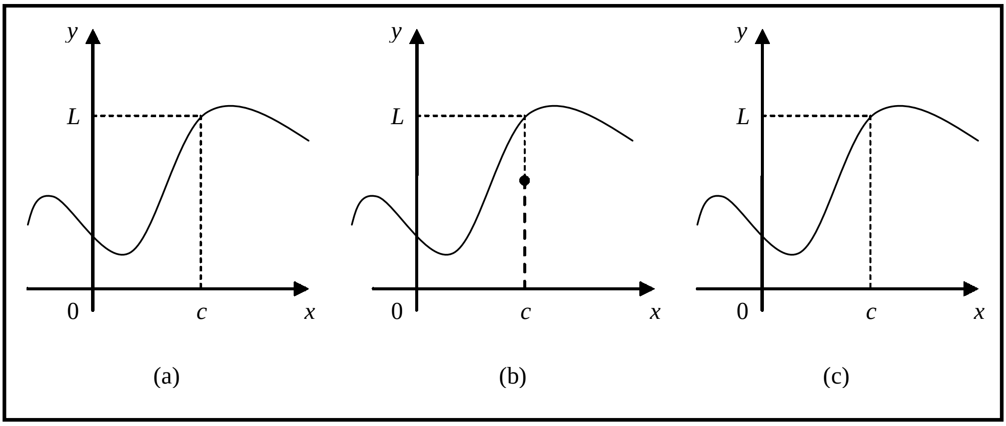
$$f(x) \to L \text{ seraya } x \to c$$

yang secara umum dibaca "$f(x)$ mendekati L ketika x mendekati c".

Kita perhatikan ungkapan "tetapi $x \neq c$" dalam definisi di atas, bermakna bahwa dalam menentukan limit $f(x)$ ketika x mendekati c, kita tidak pernah menganggap $x = c$. Bahkan $f(x)$ tidak harus terdefinisi di $x = c$. Tetapi yang harus kita pedulikan adalah bagaimana f terdefinisi di dekat c.

Dengan penjelasan di depan, juga membawa konsekuensi bahwa jika $\lim_{x \to c} f(x)$ ada, limit tersebut tunggal adanya. Sifat ini yang lebih dikenal sebagai teorema ketunggalan limit.

Gambar 7.3 memperlihatkan grafik dari tiga fungsi. Kita perhatikan bahwa di bagian (b) $L \neq f(c)$, sedangkan di bagian (c) $f(c)$ tidak terdefinisi. Tetapi pada setiap kasus, apapun yang terjadi di c, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.



Gambar 7.2 $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ *dalam tiga kasus*

Contoh 7.1.1

Tebaklah nilai $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2-4}$.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$ tidak terdefinisi di $x = 2$, tetapi hal itu tidak menjadi masalah karena yang perlu kita pertimbangkan dalam menghitung $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ adalah titik-titik di sekitar 2 bukan untuk $x = 2$. Tabel berikut memberikan nilai $f(x)$ (sampai enam desimal) untuk nilai x yang mendekati 2 (tetapi tidak sama dengan 2). Dengan merujuk nilai-nilai pada tabel, kita dapat menebak bahwa

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{1}{4}$$

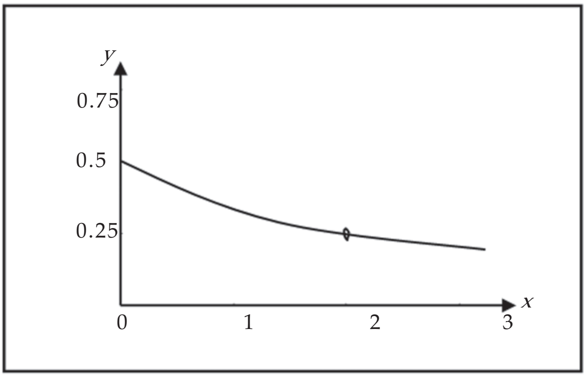
Tabel 7.3

$x < 2$	$f(x)$
1,5	0,285714
1,75	0,266667
1,9	0,256410
1,99	0,250626
1,999	0,250063
1,9999	0,250006

Tabel 7.4

$x > 2$	$f(x)$
2,5	0,222222
2,25	0,235294
2,1	0,243090
2,01	0,249377
2,001	0,249938
2,0001	0,249994

Ilustrasi grafik diberikan oleh gambar 7.4 berikut



Gambar 7.4 Grafik fungsi $y = (x-2)/(x^2-4)$

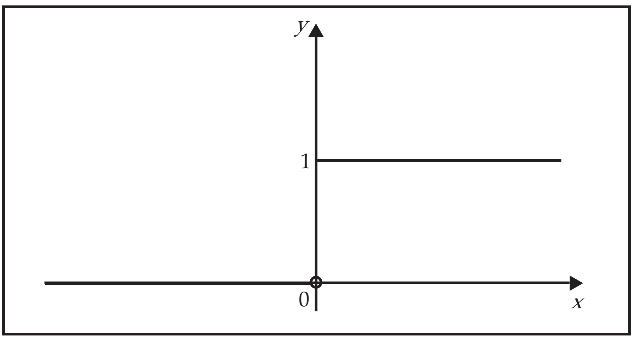
□

Contoh 7.1.2

Fungsi Heaviside H didefinisikan oleh

$$H(t) = \begin{cases} 0 \text{ , untuk } t < 0 \\ 1 \text{ , untuk } t \geq 0 \end{cases}$$

[Fungsi ini dinamai oleh penemunya, seorang insinyur elektrik Oliver Heaviside (1850 – 1925). Grafiknya diberikan oleh Gambar 7.4 berikut.



Gambar 7.5 Fungsi Heaviside

Ketika t mendekati 0 dari arah kiri, $H(t)$ mendekati 0, tetapi jika t mendekati 0 dari arah kanan, $H(t)$ mendekati 1. Oleh karena itu tidak ada bilangan tunggal yang didekati oleh $H(t)$ ketika t mendekati 0. Dalam situasi seperti ini kita katakan bahwa $\lim\limits_{t \to 0} H(t)$ tidak ada.

Limit Satu Sisi

Pada contoh 7.1.2 bahwa $H(t)$ mendekati 0 ketika t mendekati 0 dari arah kiri dan $H(t)$ mendekati 1 ketika t mendekati 0 dari arah kanan. Seperti disampaikan pada contoh itu, bahwa $\lim_{t\to 0} H(t)$ tidak ada. Namun secara khusus kita dapat mengatakan bahwa

$$\lim_{t\to 0^-} H(t) = 0 \text{ dan } \lim_{t\to 0^+} H(t) = 1$$

Simbol "$t \to 0^-$" menunjukkan bahwa yang kita pertimbangkan hanyalah nilai t yang lebih kecil dari 0. Demikian pula, "$t \to 0^+$" menunjukkan bahwa yang kita pertimbangkan hanyalah nilai t yang lebih besar dari 0. Secara umum kita mempunyai definisi berikut ini.

Definisi 7.2

Limit kiri $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan

$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ jika kita dapat membuat $f(x)$ sembarang dekat dengan L dengan cara mengambil nilai x cukup dekat ke c, dan x lebih kecil daripada c.

Jika kita bandingkan Definisi 7.2 dengan Definisi 7.1 perbedaannya adalah bahwa kita syaratkan x harus lebih kecil daripada c. Dengan cara serupa, jika kita syaratkan x harus lebih besar daripada c, kita peroleh "limit kanan dari $f(x)$ ketika x mendekati c adalah sama dengan L", dan kita notasikan dengan

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

Dengan membandingkan Definisi 7.1 dan definisi satu-sisi, kita mempunyai hasil berikut ini.

Teorema 7.1

$\lim_{x\to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$

Contoh 7.1.3

Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} x+3 \ , & \text{untuk } x \le 1 \\ -x+3 \ , & \text{untuk } x > 1 \end{cases}$$

Hitunglah (jika ada):

a. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ b. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ c. $\lim_{x\to 1} f(x)$

Penyelesaian:

a. Jika kita ambil x mendekati 1 dari arah kiri, maka nilai $f(x)$ dekat ke 4. Oleh karena itu,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4$$

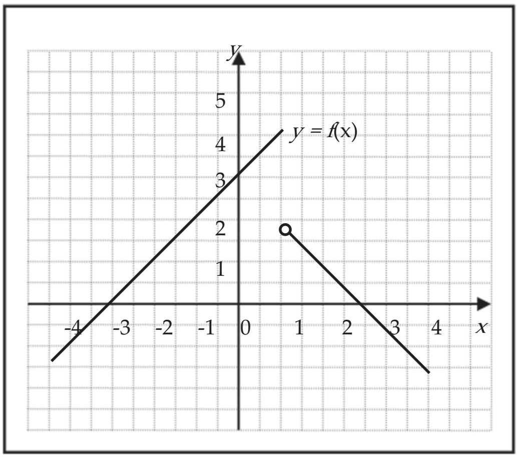
b. Jika kita ambil x mendekati 1 dari arah kanan, maka nilai $f(x)$ dekat ke 2. Dengan demikian,

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2$$

c. Dari dua jawaban di atas, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, menurut Teorema 7.1 kita simpulkan bahwa

$$\lim_{x\to 1} f(x) \text{ tidak ada}$$

Sebagai ilustrasi situasi ini, grafik fungsi *f* diberikan oleh gambar 7.6.



Gambar 7.6

Meskipun tampak bahwa nilai $f(1) = 4$, tidak berarti $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

□

Tugas Mandiri

Diketahui $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x-1|}$.

a. Carilah $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ dan $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

b. Apakah $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ada?

c. Gambarkan sketsa grafik *f*.

Contoh 7.1.5

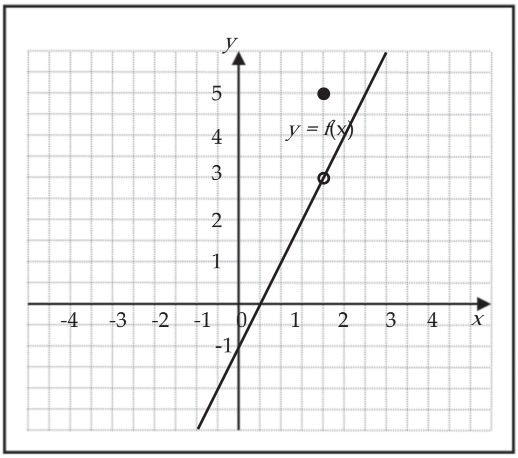
Misalkan $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{, untuk } x \neq 2 \\ 5 & \text{, untuk } x = 2 \end{cases}$. Tentukan $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini $f(2) = 5$, tetapi jika $x \neq 2$ dan *x* yang cukup dekat dengan 2, maka nilai $f(x)$ dekat dengan 3. Jadi,

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

Perhatikan ilustrasi grafiknya pada gambar 7.7.



Gambar 7.7

Dari contoh 7.1.1 dan juga ilustrasi di awal sub-bab meskipun akurat, cara menentukan nilai limit fungsi di suatu titik dengan metode tersebut terkesan lamban dan tidak efisien. Penebakan nilai limit untuk beberapa fungsi dapat dilakukan dengan pemfaktoran. Sebagai ilustrasi, kita perhatikan kembali contoh 7.1.1 bahwa untuk $x \neq 2$ atau $x-2 \neq 0$, fungsi $f(x) = (x-2)/(x^2-4)$ dapat kita sederhanakan menjadi

$$f(x) = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

Kemudian dengan mengambil x mendekati 2 (baik dari kanan ataupun dari kiri), maka nilai $f(x)$ mendekati 1/4. Oleh karena itu,

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}$$

$\square$

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk menentukan eksistensi bilangan real a sehingga

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

ada. Jika bilangan a ini ada, tentukan nilainya. Kemudian hitung nilai limitnya.

Latihan 7.1

1. Jelaskan dengan kata-kata sendiri apakah yang dimaksud dengan persamaan

$$\lim_{x \to -2} f(x) = 7$$

Mungkinkah pernyataan ini benar dan harus $f(-2) = 7$. Jelaskan.

2. Jelaskan apakah yang dimaksud dengan mengatakan

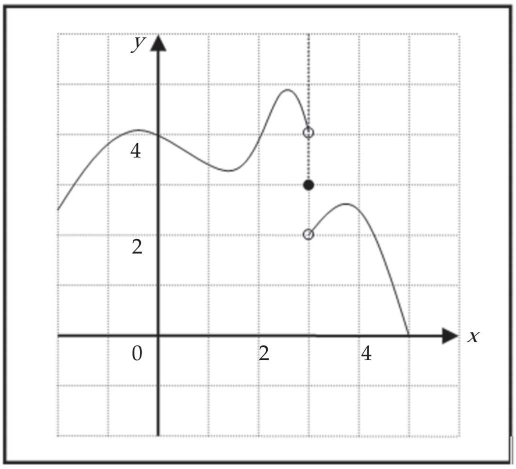
$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 5 \text{ dan } \lim_{x \to 1^+} f(x) = -4$$

Dalam keadaan ini, mungkinkah $\lim_{x \to 1} f(x)$ ada? Jelaskan.

3. Untuk fungsi yang grafiknya diberikan nyatakan nilai besaran yang diberikan, jika ada. Jika tidak ada, jelaskan mengapa?

a. $\lim_{x \to 1} f(x)$ d. $\lim_{x \to 3} f(x)$ e. $f(3)$

b. $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ c. $\lim_{x \to 3^+} f(x)$



Gambar 7.8

4. Gambarkan sketsa grafik fungsi f berikut dan gunakanlah untuk menentukan nilai c sehingga $\lim_{x \to c} f(x)$ ada.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 5 & \text{, untuk } x < 1 \\ 6x & \text{, untuk } x \geq 1 \end{cases}$$

5. (Gunakan kalkulator) Jika ada tentukan setiap limit yang diberikan berikut. Jika tidak ada, mengapa?

a. $\lim_{x \to -2} 3x + 2$ c. $\lim_{x \to 2} \dfrac{2}{x + 2}$

b. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 1)$ d. $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{2x + 2}$

6. Tentukan nilai k sehingga limit yang diberikan ada.

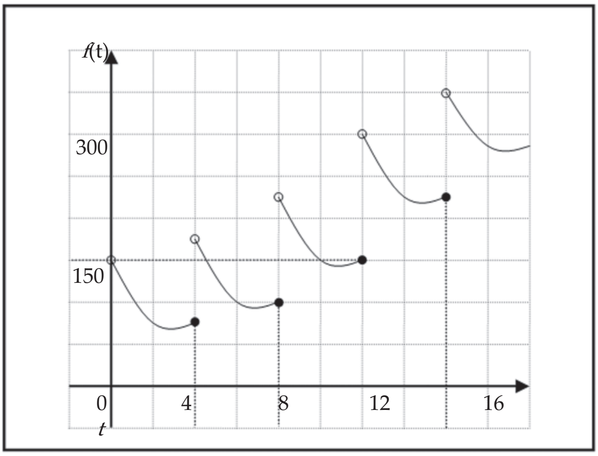
a. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ dengan $f(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \text{, untuk } x \le 2 \\ 5x + k & \text{, untuk } x > 2 \end{cases}$

b. $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ dengan $f(x) = \begin{cases} kx - 3 & \text{, untuk } x \le -1 \\ x^2 + k & \text{, untuk } x > -1 \end{cases}$

7. Seorang pasien menerima suntikan 150 mg obat setiap 4 jam. Grafik menunjukkan banyaknya $f(t)$ obat di dalam aliran darah setelah t jam. Tentukan

$$\lim_{x \to 12^-} f(t) \text{ dan } \lim_{x \to 12^+} f(t)$$

dan jelaskan arti penting limit satu arah ini.



Gambar 7.9

8. Dalam teori relativitas, massa partikel yang bergerak dengan kecepatan v adalah

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dengan m_0 adalah massa partikel diam, dan c adalah kecepatan cahaya. Apa yang terjadi apabila $v \to c^-$?

7.2 Teorema Limit

Pada sub-bab sebelumya, kita menggunakan kalkulator dan grafik untuk menebak nilai limit, dan adakalanya tebakan kita tidak tepat. Dua metode tersebut terkesan kurang efisien. Setelah memahami betul konsep tersebut, dalam sub-bab ini kita akan menggunakan sifat-sifat limit berikut, yang disebut Teorema Limit untuk menghitung limit lebih efisien. Teorema-teorema limit berikut disajikan tanpa bukti, karena buktinya menggunakan definisi formal, yang di luar jangkauan buku ini.

Teorema 7.2 (Teorema Limit)

1. $\lim\limits_{x \to c} k = k$, k adalah suatu konstanta
2. $\lim\limits_{x \to c} x = c$
3. $\lim\limits_{x \to c} x^n = c^n$, n bilangan asli
4. Jika k adalah suatu konstanta, dan

   $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$

   maka :

   a. $\lim\limits_{x \to c} (kf)(x) = k \lim\limits_{x \to c} f(x)$

   b. $\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x)$

   c. $\lim\limits_{x \to c} (fg)(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x)$

   d. $\lim\limits_{x \to c} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$, asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

   e. $\lim\limits_{x \to c} f^n(x) = \left[\lim\limits_{x \to c} f(x)\right]^n$, untuk n bilangan asli

   f. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to c} f(x)}$, n bilangan asli, dan $\lim\limits_{x \to c} f(x) > 0$

Contoh 7.2.1

Hitung limit berikut dan beri alasan tiap langkah.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 8x - 6)$

b. $\lim\limits_{x \to -2} (x^3 + 3)(x^2 - 5x)$

c. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x \to 3} (x^2 + 8x - 6) = \lim\limits_{x \to 3} x^2 + \lim\limits_{x \to 3} 8x - \lim\limits_{x \to 3} 6$ (Teorema 7.2 bagian 4b)

$= \lim\limits_{x \to 3} x^2 + 8 \lim\limits_{x \to 3} x - \lim\limits_{x \to 3} 6$ (Teorema 7.2 bagian 4a)

$= 3^2 + 8 \cdot 3 - 6$ (Teorema 7.2 bagian 2 dan 3)

$= 27$

b. $\lim\limits_{x\to -2} (x^3+3)(x^2-5x) = \lim\limits_{x\to -2} (x^3+3)\cdot \lim\limits_{x\to -2} (x^2-5x)$ (Teorema 7.2 bagian 4c)

$= \left(\lim\limits_{x\to -2} x^3 + \lim\limits_{x\to -2} 3\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to -2} x^2 - 5\lim\limits_{x\to -2} x\right)$ (Teorema 7.2 bagian 4a dan 4b)

$= \left((-2)^3+3\right)\cdot\left((-2)^2-5(-2)\right)$ (Teorema 7.2 bagian 2 dan 3)

$= (-5)(14) = -70$

c. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3+2x^2-1}{5-3x} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(5-3x)} = \dfrac{15}{-1} = -15$ (Teorema 7.2 bagian 4d)

□

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk membahas soal-soal berikut ini.

1. Berikan contoh dua buah fungsi f dan g sehingga $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ atau $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ tidak ada, tetapi $\lim\limits_{x \to c} [f(x)+g(x)]$ ada.
2. Berikan contoh dua buah fungsi f dan g sehingga atau tidak ada, tetapi ada.

Dalam prakteknya kita sering menjumpai bentuk $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, sehingga sifat limit 4d tidak dapat kita terapkan secara langsung, karena pembagian dengan bilangan nol tidak dibenarkan. Limit model ini sering disebut sebagai limit bentuk tak tentu. Cara menghitung limit jenis ini, terlebih dahulu kita sederhanakan atau kita rasionalkan terlebih dahulu. Berikut ini beberapa contoh yang berkaitan dengan bagaimana menghitung limit dari bentuk tak tentu.

Contoh 7.2.2

Tentukan $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Penyelesaian:

Karena $\lim\limits_{x\to 3} (x-3) = 0$, maka kita tidak dapat menerapkan sifat limit 4d. Dengan memfaktorkan pembilang kita peroleh

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3}$$

Jika $x \neq 3$ ($x-3 \neq 0$), maka pembilang dan penyebut dapat dibagi dengan $x-3$,

$$\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$$

Karena dalam menghitung limit kita hanya memperhatikan nilai x di sekitar 3 tetapi tidak sama dengan 3, maka pembagian di sini diperbolehkan. Jadi,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

□

Contoh 7.2.3

Misalkan $f(x) = x^2 + 3x - 1$, hitunglah $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Penyelesaian:

Karena $h \neq 0$, maka kita peroleh

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{[(x+h)^2 + 3(x+h) - 1] - [x^2 + 3x - 1]}{h} \\ &= \frac{2xh + 3h + h^2}{h} \\ &= 2x + 3 + h \end{aligned}$$

Jadi,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x+3+h) = 2x+3$$

□

Latihan 7.2

1. Diketahui bahwa

   $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -2$ $\quad \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to c} h(x) = 16$.

   Tentukan limit berikut (jika ada). Jika tidak ada, jelaskan mengapa?

   a. $\lim\limits_{x \to c} [f(x) + h(x)]$

   b. $\lim\limits_{x \to c} [f(x)]^3$

   c. $\lim\limits_{x \to c} \sqrt[4]{h(x)}$

   d. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{h(x)}$

   e. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

   f. $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{3f(x)}{h(x) - 2f(x)}$

2. Tentukan setiap limit yang diberikan dengan menggunakan teorema limit fungsi.

a. $\lim\limits_{x \to 3} (2x^2 - x + 5)$

b. $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 + 2)(x^2 - 8x)$

c. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2x+1}{x^2 - 3x + 4}$

d. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x^4 + x^2 - 6}{x^4 + 2x + 3} \right)^2$

e. $\lim\limits_{t \to -2} \sqrt{t^4 + 3t + 6}$

f. $\lim\limits_{x \to 4^-} \sqrt{16 - x^2}$

3. a. Apa yang salah dengan persamaan berikut?

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 4$$

b. Dengan fakta di bagian a, jelaskan mengapa persamaan ini

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x + 4)$$

benar.

4. Hitunglah setiap limit berikut, jika ada.

a. $\lim\limits_{t \to -5} \dfrac{t^2 - 25}{t + 5}$

b. $\lim\limits_{x \to -3/2} \dfrac{4x^2 - 9}{2x + 3}$

c. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - x - 12}$

d. $\lim\limits_{y \to -2} \dfrac{2 - 3y - 2y^2}{16 + 6y - y^2}$

e. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{9 - x}{3 - \sqrt{x}}$

f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{9 - x} - 3}{x}$

g. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{\sqrt{x + 4} - 3}$

h. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{1 - x} - \dfrac{2}{1 - x^2} \right)$

i. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^4 - 2x^2} - x^2}{x^2}$

j. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{t + 1} - 1}{t}$

5. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = x^2 - 3x + 6$

b. $f(x) = x^3 - 8$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$

d. $f(x) = 2\sqrt{x}$

e. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2}$, $x \neq -2$

6. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$ untuk setiap fungsi f pada soal nomor 5.

7.3 Laju Perubahan (Pengayaan)

Misalkan y adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain x. Sehingga, y adalah fungsi dari x dan dapat kita tuliskan $y = f(x)$. Jika x berubah dari $x = c$ sampai $x = c + h$, maka perubahan x adalah

$$\Delta x = (c + h) - c = h$$

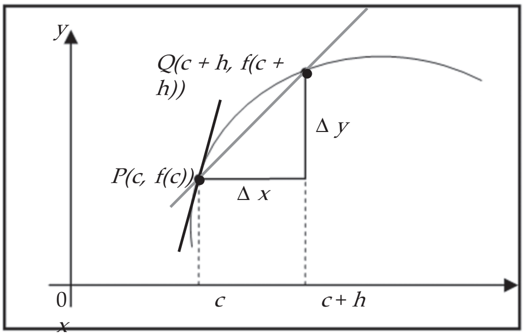
(Δx dibaca "delta x") dan perubahan padanannya adalah

$$\Delta y = f(c + h) - f(c)$$

Hasil bagi selisih

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

disebut rerata laju perubahan y terhadap x sepanjang interval $[c,\ c + h]$, dan ditafsirkan sebagai kemiringan tali busur PQ pada gambar 7.10.



Gambar 7.10 Rerata laju perubahan

Kita tinjau laju perubahan rerata pada interval yang semakin kecil $[c,\ c + h]$, sehingga h mendekati 0. Limit laju perubahan rerata ini disebut laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$, yang ditafsirkan sebagai kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $P(c, f(c))$:

$$\text{laju perubahan sesaat} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \qquad (7.1)$$

Setelah kita memahami apa tafsiran fisika dari limit di atas, kita akan menyelesaikan permasalahan pembuatan kristal yang diungkapkan pada awal bab, yang disederhanakan menjadi contoh berikut.

Contoh 7.3.1

Suhu sebuah tungku pembuatan kristal dipergunakan dalam penelitian untuk menentukan bagaimana cara terbaik untuk membuat kristal yang dipergunakan dalam komponen elektronik untuk pesawat ulang-alik. Untuk pembuatan kristal yang baik, suhu harus dikendalikan secara akurat dengan menyesuaikan daya masukan. Hubungan suhu dan daya masukan mengikuti fungsi

$$T(w) = 0{,}1w^2 + 2{,}155w + 20$$

dengan T adalah suhu dalam $^{\circ}C$, dan w adalah daya masukan dalam watt.

a. Berapakah laju perubahan suhu terhadap daya masukan *w*? Apa satuannya?
b. Jika daya yang tersedia adalah 1000 watt, kapan laju perubahan terbesar dan kapan laju perubahan terkecil?

Penyelesaian:

a. Menurut rumus (7.1), besar laju perubahan suhu terhadap daya masukan w adalah

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta w}=\lim_{h\to 0}\frac{T(w+h)-T(w)}{h}$$

Kita hitung dulu,

$$\frac{T(w+h)-T(w)}{h}=\frac{[0{,}1(w+h)^2+2{,}155(w+h)+20]-[0{,}1w^2+2{,}155w+20]}{h}$$
$$=\frac{0{,}2wh+2{,}155h+0{,}1h^2}{h}$$
$$=0{,}2w+2{,}155+0{,}1h$$

Dengan demikian,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta w}=\lim_{h\to 0}\frac{T(w+h)-T(w)}{h}=\lim_{h\to 0}(0{,}2w+2{,}155+0{,}1h)=0{,}2w+2{,}155$$

Jadi, besar laju perubahan suhu terhadap daya masukan w adalah $0{,}2w+2{,}155$.

Besaran ini mempunyai satuan ${}^{o}C/\text{watt}$.

b. Daya yang tersedia sebesar 1000 watt. Dari fungsi laju perubahan, maka laju perubahan terbesar terjadi ketika $w = 1000$ dan terkecil saat $w = 0$. Jadi,

laju perubahan terbesar = 0,2 (1000) + 2,115= 202,155 ${}^{o}C/\text{watt}$,

laju perubahan terkecil = 0,2 (0) + 2,115= 2,155. ${}^{o}C/\text{watt}$.

□

Latihan 7.3

1. Sebuah kota dijangkiti epidemi flu. Petugas menaksir bahwa t hari setelah dimulainya epidemi, jumlah orang yang sakit flu diberikan oleh fungsi

$$p(t)=120t^2-2t^3 \text{ dengan } 0\le t\le 40$$

Berapakah laju menularnya flu pada saat $t = 10$, $t = 20$, dan $t = 40$?

2. Gelombang udara dingin mendekati suatu SMA. Temperatur t setelah tengah malam adalah T, dengan

$$T=0{,}1(400-40t+t^2),\quad 0\le t\le 12$$

   a. Tentukan rerata laju perubahan dari T terhadap t di antara jam 5 pagi dan jam 6 pagi.
   b. Tentukan laju perubahan sesaat T terhadap t pada jam 5 pagi.

3. Suatu perusahaan mulai beroperasi pada 14 Pebruari 2000. Pendapatan kotor tahunan perusahaan itu setelah t tahun adalah p juta rupiah, dengan

$$p(t)=50.000+18.000t+600t^2$$

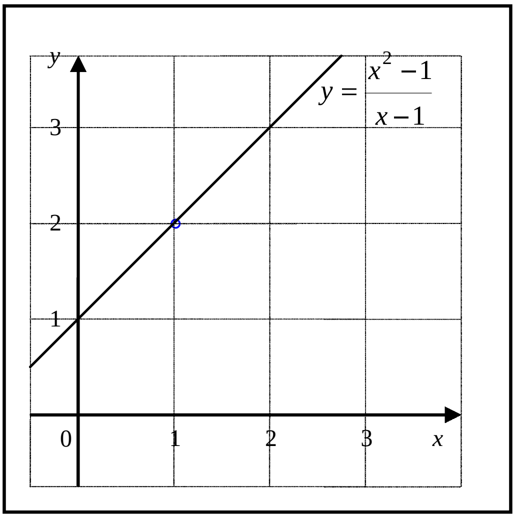
Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 14 Pebruari 2007.

7.4 Kekontinuan (Pengayaan)

Pada awal bab kita membahas fungsi f didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Kita perhatikan bahwa f terdefinisi untuk semua x kecuali di $x = 1$. Sketsa grafiknya terdiri dari semua titik pada garis $y = x + 1$ kecuali titik (1,2), dapat dilihat pada gambar 7.11. Grafik fungsi ini terputus di titik (1,2) dan kita menyebutnya bahwa fungsi f ini tak kontinu atau diskontinu di titik 1. Ketakkontinuan ini terjadi karena $f(1)$ tidak ada.



Gambar 7.11 Grafik $y = (x^2 - 1)/(x - 1)$

Jika fungsi f di atas di titik 1 kita berikan nilai $f(1) = 3$, maka grafiknya masih terputus di titik $x = 1$, dan fungsi f tersebut tetap tak kontinu di 1. Tetapi, jika kita mendefinisikan $f(1) = 2$, maka tidak terdapat lagi grafik yang terputus untuk fungsi ini dan fungsi f dikatakan kontinu di semua nilai x. Hal ini yang memotivasi definisi berikut.

Definisi 7.3

Fungsi f dikatakan kontinu di titik c, jika memenuhi ketiga syarat berikut.

(1) $f(c)$ ada

(2) $\lim_{x \to c} f(x)$ ada

(3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Jika satu atau lebih dari ketiga syarat ini tidak dipenuhi di c, maka fungsi f dikatakan tak kontinu atau diskontinu di c. Fungsi yang kontinu di setiap titik dari daearah asalnya disebut fungsi kontinu.

Contoh 7.4.1

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = x^3 + 4x - 7$, $x \in \mathbb{R}$, kontinu di $x = 1$.

Penyelesaian:

Kita akan selidiki ketiga syarat kekontinuan.

(1) $f(1) = (1)^3 + 4(1) - 7 = -2$

(2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} (x^3 + 4x - 7) = -2$

(3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2 = f(1)$

Ketiga syarat kekontinuan dipenuhi. Jadi, f kontinu di $x = 1$.

□

Contoh 7.4.2

Tunjukkan bahwa fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x - 6}$ tak kontinu di $x = 3$ dan $x = -2$.

Penyelesaian:

Jika kita subtitusikan nilai $x = 3$ dan $x = -2$ ke dalam fungsi f, maka $f(3)$ dan $f(-2)$ nilainya tidak ada.

Jadi, syarat kekontinuan yang pertama tidak terpenuhi. Dengan demikian, fungsi f tak kontinu di $x = 3$ dan $x = -2$.

□

Contoh 7.4.3

Tentukan daerah asalnya yang menyebabkan setiap fungsi berikut kontinu.

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 4x + 3}$

b. $g(x) = \sqrt{x+3}$

Penyelesaian:

a. Fungsi f kontinu di setiap bilangan real x kecuali untuk x yang memenuhi $x^2 - 4x + 3 = 0$. Persamaan

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 = 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = 3 \end{aligned}$$

Jadi, daerah asal sehingga f kontinu adalah $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1 \text{ atau } x \neq 3\}$.

b. Fungsi g kontinu di setiap bilangan real x sehingga $x + 3 \geq 0$ (ingat sifat akar). Karena $x + 3 \geq 0$ dipenuhi untuk $x \geq -3$, maka daerah asal yang menyebabkan kontinu g adalah $D_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -3\}$.

□

Contoh 7.4.4

Misalkan $f(x) = \begin{cases} 3x + 7 & , \text{ untuk } x \leq 4 \\ kx - 1 & , \text{ untuk } x > 4 \end{cases}$. Tentukan nilai k sehingga f kontinu di $x = 4$.

Penyelesaian:

Syarat agar fungsi f kontinu di $x = 4$ adalah $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = f(4)$. Kita perhatikan bahwa

$$f(4) = 3 \cdot 4 + 7 = 19$$

dan untuk $x \leq 4$,

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (3x + 7) = 19$$

Untuk $x > 4$,

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (kx - 1) = 4k - 1$$

Agar $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$ ada haruslah $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} f(x)$, yaitu

$$4k - 1 = 19 \iff k = 5.$$

Jadi, agar fungsi f kontinu di $x = 4$ haruslah $k = 5$.

□

Latihan 7.4

1. Tentukan nilai-nilai sehingga setiap fungsi berikut tak kontinu di nilai-nilai tersebut.

   a. $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

   b. $g(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 + x - 6}$

   c. $h(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{x+2} & \text{, untuk } x \neq -2 \\ 2 & \text{, untuk } x = -2 \end{cases}$

   d. $k(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2x - 3}}$

   e. $p(x) = \dfrac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

2. Tentukan daerah asal yang menyebabkan setiap fungsi berikut kontinu.

   a. $f(x) = x^2(x + 2)^2$

   b. $g(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 7}$

   c. $h(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 + 2x - 8}$

   d. $k(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & \text{, untuk } x \leq 0 \\ x^2 + 2 & \text{, untuk } x > 0 \end{cases}$

3. a. Apakah fungsi konstan merupakan fungsi kontinu?
   b. Apakah fungsi tangga merupakan fungsi yang kontinu?
   c. Apakah fungsi kuadrat merupakan fungsi kontinu?

4. Tentukan konstanta c dan k sehingga fungsi yang diberikan kontinu di titik yang diberikan.

   a. $f(x) = \begin{cases} kx - 1 & \text{, untuk } x < 2 \\ kx^2 & \text{, untuk } x \geq 2 \end{cases}$, untuk $x = 2$

   b. $g(x) = \begin{cases} x & \text{, untuk } x \leq 1 \\ cx + k & \text{, untuk } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{, untuk } x \geq 4 \end{cases}$, untuk $x = 1$ dan $x = 4$

5. Gaya gravitasi bumi yang dipancarkan oleh Bumi pada sebuah unit massa yang berada pada jarak r dari pusat planet adalah

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{, untuk } r < R \\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{, untuk } r \geq R \end{cases}$$

dengan M adalah massa bumi, R jari-jari bumi, dan G kontanta gravitasi. Apakah fungsi F kontinu dari r?

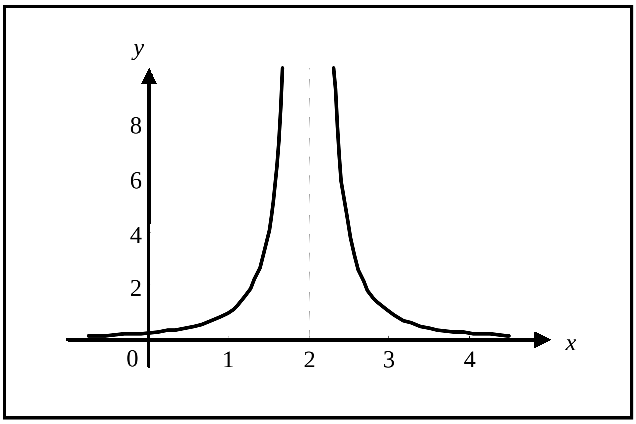
7.5 Limit Tak Hingga (Pengayaan)

Misalkan f fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

Sketsa grafik fungsi ini diberikan oleh gambar 7. 12. Kita akan menyelidiki nilai fungsi f apabila x mendekati 2. Misalkan x mendekati 2 dari arah kanan, perhatikan nilai $f(x)$ yang diberikan pada Tabel 7.6. Dari tabel ini kita lihat secara intuitif bahwa untuk x yang bergerak semakin dekat menuju 2 sepanjang nilai x yang lebih besar dari 2, maka nilai $f(x)$ membesar tak terbatas. Dalam hal ini kita tuliskan dengan notasi

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$



Gambar 7.12 Grafik fungsi $f(x) = 1/(x-2)^2$

Tabel 7.6

x	$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$
3	1
2,5	4
2,25	16
2,10	100
2,01	10.000
2,001	1.000.000
2,0001	100.000.000

Tabel 7.7

x	$f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$
1	1
1,5	4
1,75	16
1,9	100
1,99	10.000
1,999	1.000.000
1,9999	100.000.000

Sekarang jika x mendekati 2 dari arah kiri, perhatikan bahwa nilai $f(x)$ yang diberikan pada Tabel 7.7. Dari tabel ini secara intuitif dapat kita lihat bahwa untuk x yang bergerak semakin dekat menuju 2 sepanjang nilai x yang lebih kecil dari 2, maka nilai $f(x)$ membesar tak terbatas. Dalam hal ini kita tuliskan dengan notasi

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Oleh karena itu, untuk x mendekati 2 baik dari kanan maupun dari kiri, nilai $f(x)$ membesar tanpa batas dan kita menuliskan sebagai

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Ilustrasi di depan memotivasi definisi berikut.

Definisi 7.4

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval terbuka yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Kita tuliskan,

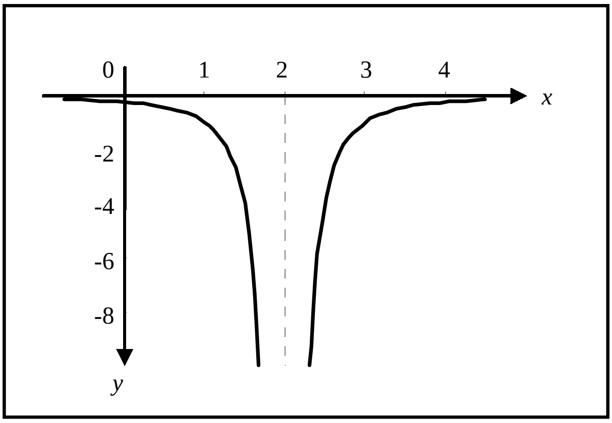
$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$

jika untuk x mendekati c tetapi tidak sama dengan c, maka nilai $f(x)$ membesar tanpa batas

Perlu kita perhatikan di sini bahwa $+\infty$ bukan lambang bilangan real, sehingga jika kita menuliskan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ artinya tidak sama dengan $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, dengan L bilangan real. Notasi $\lim\limits_{x \to c} f(x) = +\infty$ hanya untuk menunjukkan bahwa perilaku nilai fungsi f untuk x bergerak semakin dekat dengan c nilainya membesar tak terbatas. Dengan cara yang sama kita dapat menunjukkan perilaku suatu fungsi yang nilainya mengecil tanpa batas. Perhatikan fungsi g yang didefinisikan oleh

$$g(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

Sketsa grafik fungsi g dapat kita lihat pada gambar 7.13.



Gambar 7.13 Grafik fungsi $g(x) = -1/(x-2)^2$

Nilai fungsi g jika x mendekati 2 dari kiri atau kanan, $g(x)$ mengecil tanpa batas, dan kita menuliskan sebagai

$$\lim_{x \to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty$$

Definisi 7.5

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval terbuka yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

jika untuk x mendekati c tetapi tidak sama dengan c, maka nilai $f(x)$ mengecil tanpa batas.

Sebelum mempelajari beberapa contoh, kita memerlukan teorema berikut ini, yang disajikan tanpa bukti, karena di luar jangkauan buku ini.

Teorema 7.3

Jika r suatu bilangan positif, maka

1. $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$

2. $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty & \text{jika } r \text{ ganjil} \\ +\infty & \text{jika } r \text{ genap} \end{cases}$

Contoh 7.5.1

Tentukan nilai dari:

a. $\lim_{x \to 5^+} \frac{1}{x-5}$

b. $\lim_{x \to 3^+} \frac{2x+1}{x-3}$

c. $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2}$

Penyelesaian:

Dengan menggunakan Teorema 7.3,

a. Misalkan kita ambil $t = x - 5$, maka untuk $x \to 5^+$ mengakibatkan $t \to 0^+$.

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$$

b. Jika kita ambil $t = x - 3$, maka

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x+1}{x-3} = \lim_{x\to 3^+} \frac{2(x-3)+7}{x-3} = \lim_{t\to 0^+} \left(\frac{2}{t} + \frac{7}{t}\right) = +\infty$$

c. Jika kita ambil $t = x - 1$, maka

$$\lim_{x\to 1} \frac{x+2}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1+3}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{1}{t} + \frac{3}{t^2}\right) = +\infty$$

□

Latihan 7.5

Hitunglah setiap limit yang diberikan berikut ini.

1. $\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^3}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^4}$
3. $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{2-x}$
4. $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3}$
5. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x-1}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{x^2-2x+1}$
7. $\lim_{x\to 3^+} \frac{4x^2}{9-x^2}$
8. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x^3+9x^2+20x}{x^2+x-20}$
9. $\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-x-12}{x^2-6x+8}$
10. $\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-x-12}{x^2-6x+8}$

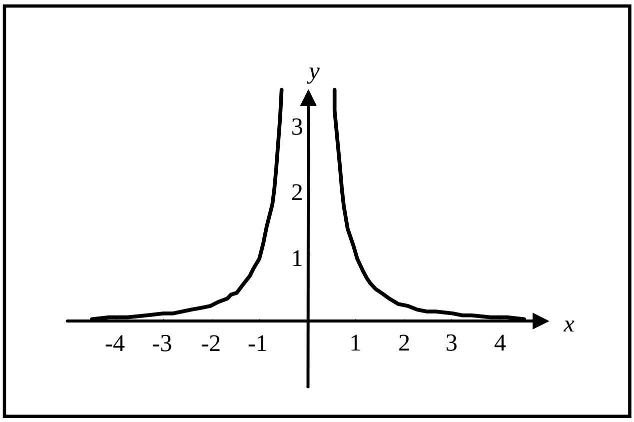
7.6 Limit di Tak Hingga

Sekarang kita akan meninjau limit fungsi apabila peubah bebas x naik atau turun tak terbatas. Limit semacam ini bermanfaat dalam teknik menggambar grafik fungsi. Disamping itu, limit-limit ini dapat digunakan pula untuk menentukan nilai-nilai ekstrim fungsi pada selang terbuka.

Kita mulai dengan fungsi yang khusus. Misalkan didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Sketsa grafik fungsi ini diberikan oleh gambar 7.14. Misalkan x mengambil nilai-nilai 1, 2, 3, 4, 5, 10, 100, 1000 dan seterusnya, dengan x naik tak terbatas. Nilai-nilai fungsi terkait diberikan pada Tabel 7.8. Dari tabel tersebut, dapat kita amati bahwa nilai-nilai fungsi $f(x)$ semakin lama semakin dekat ke 0 apabila x naik menjadi besar sekali.



Gambar 7.14 Grafik fungsi $f(x) = 1/x^2$

Tabel 7.8

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
1	1
2	0,25
5	0,04
10	0,01
100	0,0001
1.000	0,000001

Tabel 7.9

x	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
−1	1
−2	0,25
−5	0,04
−10	0,01
−100	0,0001
−1.000	0,000001

Secara intuisi, dapat kita lihat bahwa nilai $f(x)$ mendekati nilai 0, apabila kita ambil x cukup besar. Untuk menjelaskan situasi kita notasikan

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Notasi $x \to +\infty$ kita artikan bahwa bebas x naik tak terbatas dengan nilai-nilai positif, dan $+\infty$ bukan bilangan real. Oleh karena itu, notasi $x \to +\infty$ tidak sama pengertiannya dengan $x \to 10$. Ilustrasi di atas memotivasi definisi berikut.

Definisi 7.6

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(a, +\infty)$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

jika untuk x positif yang naik besar sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L.

Sekarang kita tinjau fungsi f di depan dengan x mengambil nilai-nilai –1, –2, –3, –4, –5, –10, –100, –1000,... dan seterusnya, dengan x turun dengan nilai negatif tak terbatas. Tabel 7.9 memberikan nilai-nilai fungsi $f(x)$ terkait.
Secara intuisi, dapat kita lihat bahwa nilai $f(x)$ mendekati nilai 0, apabila kita ambil x cukup kecil dari bilangan negatif. Dalam hal ini kita tuliskan,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Definisi 7.7

Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval $(-\infty, b)$. Kita tuliskan

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

jika untuk x negatif yang turun kecil sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L.

Teorema-teorema limit di sub-bab 7.2 dan 7.4 tetap berlaku apabila $x \to c$ kita ganti dengan $x \to +\infty$ atau $x \to -\infty$. Kita mempunyai teorema tambahan berikut ini, yang kita sajikan tanpa bukti.

Teorema 7.4

Jika r suatu bilangan positif, maka

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^r} = 0$

Contoh 7.6.1

Tentukan nilai dari:

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x-7}{3x+5}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2+4}{x^3+x^2+1}$

Penyelesaian:

Untuk menggunakan Teorema 7.4, kita bagi pembilang dan penyebut dengan pangkat tertinggi yang muncul dalam pembilang atau penyebut.

a. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-7}{3x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 - \frac{7}{x}}{3 + \frac{5}{x}} = \frac{4-0}{3-0} = \frac{4}{3}$$

c. $$\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2+4}{x^3+x^2+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3} + \frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{4}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \frac{0 + 0}{6 + 0 + 0} = \frac{0}{6} = 0$$

□

Contoh 7.6.2

Hitunglah limit yang diberikan:

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+5}{\sqrt{2x^2-3}}$ b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x} \right)$

Penyelesaian:

a. Pangkat tertinggi dari x adalah 2 yang muncul di bawah tanda akar. Karena itu pembilang dan penyebut kita bagi dengan $\sqrt{x^2} = |x|$. Karena $x \to -\infty$, maka $x < 0$ dan $|x| = -x$. Jadi,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x+5}{\sqrt{2x^2-3}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x}{|x|} + \dfrac{5}{|x|}}{\sqrt{2 - \dfrac{3}{x^2}}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\dfrac{x}{-x} + \dfrac{5}{-x}}{\sqrt{2 - \dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{-1 - \dfrac{5}{x}}{\sqrt{2 - \dfrac{3}{x^2}}}$$

$$= \frac{-1-0}{\sqrt{2-0}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

b. Kita rasionalkan bentuk akar itu,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-x} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-x^2+x}{\sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + x\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x}} + \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{3}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{3}{2}$$

□

Latihan 7.6

Tentukan setiap limit yang diberikan.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x+1}{4x+9}$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2+8x}{2x^2-3}$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{8x+1}{x^2-2x+3}$

4. $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{4y^2-3y+3}{y+1}$

5. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(5x+\dfrac{3}{x^2}\right)$

6. $\lim\limits_{y \to -\infty} \left(\dfrac{5}{y^2}-4y\right)$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+9}}{x+3}$

8. $\lim\limits_{t \to -\infty} \dfrac{\sqrt{t^4+1}}{2t^2+3}$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1}-x$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2+x}-x)$

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{4x^2+x}-(2x+3))$

12. $\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt[3]{x^3+1})$

13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

14. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2^{x+1}+2}{3^x+1}$

15. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1+2+3+...+x}{x^2}$

7.7 Limit Fungsi Trigonometri

Untuk membuktikan kekontinuan fungsi trigonometri, akan lebih mudah jika kita dapat menghitung limit dari

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

Oleh karena itu, perlu kita hitung terlebih dahulu nilai dari kedua limit di atas. Untuk membuktikan bahwa kedua limit di atas ada, kita menggunakan teorema yang sangat terkenal dalam kalkulus, yaitu Teorema Apit. Meskipun teorema ini sendiri kita berikan tanpa bukti.

Teorema 7.6 (Teorema Apit)

Misalkan f, g dan h fungsi yang terdefinisi pada interval terbuka I yang memuat c kecuali mungkin di c sendiri, sehingga $f(x) \le g(x) \le h(x)$ untuk setiap $x \in I$, $x \neq c$. Jika $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} h(x) = L$, maka $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L$.

Dengan Teorema Apit di atas kita dapat membuktikan limit berikut ini.

Teorema 7.7

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

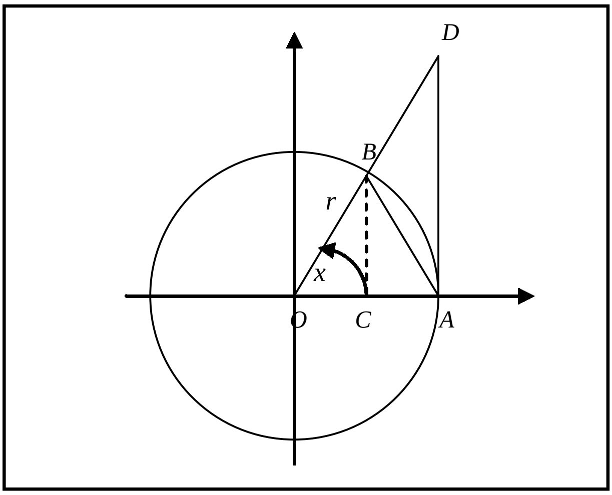
Bukti:

Misalkan lingkaran dengan jari-jari r dan pusat O. Jika juring lingkaran OAB dengan sudut pusat x radian dan $\overset{\frown}{AB}$ adalah panjang busur AB, maka

$$\overset{\frown}{AB} = rx$$

Dari gambar di bawah kita mempunyai

$$\text{luas } OBC < \text{luas } OBA < \text{luas } OAD$$



Gambar 7.15

Akibatnya,

$$\frac{1}{2}BC.OC < \frac{1}{2}.\overset{\frown}{AB}.r < \frac{1}{2}OA.AD \quad \Leftrightarrow \quad BC.OC < \overset{\frown}{AB}.r < OA.AD$$

$$\frac{1}{2}.BC.OC < \frac{1}{2}.\overset{\frown}{AB}.r < \frac{1}{2}OA.AD \quad \Leftrightarrow \quad BC.OC < \overset{\frown}{AB}.r < OA.AD$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{BC.OC}{r^2} < \frac{\overset{\frown}{AB}.r}{r^2} < \frac{OA.AD}{r^2}$$

$$\frac{1}{2}.BC.OC < \frac{1}{2}.\overset{\frown}{AB}.r < \frac{1}{2}OA.AD \quad \Leftrightarrow \frac{BC}{r}\cdot\frac{OC}{r} < \frac{rx\,.\,r}{r^2} < \frac{r\,.\,AD}{r^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BC}{r}\frac{OC}{r} < x < \frac{AD}{r}$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos x < x < \tan x \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

Karena $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$ dan juga $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$, maka dengan Teorema Apit

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{atau} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Selanjutnya dari (*) kita mempunyai

$$\sin x\,.\cos x < x < \tan x \Leftrightarrow \cos^2 x < \frac{x}{\tan x} < 1$$

Karena $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1$, maka dengan Teorema Apit kita mempunyai

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{atau} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

□

Dengan cara yang sama, untuk sembarang bilangan real a kita dapat memperumum teorema di atas menjadi hasil berikut.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1$$

Contoh 7.7.1

Tentukan nilai dari:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x}$

Penyelesaian:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \,.\, 2 = 1 \cdot 2 = 2$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{5x}{\tan 5x} \cdot \frac{2x}{5x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3x}{\tan 5x} \cdot \frac{2}{5}$

$$= \frac{2}{5} \lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{5x}{\tan 5x}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

□

Contoh 7.7.2

Tentukan nilai dari:

a. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x}$

b. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x^3}$

c. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{1}{2}\pi}$

Penyelesaian:

a. Misalkan kita ambil $y = \frac{1}{x}$. Karena $x \to \infty$, maka $y \to 0$.

Jadi,

$$\lim_{x \to \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{y} \sin y = \lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$$

b.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{2x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin x \cos x}{2x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x\,(1 - \cos x)}{2x^3 \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{1}{2} x}{2x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} x}{(\frac{1}{2} x)^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 1 \cdot 1^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

c. Misalkan $y = x - \frac{1}{2}\pi$, sehingga untuk $x \to \frac{1}{2}\pi$ berakibat $y \to 0$.

Jadi,

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \sin x}{x - \frac{1}{2}\pi} = \lim_{y \to 0} \frac{1 - \sin(\frac{1}{2}\pi + y)}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{1 - \cos y}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} y}{y}$$

$$= \lim_{y \to 0} 2 \cdot \frac{\sin^2 \frac{1}{2} y}{(\frac{1}{2} y)^2} \cdot \frac{y}{4} = 2 \cdot 1 \cdot \frac{0}{4} = 0$$

□

Latihan 7.7

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 25, tentukan limit fungsi yang diberikan.

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x}{\sin 3x}$
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$
3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^3 x}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\cos x}$
6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos 2x}$
7. $\lim\limits_{a \to 0} \dfrac{1-\cos a}{a^2}$
8. $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\tan y}{\sin 2y}$
9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin px}{\tan qx}$
10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x + \tan^2 x}{\frac{1}{2}x^2}$
11. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$
12. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x}{1-\cos x}$
13. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$
14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \tan x}{1-\cos 3x}$
15. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left(1 - \cos \dfrac{2}{x}\right)$
16. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \sin 3x}{1-\cos 4x}$
17. $\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \dfrac{4}{x}$
18. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x \sin x + \tan^2 x}{1-\cos x}$
19. $\lim\limits_{x \to 5} (x-5)\cot \pi x$
20. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\sin 2x}$
21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{1-\sin 2x}$
22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x - 2\tan x}{x^2}$
23. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$
24. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{\sin x}$
25. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sqrt{1-x} - 1}$

26. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

    a. $f(x) = \sin x$ c. $f(x) = \sin 3x$

    b. $f(x) = \cos x$ d. $f(x) = \cos 3x$

27. Tentukan $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{h}$ dari fungsi-fungsi pada soal nomor 26.

Rangkuman

1. Limit $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, dituliskan dengan $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika kita dapat membuat nilai $f(x)$ sembarang yang dekat dengan L (sedekat yang kita mau) dengan cara mengambil nilai x yang dekat dengan c, tetapi tidak sama dengan c.
2. Limit kiri $f(x)$ ketika x mendekati c sama dengan L, kita tuliskan dengan $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ jika kita dapat membuat $f(x)$ sembarang dekat dengan L dengan cara mengambil nilai x cukup dekat ke c, dan x lebih kecil daripada c.
3. Jika pada (2) disyaratkan x harus lebih besar daripada c, maka diperoleh limit kanan dari $f(x)$, dan dinotasikan dengan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.
4. $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika $\lim_{x \to c^-} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to c^+} f(x) = L$.
5. Operasi aljabar berlaku perhitungan limit fungsi.
6. Laju perubahan sesaat dari fungsi f di titik c didefinisikan sebagai $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$.
7. Fungsi f dikatakan kontinu di titik c, jika memenuhi ketiga syarat: (1) $f(c)$ ada; (2) $\lim_{x \to c} f(x)$; ada; dan (3) $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.
8. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval terbuka yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Jika untuk x mendekati c tetapi tidak sama dengan c, maka nilai $f(x)$ membesar tanpa batas, dituliskan $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$.
9. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval terbuka yang memuat c, kecuali mungkin di c sendiri. Jika untuk x mendekati c tetapi tidak sama dengan c, maka nilai $f(x)$ mengecil tanpa batas $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.
10. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada sembarang interval $(a, +\infty)$. Jika untuk x positif yang naik besar sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L, dituliskan $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
11. Misalkan f fungsi yang terdefinisi pada setiap interval $(-\infty, b)$. Jika untuk x negatif yang turun kecil sekali, maka nilai $f(x)$ mendekati L, dituliskan $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.
12. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ dan $\lim_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$

Math Info

Augustin-Louis Cauchy
1789 – 1857

Augustin-Louis Cauchy lahir di Paris dan dididik di Ecole Polytechnique. Karena kesehatan yang buruk ia dinasehatkan untuk memusatkan pikiran pada matematika. Selama karirnya, ia menjabat mahaguru di Ecole Polytechnique, Sorbonne, dan College de France. Sumbangan-sumbangan matematisnya cemerlang dan mengejutkan dalam jumlahnya. Produktivitasnya sangat hebat sehingga Academy Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah untuk mengatasi keluaran dari Cauchy.

Gambar 7.16 Augustin-Louis Cauchy
Sumber: www.sci.hkbu.edu.hk

Cauchy seorang pemeluk Katolik saleh dan pengikut Raja yang patuh. Dengan menolak bersumpah setia kepada pemerintah Perancis yang berkuasa dalam tahun 1830, ia mengasingkan diri ke Italia untuk beberapa tahun dan mengajar di beberapa institut keagamaan di Paris sampai sumpah kesetiaan dihapuskan setelah revolusi 1848.

Cauchy mempunyai perhatian luas. Ia mencintai puisi dan mengarang suatu naskah dalam ilmu persajakan bahasa Yahudi. Keimanannya dalam beragama mengantarnya. Mensponsori kerja sosial untuk ibu-ibu tanpa nikah dan narapidana.

Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad ke tujuh belas, dasar-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan rekan sebayanya (Gauss, Abel, dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Kepada Cauchy kita berhutang pemikiran pemberian dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit.

Sumber: Kalkulus dan Geometri Analitis, 1988, hal. 43

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Nilai $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$ adalah ....

   A. 0 B. 1/4 C. 1/2 D. 2 E. 4

2. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+5x+6}{x^2-4} = \ldots$.

   A. 1/2 B. 1/4 C. 0 D. –1/4 E. –1/2

3. $\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \ldots$.

   A. –6 B. –4 C. 2 D. 4 E. 6

4. $\lim_{x \to 1} \frac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} = \ldots$.

   A. 0 B. 3 C. 6 D. 12 E. 15

5. $\lim_{x \to -2} \frac{1-\cos(x+2)}{x^2+4x+4} = \ldots$.

   A. 0 B. 1/4 C. 1/2 D. 2 E. 4

6. Jika $\lim_{x \to 4} \frac{ax+b-\sqrt{x}}{x-4} = \frac{3}{4}$, maka $a+b = \ldots$.

   A. 3 B. 2 C. 1 D. –1 E. –2

7. $\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x \cdot \sin^2 8x}{x^2 \sin 4x} = \ldots$.

   A. 32 B. 24 C. 16 D. 8 E. 4

8. $\lim_{x \to 0} \frac{x(\cos^2 6x - 1)}{\sin 3x \cdot \tan^2 2x} = \ldots$.

   A. 3 B. 2 C. –3 D. –2 E. –1

9. Jika $f(x) = 1/2x^2$, maka $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t} = \ldots$.

A. $-1/4x$ B. $-1/x^3$ C. $1/4x^3$ D. $1/4x$ E. $1/x^3$

10. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin\left(1-\frac{1}{x}\right)\cos\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x-1} = \ldots$.

A. 1 B. 1/2 C. 0 D. –1/2 E. –1

11. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{(x+p)(x+q)} - x\right) = \ldots$.

A. 0 B. pq C. $p-q$ D. $\frac{1}{2}(p+q)$ E. $p-q$

12. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x(4x+5)} - \sqrt{4x^2-3}\right) = \ldots$.

A. ∞ B. 8 C. 5/4 D. 1/2 E. 0

13. $\lim\limits_{x \to \infty} x^2\left(\sec\frac{2}{x} - 1\right) = \ldots$.

A. 2 B. 1 C. 0 D. –1 E. –2

14. $\lim\limits_{x \to 3\pi/4} (1+\tan x)\tan 2x = \ldots$.

A. ∞ B. 2 C. 1 D. 0 E. –1

15. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{1}{t}\left(\dfrac{\sin^3 2t}{\cos 2t} + \sin 2t \cos 2t\right) = \ldots$.

A. 0 B. 1/2 C. 1 D. 2 E. ∞

B. ***Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!***

16. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$.

17. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+cx} - 1}{x}$, dengan c kontanta.

18. Carilah bilangan a dan b sehingga $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{ax+b} - 2}{x} = 1$.

19. Jika $\lim\limits_{x \to c} [f(x)+g(x)] = 2$ dan $\lim\limits_{x \to c} [f(x)-g(x)] = 1$, carilah $\lim\limits_{x \to c} f(x)g(x)$.

20. Misalkan f fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, untuk } x \text{ bilangan bulat} \\ 0 & \text{, untuk } x \text{ bukan bilangan bulat} \end{cases}$$

   a. Gambarkan sketsa grafik f.

   b. Untuk nilai c yang mana sehingga $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ ada?

   c. Untuk bilangan yang manakah f kontinu?

Soal Analisis

1. Simpangan sebuah partikel yang bergerak sepanjang garis lurus (dalam meter) diberikan oleh persamaan gerak $s = 4t^3 + 6t + 2$, dengan t diukur dalam detik. Tentukan laju partikel pada saat $t = c$, $t = 1$, $t = 2$, dan $t = 3$.

2. Biaya produksi (dalam jutaan rupiah) x unit komoditas tertentu adalah

   $C(x) = 5000 + 10x + 0,05x^2$

   a. Tentukan rerata laju perubahan dari C terhadap x ketika tingkat produksi diubah
      1. dari $x = 100$ sampai $x = 105$
      2. dari $x = 100$ sampai $x = 101$

   a. Tentukan laju perubahan sesaat dari C terhadap x untuk $x = 100$. (Ini disebut biaya marginal, arti pentingnya akan dijelaskan pada Bab 8)

3. Sebuah tangki besar berbentuk tabung berisi 50.000 liter air, yang dapat dikosongkan dari bawah tangki selama satu jam. Hukum Torricelli menyatakan bahwa volume air yang tersisa di dalam tangki setelah t menit adalah

$$V(t) = 50.000\left(1 - \frac{t}{60}\right)^2, \quad 0 \le t \le 60$$

   Tentukan laju aliran air ke luar tangki (laju perubahan sesaat V terhadap t) sebagai fungsi t. Apakah satuannya? Untuk waktu t = 0, 10, 20, 30, 40, 50, dan 60 menit, tentukan laju aliran dan banyknya air yang tersisa dalam tangki. Kapankah laju aliran paling besar? dan kapankah paling kecil?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Limit Fungsi
Kelompok	:	Semester	: 2 (dua)
Kegiatan	: Mengalirkan air dari dispenser		
Tujuan	: Menentukan debit air yang mengalir dari dispenser		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Dispenser
2. Satu galon air mineral (19 liter)
3. Gelas ukur
4. Alat tulis dan komputer
5. Buku catatan
6. Stopwatch

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 siswa.
2. Siapkan galon air pada dispenser, stopwatch dan alat tulis.
3. Alirkan air dari dispenser. Catat banyaknya volume air yang keluar dari dispenser untuk setiap periode waktu 5 menit pada tabel di bawah.

t (menit)	5	10	15	20	25	30
V (liter)						

C. Analisis

1. Buat grafik dari data yang Anda peroleh di atas. Jika mungkin gunakan komputer.
2. Jika $P(t, V)$ adalah titik untuk $t = 15$, carilah kemiringan tali busur PQ apabila Q adalah titik pada grafik dengan $t = 5, 10, 15, 20, 25$, dan 30.
3. Perkirakan kemiringan garis singgung di P dengan merata-rata kemiringan dua tali busur.
4. Gunakan grafik fungsi untuk memperkirakan kemiringan garis singgung di P. Kemiringan ini menyatakan debit air yang mengalir dari dispenser setelah 15 menit.
5. Tafsirkan hasil di atas sebagai notasi limit.

BAB VIII

TURUNAN

Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menghitung turunan fungsi sederhana dengan menggunakan definisi turunan,
2. menentukan turunan fungsi aljabar,
3. menentukan turunan fungsi trigonometri,
4. menggunakan aturan turunan untuk menghitung turunan fungsi aljabar dan trigonometri,
5. menentukan turunan fungsi komposisi dengan aturan rantai,
6. menentukan persamaan garis singgung pada suatu kurva,
7. menggunakan turunan untuk menghitung kecepatan dan percepatan,
8. menggunakan aturan L'Hospital untuk menghitung limit bentuk tak tentu.

Pengantar

Gambar 8.1 Seorang anak melempar bola vertikal ke atas

Sebuah bola dilemparkan vertikal ke atas dari tanah dengan kecepatan awal 80m/ detik. Jika arah positif diambil ke atas, persamaan gerak diberikan oleh

$$s = -16t^2 + 80t$$

Misalkan t menyatakan waktu sejak bola dilemparkan dinyatakan dalam detik, dan s jarak bola dari titik awal dinyatakan dalam meter, pada saat t detik. Berapakah kecepatan dan percepatan sesaat bola setelah 2 detik. Berapakah waktu yang diperlukan bola untuk mencapai titik tertinggi? Dan berapakah waktu dan kecepatan yang diperlukan bola untuk menyentuh tanah kembali?

Pemecahan dari masalah ini erat hubungannya dengan konsep turunan fungsi. Turunan adalah bahasan awal sebelum orang berbicara tentang kalkulus diferensial, yang merupakan pembahasan lanjutan secara mendalam dari limit. Oleh karena itu, sebelum menyelesaikan masalah ini secara khusus, sebaiknya kamu harus sudah menguasai bab sebelumnya terutama fungsi, trigonometri, dan limit fungsi.

8.1 Turunan Fungsi

Pada sub-bab 7.2 kita telah pelajari bahwa laju perubahan nilai fungsi $y = f(x)$ terhadap peubah bebas x pada saat $x = c$, yang secara geometri ditafsirkan sebagai kemiringan garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di $P(c, f(c))$ adalah:

$$\text{laju perubahan sesaat} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Faktanya, limit bentuk ini muncul secara meluas dalam bidang kimia, fisika, rekayasa, biologi, dan ekonomi. Mengingat begitu bermanfaatnya, kita beri nama dan notasi khusus bentuk limit ini.

Definisi 8.1 (Turunan fungsi)

f di bilangan *c*, dinotasikan dengan $f'(c)$, didefinisikan sebagai

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \qquad (8.1)$$

jika limit ini ada. Notasi $f'(c)$ dibaca '*f* aksen *c*'.

Jika kita tuliskan $x = c + h$, maka $h = x - c$ dan "$h \to 0$" setara dengan "$x \to c$". Oleh karena itu, definisi di atas akan setara dengan

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \qquad (8.2)$$

jika limit ini ada. Derivatif adalah sebutan lain untuk turunan.

Contoh 8.1.1

Carilah turunan fungsi $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ di bilangan *c*.

Penyelesaian:

Dari Definisi 8.1 kita mempunyai

$$\begin{aligned}
f'(c) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{[3(c+h)^2 - 5(c+h) + 2] - [3c^2 - 5c + 2]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3c^2 + 6ch + 3h^2 - 5c - 5h + 2 - 3c^2 + 5c - 2]}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{6ch + 3h^2 - 5h}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} 6c + 3h - 5 \\
&= 6c - 5
\end{aligned}$$

Jadi, turunan fungsi $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ di bilangan *c* adalah $f'(c) = 6c - 5$.

□

Dalam Definisi 8.1 kita memandang turunan suatu fungsi f di bilangan tetap c. Selanjutnya, jika kita biarkan bilangan c berubah-ubah menjadi peubah x, maka kita peroleh:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada. Dalam hal ini kita dapat menganggap f' sebagai fungsi baru, yang disebut turunan dari f.

Contoh 8.1.2

Untuk fungsi $f(x) = 3x^2 + 8$, carilah turunan f di 2 dengan tiga cara:

a. gantikan x dengan 2 dalam $f'(x)$,
b. gunakan rumus (8.1),
c. gunakan rumus (8.2).

Penyelesaian:

a. Dari contoh 8.1.2 (b), diperoleh $f'(x) = 6x$. Oleh karena itu,

$$f'(2) = 12$$

b. Dengan rumus (8.1),

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[3(2+h)^2 + 8] - [2^2 + 8]}{h} = \lim_{h\to 0} 12 + 3h = 12$$

c. Dengan rumus (8.2),

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{(3x^2+8) - (3\cdot 2^2 + 8)}{x-2} = \frac{3(x^2-4)}{x-2} = 3(x+2)$$

Jadi,

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} 3(x+2) = 12$$

□

Penggunaan notasi f' untuk turunan fungsi f diperkenalkan oleh Josep Louis Lagrange (1736 – 1813) seorang matematikawan Perancis. Notasi ini menekankan fungsi f' diturunkan dari fungsi f dan nilainya di x adalah $f'(x)$.

Jika titik (x, y) terletak pada grafik fungsi f, yaitu x memenuhi persamaan $y = f(x)$, maka notasi f' dapat digantikan dengan y' atau $\frac{dy}{dx}$. Notasi ini diperkenalkan pertama kali oleh matematikawan Jerman bernama Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Dua notasi lain untuk turunan suatu fungsi f adalah

$$\frac{d}{dx}[f(x)] \text{ dan } D_x[f(x)]$$

Contoh 8.1.3

Jika diketahui $y = \frac{2-x}{3+x}$, tentukan $\frac{dy}{dx}$.

Penyelesaian:

Dalam hal ini, $y = f(x)$ dengan $f(x) = \dfrac{2-x}{3+x}$,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{2-x-h}{3+x+h} - \dfrac{2-x}{3+x}}{h}$$

$$= \frac{(2-x-h)(3+x)-(3+x+h)(2-x)}{h(3+x+h)(3+x)}$$

$$= \frac{(6-x-xh-3h-x^2)-(6-x-xh+2h-x^2)}{h(3+x+h)(3+x)}$$

$$= \frac{-5h}{h(3+x+h)(3+x)} = \frac{-5}{(3+x+h)(3+x)}$$

Jadi,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-5}{(3+x+h)(3+x)} = \frac{-5}{(3+x)^2}.$$

□

Contoh 8.1.4 (Pengayaan)

Diketahui $f(x) = |x|$.

a. Tunjukkan bahwa f tidak mempunyai turunan di $x = 0$.
b. Gambarkan sketsa grafik f.

Penyelesaian:

a. Dengan rumus (8.2),

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

Tetapi untuk $x > 0$,

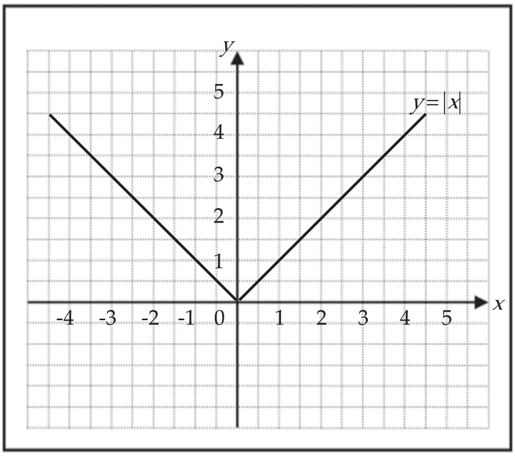
$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

sedangkan untuk $x < 0$,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

Karena limit kanan tidak sama dengan limit kiri, maka kita simpulkan bahwa $f'(0)$ tidak ada. Namun demikian, fungsi f kontinu di $x = 0$, karena $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$.

b. Grafik $y = f(x)$,



Gambar 8.2 Grafik fungsi $y = |x|$

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk mencari titik-titik dimana fungsi $f(x) = |x-1| + |x+2|$ mempunyai turunan. Kemudian berikan rumus untuk $f\,'$, dan buatlah sketsa grafik f.

Secara umum, jika fungsi mempunyai grafik di titik c bersifat patah (lancip), maka di titik tersebut f tidak mempunyai turunan. Lihat Gambar 8.1 di titik $x = 0$. Dari Contoh 8.1.5 dan 8.1.6, dapat kita simpulkan bahwa kekontinuan fungsi tidak menjamin eksistensi turunan dari f. Akan tetapi eksistensi turunan di suatu titik akan mengakibatkan kekontinuan di titik tersebut. Sebagaimana tertuang dalam teorema berikut.

Teorema 8.1

Jika fungsi f mempunyai turunan di c, maka f kontinu di c.

Bukti:

Untuk $h \neq 0$,

$$\lim_{h\to 0} [f(c+h) - f(c)] = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \;=\; f\,'(c)\cdot 0 = 0$$

Jadi, $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ yang mengatakan bahwa f kontinu di c. □

Contoh 8.1.5 (Pengayaan)

Tentukan nilai a dan b agar fungsi f mempunyai turunan di $x = 1$, jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{untuk } x < 1 \\ ax + b & , \text{untuk } x \geq 1 \end{cases}$$

Penyelesaian:

Agar f mempunyai turunan di $x = 1$, maka f harus kontinu di $x = 1$. Fungsi f kontinu di $x = 1$ apabila $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

Khususnya,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x \to 1^+} x^2 = a + b$$

$$\Leftrightarrow 1 = a + b \qquad (8.3)$$

Di pihak lain, f mempunyai turunan di $x = 1$, jika $f'(1^+) = f'(1^-)$. Dengan rumus (8.2),

$$f'(1^+) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{(ax + b) - (a + b)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{a(x-1)}{x-1} = a \qquad (8.4)$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - (a + b)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2 \quad \text{(dari (8.3))} \qquad (8.5)$$

Dari (8.4) dan (8.5), kita peroleh $a = 2$. Dari $a = 2$ kita subtitusikan ke (8.3) kita peroleh $b = 3$.

Latihan 8.1

1. Tentukan $f'(c)$ untuk setiap fungsi yang diberikan.

   a. $f(x) = 1 + x - 3x^2$

   b. $f(x) = 3x^3 + x$

   c. $f(x) = \dfrac{x}{2x - 3}$

   d. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

   e. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$

   f. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{2 - x}}$

2. Setiap limit menyatakan turunan suatu fungsi f di suatu bilangan c. Nyatakan f dan c untuk setiap kasus.

   a. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

   b. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

   c. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^8 - 1}{x - 1}$

   d. $\lim\limits_{x \to 3\pi} \dfrac{\cos x + 1}{x - 3\pi}$

   e. $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - 1}{t}$

   f. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^x - 1}{x}$

3. Carilah turunan dari setiap fungsi yang diberikan, dan nyatakan daerah asal fungsi dan daerah asal turunannya.

a. $f(x) = 5x - 8$
b. $f(x) = x^3 - x^2 + 5x$
c. $f(x) = x + \sqrt{x}$
d. $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$
e. $f(x) = \dfrac{3x-4}{x-3}$
f. $f(x) = \sqrt{1+3x}$

4. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ dari setiap persamaan yang diberikan.

a. $y = \dfrac{4}{x^2} + 3x$
b. $y = \dfrac{2}{x-3}$
c. $y = \sqrt{2-7x}$
d. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

Soal nomor 5 dan 6 adalah soal-soal pengayaan.

5. Diketahui $f(x) = \begin{cases} x-2, \text{ untuk } x \geq 2 \\ 2-x, \text{ untuk } x < 2 \end{cases}$. Tunjukkan bahwa $f'(2)$ tidak ada. Gambarkan grafiknya.

6. Tentukan nilai *a* dan *b* agar fungsi *f* mempunyai turunan di $x = 2$, jika

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & , \text{ untuk } x < 2 \\ 2x^2 - 1 & , \text{ untuk } x \geq 2 \end{cases}$$

8.2 Teorema Turunan Fungsi Aljabar

Dalam bagian sebelumnya kita telah membahas bersama bagaimana proses penurunan (diferensiasi) fungsi dengan definisi langsung. Akan tetapi proses ini terlalu panjang, berikut ini akan kita pelajari teorema-teorema yang memberi kemudahan kepada kita untuk deferensiasi.

Teorema 8.2

Jika fungsi $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$.

Bukti:

Langsung dari definisi,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

Jadi, turunan fungsi konstan adalah nol. □

Teorema 8.3

Jika n bilangan asli dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.

Bukti:

Disini kita perlu menguraikan $(x+h)^2$ dengan menggunakan Teorema Binomial,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \ldots + h^n) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (nx^{n-1} + \tfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1})$$

$$= nx^{n-1}$$

karena semua suku, kecuali yang pertama, mempunyai faktor h dan akibatnya mendekati 0.

□

Meskipun tidak dibuktikan di sini, faktanya Teorema 8.3 masih berlaku apabila n bilangan rasional.

Contoh 8.2.1

Tentukan $f'(x)$ jika:

a. $f(x) = x^7$

b. $f(x) = 5x^{10}$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

d. $f(x) = \dfrac{4}{x^6}$

e. $f(x) = 2\sqrt{x}$

f. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

Penyelesaian:

Dengan Teorema 8.3,

a. $f(x) = x^7$

$f'(x) = 7x^{7-1} = 7x^6$

b. $f(x) = 5x^{10}$

$f'(x) = 10 \cdot 5x^{10-1} = 50x^9$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = (-2)x^{-2-1} = -2x^{-3} = -2/x^3$

d. $f(x) = \dfrac{4}{x^6} = 4x^{-6}$

$f'(x) = (-6) \cdot 4x^{-6-1} = -24x^{-7} = -24/x^7$

e. $f(x) = 2\sqrt{x} = 2x^{1/2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 2x^{1/2-1} = x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$

f. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

□

Teorema 8.4

Misalkan u suatu fungsi, k konstanta, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = ku(x)$. Jika u mempunyai turunan, maka

$$f'(x) = ku'(x)$$

Bukti:

Dari Definisi 8.1,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ku(x+h)-ku(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} k\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= k\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= ku'(x) \end{aligned}$$

□

Sebagai contoh sederhana, jika $f(x) = 8\ x^5$, maka

$$f'(x) = 5 \cdot 8x^4 = 40x^4$$

Teorema 8.5

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = u(x) + v(x)$. Jika u dan v mempunyai turunan, maka

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

Bukti:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)-u(x)]\ +\ [v(x+h)-v(x)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \\ &= u'(x)+v'(x) \end{aligned}$$

□

Hasil teorema itu dapat diperluas ke sejumlah berhingga fungsi. Khususnya, jika fungsi itu adalah sukubanyak, maka kita tinggal menurunkan masing-masing sukunya.

Contoh 8.2.2

Tentukan $f'(x)$, jika $f(x) = 7x^5 - 3x^4 - 8x^2 + 5$.

Penyelesaian:

Sebagai akibat dari Teorema 8.5,

$$f'(x) = 7.5x^4 - 3.4x^3 - 8.2x + 0 = 35x^4 - 12x^3 - 16x$$

□

Contoh 8.2.3

Tentukan $f'(2)$ jika $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{x^3}$.

Penyelesaian:

Kita tuliskan $f(x) = \frac{x^3}{3} + 3x^{-3}$, sehingga

$$f'(x) = \tfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + (-3)x^{-4} = x^2 - 9x^{-4} = x^2 - \frac{9}{x^4}$$

Jadi, $f'(2) = 2^2 - \frac{9}{2^4} = 4 - \frac{9}{16} = \frac{55}{16}$.

□

Teorema 8.6

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = u(x)\,v(x)$. Jika u dan v mempunyai turunan, maka

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Bukti:

Karena v mempunyai turunan di x, maka menurut Teorema 8.1, v kontinu di x, yaitu

$$\lim_{h \to 0} v(x+h) = v(x)$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x+h) + u(x)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot v(x+h) + u(x) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right) \\
&= u'(x)v(x) + u(x)v'(x)
\end{aligned}$$

□

Contoh 8.2.4

Tentukan $f'(x)$ jika $f(x) = (2x^3 - 4x^2)(x^5 + 3x^2)$.

Penyelesaian:

Dalam hal in $f(x) = u(x)v(x)$, dengan $u(x) = (2x^3 - 4x^2)$ dan $v(x) = x^5 + 3x^2$,

$$u(x) = (2x^3 - 4x^2) \longrightarrow u'(x) = 6x^2 - 8x$$

$$v(x) = x^5 + 3x^2 \longrightarrow v'(x) = 5x^4 + 6x$$

Jadi,

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (6x^2 - 8x)(x^5 + 3x^2) + (2x^3 - 4x^2)(5x^4 + 6x) \\ &= (6x^7 - 8x^6 + 18x^4 - 24x^3) + (10x^7 - 20x^6 + 12x^4 - 24x^3) \\ &= 16x^7 - 28x^6 + 30x^4 - 48x^3. \end{aligned}$$

□

Tugas Kelompok

Diskusikan dengan kelompok Anda untuk membuktikan bahwa jika f, g, dan h mempunyai turunan, maka

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Teorema 8.7

Misalkan u dan v dua fungsi, dan f fungsi yang didefinisikan oleh

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}, \; v(x) \neq 0$$

Jika u dan v mempunyai turunan, maka

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

Bukti:

Karena v mempunyai turunan di x, maka menurut Teorema 8.1 v kontinu di x. Tetapi $v(x) \neq 0$, sehingga

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{v(x+h)} = \frac{1}{v(x)}$$

Dari definisi turunan di x,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \cdot \frac{v(x)}{v(x+h)v(x)} - \frac{u(x)}{v(x+h)v(x)} \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right)$$

$$= u'(x) \frac{v(x)}{v^2(x)} - \frac{u(x)}{v^2(x)} v'(x)$$

$$= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

□

Contoh 8.2.5

Tentukan y' untuk $y = \dfrac{2x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4}$.

Penyelesaian:

$$y = \frac{2x^2 + 5x - 6}{x^2 + 4} \Rightarrow u = 2x^2 + 5x^2 - 6 \to u' = 4x + 5$$

$$v = x^2 + 4 \qquad \to v' = 2x$$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$= \frac{(4x+5)(x^2+4) - (2x^2 + 5x - 6)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 5x^2 + 16x + 20 - 4x^2 \; 10x^2 + 12x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 + 28x + 20}{(x^2+4)^2}$$

□

Tugas Mandiri

Jika $f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$, tunjukkan bahwa

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

Selanjutnya, jika kita mempunyai fungsi

$$f(x) = (5x^2+1)^3$$

maka kita dapat memperoleh $f'(x)$ dengan menerapkan Teorema 8.6 dua kali, yaitu dengan menuliskan lebih dulu $f(x) = (5x^2+1)^2(5x^2+1)$. Perhitungannya sebagai berikut

$$\begin{aligned} f'(x) &= (5x^2+1)^2 \cdot D_x(5x^2+1) + (5x^2+1) \cdot D_x[(5x^2+1)(5x^2+1)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + (5x^2+1)[(5x^2+1)(10x) + (5x^2+1)(10x)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + (5x^2+1)[2(5x^2+1)(10x)] \\ &= (5x^2+1)^2(10x) + 2[(5x^2+1)^2(10x)] \end{aligned}$$

Jadi,

$$f'(x) = 3(5x^2+1)^2(10x) \tag{8.6}$$

Dari ilustrasi di atas jika kita ambil $u(x) = x^3$ dan $v(x) = 5x^2+1$, maka *f* adalah fungsi komposisi $u \circ v$, sehingga

$$\begin{aligned} f(x) &= u(v(x)) \\ &= u(5x^2+1) \\ &= (5x^2+1)^3 \end{aligned}$$

Karena $u'(x) = 3x^2$ dan $v'(x) = 10x$, kita dapat menuliskan (8.6) dalam bentuk

$$f'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

Secara umum, hasil ini benar untuk sembarang komposisi dua fungsi yang mempunyai turunan. Aturan diferensiasi seperti ini sering kita kenal dengan aturan rantai.

Teorema 8.8 (Aturan Rantai)
Jika fungsi v mempunyai turunan di x dan u mempunyai turunan di $v(x)$, maka fungsi komposisi $u \circ v$ mempunyai turunan di x, dan

$$(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$$

Contoh 8.2.6

Tentukan $f'(x)$ apabila $f(x) = (2x+1)^5$.

Penyelesaian:

Fungsi f dapat kita anggap sebagai komposisi fungsi dari u dan v,

$$f(x) = (2x+1)^5 = (u \circ v)(x) = u(v(x))$$

dengan $u(x) = x^5$ dan $v(x) = (2x+1)$. Dengan aturan rantai,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x) \\ &= 5(2x+1)^4 .(2x) \\ &= 10x(2x+1)^4 \end{aligned}$$

□

Tugas Mandiri

1. Carilah $f'(x)$ jika diketahui bahwa $\frac{d}{dx}[f(2x)] = x^2$.
2. Misalkan fungsi f mempunyai turunan sehingga $f(g(x)) = x$ dengan $f'(x) = 1 + [f(x)]^2$.

   Tunjukkan bahwa $g'(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$.

Turunan Tingkat Tinggi

Jika f' adalah turunan fungsi f, maka f' juga merupakan fungsi. Fungsi f' adalah turunan pertama dari f. Jika turunan dari f' ada, turunan ini disebut turunan kedua dari f, dinotasikan dengan f'' atau y'' atau $\frac{d^2 f}{dx}$ atau $\frac{d^2 y}{dx^2}$. Dengan cara yang sama, turunan ketiga dari f didefinisikan sebagai turunan pertama dari f'', dan dinotasikan dengan

$$f''' \text{ atau } y''' \text{ atau } \frac{d^3 f}{dx^3} \text{ atau } \frac{d^3 y}{dx^3}$$

Secara umum, turunan ke-n dari fungsi f, ditulis $f^{(n)}$, adalah turunan pertama dari turunan ke-(n–1) dari f, dengan n bilangan asli yang lebih besar dari 1. Simbol lain untuk turunan ke-n dari f adalah

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \quad \text{dan} \quad D_x^n[f(x)]$$

Contoh 8.2.7

Tentukan semua turunan dari fungsi f yang diberikan oleh

$$f(x) = 5x^4 + 4x^3 - x^2 + 9$$

Penyelesaian:

$$f'(x) = 20x^3 + 12x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 60x^2 + 24x - 2$$

$$f'''(x) = 120x + 24$$

$$f^{(4)}(x) = 120$$

$$f^{(n)}(x) = 0, \quad n \geq 5$$

□

Latihan 8.2

1. Tentukan $f'(x)$ untuk setiap fungsi yang diberikan.
   a. $f(x) = 4x^4 + 4x^2 + 1$
   b. $f(x) = 1 - 2x - x^3$
   c. $f(x) = x^7 - 4x^5 + 2x^3 + 7x$
   d. $f(x) = x^2 + 3x + 1/x^2$
   e. $f(x) = x^4 - 7 + x^{-2} + x^{-4}$
   f. $f(x) = (3x^2 + 4)^2$
   g. $f(x) = (2x^2 + 3)(5x - 8)$
   h. $f(x) = (5x^4 - 3)(2x^3 + 6x)$
   i. $f(x) = (x^3 - 2x + 3)(3x^2 + 2x)$
   j. $f(x) = 9\sqrt[3]{x^2}$
   k. $f(x) = 2\sqrt{x} + 5/\sqrt{x}$
   l. $f(x) = 3x^{2/3} - x^{-1/3}$
   m. $f(x) = \dfrac{2x}{x+4}$
   n. $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$
   o. $f(x) = \dfrac{x^3 + 8}{x^3 - 8}$

2. Tentukan $\dfrac{dy}{dx}$ untuk setiap y yang diberikan.
   a. $y = (x^2 + 3x + 2)(2x^3 - 1)$
   b. $y = \dfrac{x}{x-2}$
   c. $y = \dfrac{2x+1}{3x+4}$
   d. $y = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x - 2}$
   e. $y = \dfrac{2x}{1 + 5x^2}$
   f. $y = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 5x + 1}{x^4}$
   g. $y = \dfrac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2}$
   h. $y = \dfrac{2x+1}{3x+4}(3x-1)$
   i. $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^3 + 3}(x^2 + 1)$

3. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = (2x+1)^5$ e. $G(x) = (x^3 - 3x^2 + 1)^{-3}$ i. $h(x) = (5-2x^2)^{-\frac{1}{3}}$

b. $g(x) = (x^2 + 4x - 5)^4$ f. $H(x) = \sqrt{1+4x^2}$ j. $F(s) = \sqrt{\dfrac{2s-5}{3s+1}}$

c. $h(t) = (2t^4 - 7t^3 + 2t - 1)^2$ g. $f(t) = \sqrt{1-3t^2}$ k. $G(x) = \sqrt{\dfrac{5x+6}{5x-4}}$

d. $F(z) = (z^2+4)^{-2}$ 28. h. $g(x) = (5-3x)^{\frac{2}{3}}$ l. $H(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$

4. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $\dfrac{d}{dx}[(4x^2+7)^2(2x^3+1)^4]$ d. $\dfrac{d}{dz}(\sqrt{z^2-5}\cdot\sqrt[3]{z^2+3})$

b. $\dfrac{d}{du}[(3u^2+5)^3(3u-1)^2]$ e. $\dfrac{d}{dt}\left[\left(\dfrac{t-7}{t+2}\right)^2\right]$

c. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)$ f. $\dfrac{d}{dy}\left[\left(\dfrac{2y^2+1}{3y^3+1}\right)^2\right]$

5. Tentukan turunan untuk setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{3x^2+x-2}\right)^3$ b. $g(x) = \dfrac{(x^2+3)^3}{(5x-8)^2}$ c. $h(x) = \dfrac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

6. Tentukan turunan pertama dan kedua dari setiap fungsi yang diberikan.

a. $f(x) = x^5 + 2x^3 - x$ d. $F(y) = \sqrt[3]{2y^3+5}$

b. $g(t) = t^3 - t^2 + t$ e. $G(z) = \dfrac{2-\sqrt{z}}{2+\sqrt{z}}$

c. $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

8.3 Turunan Fungsi Trigonometri

Untuk mencari turunan fungsi sinus dan cosinus kita ingat kembali kesamaan trigonometri yang telah kita pelajari bersama, yaitu:

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Teorema 8.9

1. Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$
2. Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$

Bukti:

Di sini kita akan membuktikan teorema yang pertama saja, yang kedua silahkan kalian buktikan sendiri sebagai latihan. Dengan kesamaan trigonometri yang pertama di atas,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \frac{2\cos(x+\frac{1}{2}h)\sin\frac{1}{2}h}{h}\\ &= \frac{\cos(x+\frac{1}{2}h)\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\\ &= \cos(x+\tfrac{1}{2}h)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\cos(x+\tfrac{1}{2}h)\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}h}{\frac{1}{2}h}\\ &= \cos(x+0)\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

□

Dengan menggunakan hasil pada Teorema 8.9 dan turunan hasil bagi dua fungsi, kita peroleh teorema berikut.

Teorema 8.10

1. Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$
2. Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$
3. Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$
4. Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$

Contoh 8.3.1

Tentukan $f'(x)$ dari fungsi-fungsi berikut.

a. $f(x) = 3\cos x - \sin x + 5$

b. $f(x) = x^3 \sin x$

c. $f(x) = 5 \sin x \cos x$

Penyelesaian:

a. $f'(x) = 3.(-\sin x) - \cos x + 0 = -3\sin x - \cos x$

b. Dengan aturan turunan perkalian dua fungsi,

$$f'(x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x$$

c. Dengan aturan turunan perkalian dua fungsi

$$f'(x) = 5\cos x \cos x + 5 \sin x(-\sin x) = 5(\cos^2 x - \sin^2 x) = 5\cos 2x$$

□

Contoh 8.3.2

Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari fungsi yang diberikan

a. $y=\frac{\cos x}{1+2\sin\ x}$ b. $y=(x+\sin x)^5$ c. $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$

Penyelesaian:

a. Dengan aturan turunan pembagian dua fungsi,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(-\sin x)(1+2\sin x)-(\cos x)(2\cos x)}{(1+2\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-2(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(1+2\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-2\cdot 1}{(1+2\sin x)^2}=-\frac{\sin x+2}{(1+2\sin x)^2}$$

b. Dengan aturan rantai, kita peroleh $\frac{dy}{dx}=5(x+\sin\ x)^4(1+\cos\ x)$.

c. Kita tulis $y=\sqrt{1-\cos^2 x}=\left(1-\cos^2 x\right)^{1/2}$. Dengan menerapkan aturan rantai berulang,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\left(1-\cos^2 x\right)^{-1/2}(-2\cos x)(-\sin x)$$

$$=\frac{\sin x\cos x}{(1-\cos^2 x)^{1/2}}$$

$$=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$$

□

Sebagai akibat berlakunya aturan rantai, maka kita mempunyai sifat berikut.

Teorema 8.11

Misalkan $u=u(x)$ fungsi yang mempunyai turunan.

1. Jika $f(x)=\sin\ u$, maka $f'(x)=\cos u\cdot u'(x)$
2. Jika $f(x)=\cos\ u$, maka $f'(x)=-\sin u\cdot u'(x)$

Contoh 8.3.3

Tentukan $f'(x)$ jika

$$f(x)=\sin(3x+5)+\cos(x^2+1)$$

Penyelesaian:

Dengan Aturan Rantai,

$$f'(x)=\sin(3x+5).(3)-\sin(x^2+1).(2x)=3\sin(3x+5)-2x\sin(x^2+1)$$

□

Latihan 8.3

1. Tentukan $f'(x)$ dari setiap fungsi yang diberikan.

   a. $f(x) = 5 \sin x$

   b. $f(x) = \sin x + \tan x$

   c. $f(x) = \sqrt{1 + \cos^2 x}$

   d. $f(x) = \sin^3 x \cos x$

   e. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x}$

   f. $f(x) = \sqrt{\sin x}$

   g. $f(x) = \dfrac{x+3}{\cos x}$

   h. $f(x) = (\sin x + \cos x)^4 x)^{10}$

   i. $f(x) = \sin(x^3 - 2x)$

   j. $f(x) = \cos^2(x^2 + 3)$

2. Hitunglah turunan dari setiap fungsi yang diberikan.

   a. $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}\right)$

   b. $\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\tan z + 1}{\tan z - 1}\right)$

   c. $\dfrac{d}{dx}[(x - \sin x)(x + \cos x)]$

   d. $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{t^2 + t}{\cos(2t+5)}\right)$

   e. $\dfrac{d}{dx}\left[\left(\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}\right)^2\right]$

3. Hitunglah $f'(c)$ untuk nilai c yang ditentukan.

   a. $f(x) = x^2 \tan x$; $c = \pi$

   b. $f(x) = \dfrac{\cos x}{x}$; $c = \pi/2$

   c. $f(x) = \tan x + \sec x$; $c = \pi$

   d. $f(x) = \dfrac{1}{\cot x - 1}$; $c = 3\pi/4$

   e. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$; $c = \pi/4$

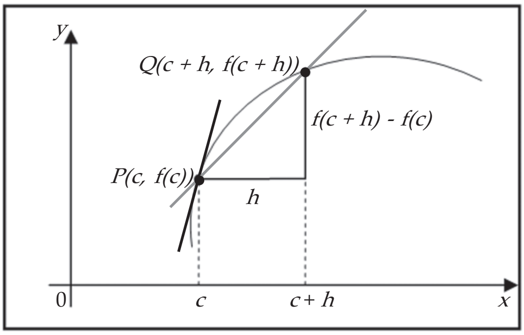
8.4 Persamaan Garis Singgung Kurva

Misalkan y adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain x, sehingga y fungsi dari x, $y = f(x)$. Pada sub-bab 7.2, kita mendefinisikan besarnya laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$ sebagai limit dari rerata laju perubahan,

$$\text{laju perubahan sesaat} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Secara geometri seperti diperlihatkan pada Gambar 8.2, laju perubahan sesaat ditafsirkan sebagai kemiringan atau gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik $P(c, f(c))$, yang besarnya adalah

$$m_{sg} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Gambar 8.3 Kemiringan garis singgung di P = $f'(c)$

Menurut Definisi 8.1, ini sama seperti turunan $f'(c)$. Oleh karena itu, kita dapat mengatakan pengertian berikut ini.

Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(c, f(c))$ adalah garis yang melalui dengan kemiringannya sama dengan $f'(c)$.

Jika kita menggunakan bentuk titik-kemiringan dari persamaan garis, maka garis singgung pada kurva di titik $(c, f(c))$ adalah

$$y - f(c) = f'(c)(x - c)$$

Contoh 8.4.1

Diketahui suatu kurva yang mempunyai persamaan $y = x^3 - 3x + 4$.

a. Periksalah apakah titik (2, 6) terletak pada kurva.
b. Jika titik tersebut terletak pada kurva, tentukan persamaan garis singgung di titik tersebut.
c. Gambarkan kurva y tersebut beserta garis singgung di titik (2, 6).

Penyelesaian:

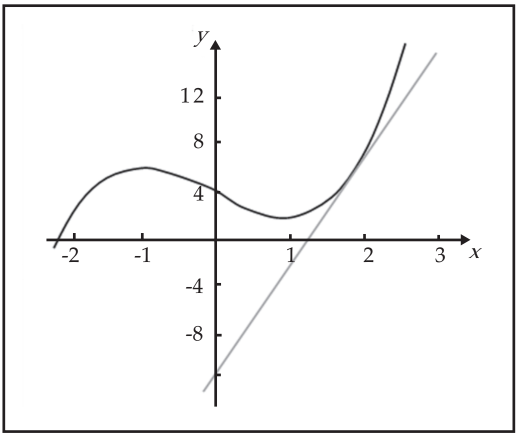
a. Titik (2,6) terletak pada kurva $y = x^3 - 3x + 4$, karena jika kita subtitusikan $x = 2$, maka dipenuhi

$$y = 2^3 - 3(2) + 4 = 6$$

b. Turunan fungsi $f(x) = x^3 - 3x + 4$ adalah $f'(x) = 3x^2 - 3$. Kemiringan garis singgung di (2, 6) adalah $f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$. Jadi, persamaan garis singgung kurva di titik (2, 6) adalah

$$y - 6 = 9(x - 2) \text{ atau } y = 9x - 12$$

c. Grafik kurva dan garis singgungnya adalah



Gambar 8.4

□

Contoh 8.4.2

Carilah persamaan garis singgung pada kurva $y = \sqrt{x-3}$ yang tegak lurus garis $6x + 3y - 4 = 0$.

Penyelesaian:

Jika (x, y) titik singgung pada kurva, maka kemiringan garis singgung di titik itu adalah

$$m_1 = y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

Garis $6x + 3y - 4 = 0$ dapat dituliskan dengan $y = -2x + \frac{4}{3}$, sehingga kemiringan garis ini adalah $m_2 = -2$. Dua garis saling tegak lurus jika

$$m_1\, m_2 = -1 \Leftrightarrow m_1(-2) = -1$$
$$\Leftrightarrow m_1 = \frac{1}{2}$$

Oleh karena itu,

$$m_1 = y' = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{x-3} = 1$$
$$\Leftrightarrow x - 3 = 1$$
$$\Leftrightarrow x = 4$$

Subtitusi untuk $x = 4$, memberikan $y = \sqrt{4-3} = 1$. Jadi, koordinat titik singgung adalah (4, 1), dan persamaan garis singgungnya adalah

$$y - 1 = \frac{1}{2}(x - 4) \text{ atau } y = \frac{1}{2}x - 1$$

□

Latihan 8.4

1. Carilah persamaan garis singgung kurva yang diberikan oleh persamaan berikut di titik yang ditentukan.

   a. $y = 2x^2 - 1$ di $(4, 31)$

   b $y = 2x^4 - x^2$ di $\left(-1/2, -1/8\right)$

   c. $y = \dfrac{10}{14 - x^2}$ di $(4, -5)$

   d. $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ di $(2, 1)$

2. Tentukan persamaan garis singgung:
   a. pada kurva $y = x^2 - 5x + 1$, di titik yang absisnya -1
   b. pada kurva $y = x^4 - 7x^2 + x$, di titik yang absisnya 0
   c. pada kurva $y = x^3 + 5x^2 - 1$, di titik yang ordinatnya 5
   d. pada kurva $y = 2x^4$, di titik yang ordinatnya $1/8$

3. Carilah persamaan garis singgung kurva yang diberikan oleh persamaan berikut di titik yang ditentukan.

   a. $y = (x^2 - 1)^2$ di $(-2, 9)$.

   b. $y = \sqrt{x^2 + 9}$ di $(4, 5)$.

   c. $y = x\sqrt{x^2 + 16}$ di $O(0, 0)$

   d. $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$ di titik dengan $x = \pi/4$

4. Garis normal di titik pada kurva adalah garis yang tegak lurus dengan garis singgung kurva di titik tersebut. Tentukan persamaan garis normal kurva pada soal nomor 3.

5. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 3x^2 - 4x$ yang sejajar garis $2x - y + 3 = 0$.

6. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^4 - 6x$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 6 = 0$.

7. Tentukan persamaan garis normal kurva $y = x^3 - 4x$ yang sejajar garis $x + 8y - 8 = 0$.

8. Tentukan persamaan garis yang melalui titik (4, 13) dan menyinggung kurva $y = 2x^2 - 1$.

9. Diketahui kurva $y = x + 1/x$, A adalah titik pada kurva yang absisnya $1/2$. Misalkan garis singgung di A memotong sumbu-x di P dan memotong sumbu-y di Q. Hitunglah panjang ruas garis PQ.

10. Jika garis singgung pada kurva $y^2 = 6x$ di titik P membentuk sudut 45° dengan sumbu-x positif, tentukan koordinat titik P.

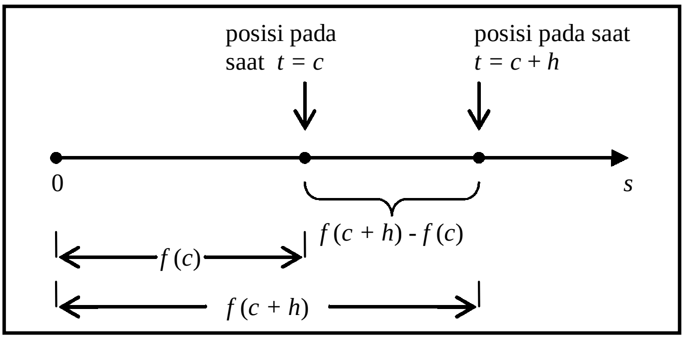
8.5 Kecepatan dan Percepatan

Pada sub-bab sebelumnya, jika $y = f(x)$ adalah suatu besaran yang bergantung pada besaran lain x, maka

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

mendefinisikan besarnya laju perubahan sesaat y terhadap x saat $x = c$. Secara khusus, jika $s = f(t)$ menyatakan persamaan gerak dari suatu benda sepanjang garis lurus sesuai, dengan s adalah perpindahan atau jarak langsung benda dari titik awal pada waktu t. Fungsi f yang menggambarkan gerakan disebut fungsi posisi benda. Pada selang waktu dari $t = c$ sampai dengan $t = c + h$ perubahan posisi adalah $f(c+h) - f(c)$ (lihat gambar 8.5). Kecepatan rerata pada selang waktu ini adalah

$$\text{kecepatan rata-rata} = \frac{\text{perpindahan}}{\text{waktu}} = \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$



Gambar 8.5

Misalkan kita hitung kecepatan rerata selama selang waktu yang semakin pendek $[c, c+h]$. Dengan kata lain, kita ambil h mendekati 0. Selanjutnya kita definisikan kecepatan atau kecepatan sesaat $v(c)$ pada saat $t = c$ sebagai limit kecepatan rerata ini:

$$v(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Tampak bahwa jika limit ini ada, maka limit ini tidak lain adalah $f'(c)$. Dengan kata lain, $f'(c)$ secara fisis memberi tafsiran kecepatan sesaat gerak benda pada saat $t = c$. Sedangkan, laju sesaat gerak benda didefinisikan sebagai nilai mutlak besarnya kecepatan sesaat. Dengan kata lain, laju adalah $|v|$.

Kecepatan sesaat mungkin bernilai positif atau negatif, tergantung pada apakah benda bergerak dalam arah positif atau negatif. Jika kecepatan sesaat sama dengan nol, maka benda berada dalam keadaan diam.

Di dalam fisika, laju perubahan sesaat dari kecepatan disebut percepatan sesaat. Oleh karena itu, jika suatu benda bergerak sepanjang garis lurus menurut persamaan gerak $s = f(t)$, dengan kecepatan sesaat pada t detik adalah v cm/detik, dan percepatan sesaat pada t detik adalah a cm/detik, maka a adalah turunan pertama dari v terhadap t, atau turunan kedua dari s terhadap t. Jadi,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Dari definisi ini kita dapat menyimpulkan bahwa: jika $a > 0$, maka v bertambah, dan jika $a < 0$, maka v berkurang. Jika $a = 0$, maka v tak berubah. Karena laju benda pada t detik adalah $|v|$ maka kita peroleh hasil berikut.

1. Jika $v \geq 0$ dan $a > 0$, maka laju bertambah.
2. Jika $v \geq 0$ dan $a < 0$, laju berkurang.
3. Jika $v \leq 0$ dan $a > 0$, maka laju berkurang.
4. Jika $v \leq 0$ dan $a < 0$, maka laju bertambah.

Contoh 8.5.1

Suatu benda bergerak sepanjang garis mendatar mengikuti persamaan

$$s = t^3 - 6t^2 + 9t + 4$$

dengan s diukur dalam sentimeter dan t dalam detik. Dari persamaan gerak itu, tentukan:

a. kecepatan dan percepatannya dalam t
b. interval waktu saat benda bergerak ke kanan dan saat benda bergerak ke kiri
c. saat benda berbalik arah

Penyelesaian:

Dari persamaan gerak yang diberikan kita peroleh

$$v = \frac{ds}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 \text{ dan } a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned} v = 3t^2 - 12t + 9 = 0 &\Leftrightarrow 3(t-1)(t-3) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \text{ atau } t = 3 \end{aligned}$$

dan

$$a = 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Kita tentukan nilai dari s, v dan a untuk $t = 1, 2, 3$. Juga kita tunjukkan tanda dari s, v dan a di dalam interval dari t di sekitar titik-titik itu. Hasilnya kita berikan dalam tabel 8.1.

Tabel 8.1

	s	v	a	Kesimpulan
$t < 1$	+	+	–	Benda berada di kanan titik asal, dan bergerak ke kanan. Kecepatan berkurang. Laju berkurang.
$t = 1$	8	0	–12	Benda berada8 cm di kanan titik asal, dan geraknya berbalik arah dari kanan ke kiri. Kecepatan berkurang. Laju berkurang.
$1 < t < 2$	+	–	–	Benda berada di kanan titik asal, dan bergerak ke kiri. Kecepatan berkurang. Laju bertambah.
$t = 2$	6	–3	0	Benda berada 6 cm di kanan titik asal, dan bergerak ke kiri dengan kecepatan –3 cm/detik. Kecepatan tetap. Laju tetap.
$2 < t < 3$	+	–	+	Benda berada di kanan titik asal, dan bergerak ke kiri. Kecepatan bertambah. Laju berkurang.
$t = 3$	4	0	6	Benda berada 4 cm di kanan titik asal, dan geraknya berbalik arah dari kiri ke kanan. Kecepatan bertambah. Laju bertambah.
$3 < t$	+	+	+	Benda berada di kanan titik asal, dan bergerak ke kanan. Kecepatan bertambah. Laju bertambah.

a. Dari persamaan gerak di atas diperoleh kecepatan sesaat adalah

$$v = 3t^2 - 12t + 9$$

dan percepatan sesaat adalah

$$a = 6t - 12$$

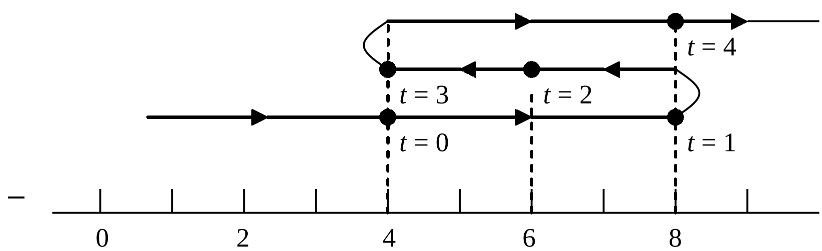
b. Benda diam ketika $v = 0$, yaitu ketika $t = 1$ dan $t = 3$ detik. Benda bergerak ke kanan apabila v positif, dan sebaliknya benda bergerak ke kiri apabila v negatif. Menurut Tabel 8.1, benda bergerak ke kanan untuk $0 < t < 1$ atau $t > 3$, dan benda bergerak ke kiri ketika $1 < t < 2$ atau $2 < t < 3$.

c. Dari tabel 8.1 juga dapat kita simpulkan bahwa benda geraknya berbalik arah dari kanan ke kiri ketika $t = 1$ detik, dan benda geraknya berbalik arah dari kiri ke kanan ketika $t = 3$ detik.

Gerak benda ditunjukkan dalam gambar 8.6 adalah sepanjang garis mendatar, tetapi kelakuan geraknya ditunjukkan di atas garis itu untuk beberapa nilai t tertentu.

Tabel 8.2

t	s	v
0	4	9
1	8	0
2	6	-3
3	4	0
4	8	9



Gambar 8.6 Gerak benda

□

Setelah kita dapat menafsirkan secara fisis tentang turunan fungsi di suatu titik, saatnya kita menyelesaikan masalah yang diuangkapkan pada awal bab yang diberikan dalam contoh berikut.

Contoh 8.5.2

Sebuah bola dilemparkan vertikal ke atas dari tanah dengan kecepatan awal 80m/detik. Jika arah positif diambil ke atas, persamaan gerak adalah

$$s = -16t^2 + 80t$$

Misalkan t menyatakan waktu sejak bola dilemparkan dinyatakan dalam detik, dan s jarak bola dari titik awal dinyatakan dalam meter, pada saat t detik. Tentukan:

a. kecepatan dan percepatan sesaat bola setelah 2 detik
b. waktu yang diperlukan bola untuk mencapai titik tertinggi
c. waktu dan kecepatan yang diperlukan bola untuk menyentuh tanah kembali

Penyelesaian:

Misalkan $v(t)$ dan $a(t)$ masing-masing adalah kecepatan sesaat dan percepatan sesaat bola pada t detik,

$$v(t) = -32t + 80 \quad \text{dan} \quad a(t) = -32$$

a. Dari rumus v,

$$v(2) = -32(2) + 80 = 16$$

sehingga setelah 2 detik bola naik dengan kecepatan sesaat 16 meter/detik. Sedangkan $a(2) = -32$, sehingga setelah dua detik percepatan adalah -32 meter/detik^2.

b. Bola mencapai titik tertinggi apabila $v(t) = 0$,

$$-32t + 80 = 0 \Leftrightarrow t = 2{,}5$$

Jadi, waktu yang diperlukan untuk mencapai titik tertinggi adalah 2,5 detik.

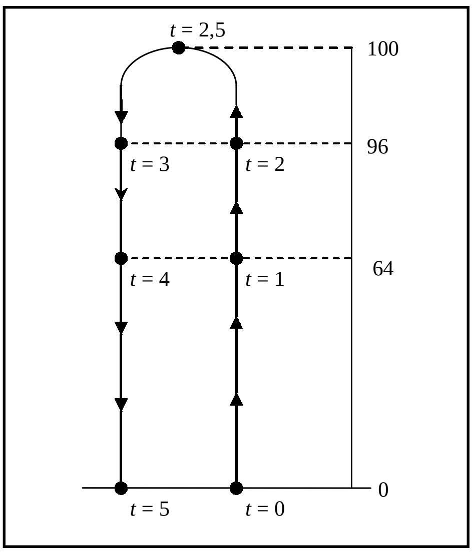
c. Bola menyentuh tanah kembali apabila $s = 0$,

$$\begin{aligned} s = 0 &\Leftrightarrow -16t^2 + 80t = 0 \\ &\Leftrightarrow 16t(5 - t) = 0 \\ &\Leftrightarrow t = 0 \text{ atau } t = 5 \end{aligned}$$

Jadi, waktu yang diperlukan untuk menyentuh tanah kembali adalah 5 detik, dengan kecepatan sesaat $v(5) = -32(5) + 80 = -80$ meter/detik. Tanda (–) negatif menunjukkan bahwa arah bola jatuh dari atas ke bawah.

Tabel 8.3

t	s	v
0	0	80
1	64	48
2	96	16
2,5	100	0
3	96	-16
4	64	-48
5	0	-80



Gambar 8.7

Dalam ekonomi, jika $C(x)$ menyatakan biaya total yang dikeluarkan perusahaan untuk menghasilkan x satuan barang tertentu, maka C disebut fungsi biaya. Laju perubahan sesaat biaya terhadap banyaknya barang yang dihasilkan, dC/dx, oleh para ekonom disebut biaya marginal.

Contoh 8.5.3

Suatu perusahaan telah menaksir bahwa biaya (dalam ribuan rupiah) memproduksi x barang adalah

$$C(x) = 10.000 + 5x + 0,01x^2$$

a. Tentukan fungsi biaya marginal.

b. Carilah $C'(500)$ dan jelaskan maknanya. Apa yang diperkirakannya?

c. Bandingkan $C'(500)$ dengan biaya memproduksi barang ke-501.

Penyelesaian:

a. Fungsi biaya marginal adalah

$$\frac{dC}{dx} = C'(x) = 5 + 0,02x$$

b. Biaya marginal pada tingkat produksi sebanyak 500 barang adalah

$$C'(500) = 5 + 0,02(500) = 15 \text{ ribu/barang}$$

Ini memberikan laju pada saat biaya bertambah besar terhadap tingkat produksi pada waktu $x = 500$, dan memperkirakan biaya barang ke-501.

c. Biaya memproduksi sebenarnya dari barang ke-501adalah

$$\begin{aligned} C(501) - C(500) &= [10.000 + 5(501) + 0,01(501)^2] - [10.000 + 5(500) + 0,01(500)^2] \\ &= 15,01 \text{ ribu} \end{aligned}$$

Tampak bahwa $C'(500) \approx C(501) - C(500)$.

□

Latihan 8.5

1. Suatu benda bergerak sepanjang garis mendatar menuruti persamaan yang diberikan, di mana s cm adalah jarak berarah benda dari suatu titik tetap pada t detik. Untuk setiap persamaan gerak benda berikut, tentukan kecepatan sesaat $v(t_1)$ dan percepatan sesaat $a(t_1)$ untuk t_1 yang diberikan.

   a. $s = 3t^2 + 1;\ t_1 = 3$

   b. $s = 2t^3 - t^2 + 5;\ t_1 = -1$

   c. $s = \dfrac{2t}{4 + t};\ t_1 = 0$

   d. $s = s = \dfrac{1}{t} + \dfrac{3}{t^2};\ t_1 = 2.$

2. Suatu benda bergerak sepanjang garis mendatar menuruti persamaan yang diberikan, di mana s cm adalah jarak berarah pertikel dari suatu titik tetap pada t detik. Untuk setiap persamaan gerak benda berikut, tentukan v dan a. Buatlah tabel yang serupa Tabel 8.1 yang memberikan posisi dan gerak partikel.

   a. $s = \frac{1}{2}t^3 - 2t^2 + 6t - 2$

   b. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t + 1$

3. Suatu benda bergerak sepanjang garis mendatar menuruti persamaan yang diberikan, di mana s cm adalah jarak berarah pertikel dari suatu titik tetap pada t detik. Untuk setiap persamaan gerak benda berikut, tentukan saat percepatan sama dengan nol, dan kemudian tentukan jarak berarah partikel dari titik asal dan kecepatan sesaat pada saat ini.

   a. $s = 2t^3 - 6t^2 + 3t - 4$

   c. $s = \dfrac{125}{16t + 32} - \dfrac{2}{5}t^5$

   b. $s = \frac{4}{9}t^{3/2} + 2t^{1/2}$

   d. $s = 9t^2 + 2\sqrt{2t+1}$

4. Sebuah roket ditembakkan vertical ke atas, dan tingginya dari tanah setelah t detik adalah s meter dengan $s = 560t - 16t^2$ dan arah positif diambil ke atas.
   a. Tentukan kecepatan roket setelah 2 detik.
   b. Berapa lama waktu yang diperlukan oleh roket untuk mencapai ketinggian maksimum.

5. Jika sebuah bola pada suatu bidang miring didorong sehingga mempunyai kecepatan awal 24 meter/detik, maka $s = 24t + 10t^2$, di mana jarak bola dari titik mulai adalah s meter pada saat t detik, dan arah positif diambil ke arah bawah bidang miring.
   a. Berapakah kecepatan sesaat bola pada saat t_1 detik?
   b. Berapa lama waktu yang diperlukan oleh bola agar kecepatannya bertambah menjadi 48 meter/detik?

6. Suatu perusahaan mulai beroperasi pada 1 Oktober 2003. Pendapatan kotor tahunan perusahaan itu setelah beroperasi t tahun adalah p juta, dengan
$$p = 50.000 + 18.000t + 600t^2$$
   a. Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 1 Oktober 2005.
   b. Tentukan laju pertumbuhan pendapatan kotor pada 1 Oktober 2003.

7. Misalkan jumlah penduduk pada suatu kota setelah t tahun sejak 1 Januari 2000 adalah sebesar
$$p = 40t^2 + 200t + 10.000$$
   Tentukan laju pertumbuhan penduduk pada 1 Januari 2010.

8. Seorang pekerja pembuat kartun iklan ditaksir dapat mengecat y buah iklan setelah bekerja x jam sejak jam 8 pagi, dengan
$$y = 3x - 8x^2 - x^3,\ 0 \le x \le 4$$
   a. Tentukan laju pengecatan pekerja itu pada jam 10 pagi.
   b. Tentukan jumlah bingkai yang dicat antara jam 10 pagi hingga jam 11 pagi.

9. Biaya (dalam ribuan rupiah) suatu perusahaan memproduksi x pasang sepatu adalah
$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3$$
   a. Carilah fungsi biaya marginal.
   b. Carilah $C'(100)$ dan jelaskan maknanya. Apa yang diperkirakannya?
   c. Bandingkan $C'(100)$ dengan biaya memproduksi barang ke-101.

10. Fungsi biaya untuk suatu barang tertentu adalah
$$C(x) = 2000 + 3x + 0,01x^2 + 0,0002x^3$$
   a. Carilah dan tafsirkan $C'(100)$.
   b. Bandingkan $C'(100)$ dengan biaya memproduksi barang ke-101.

8.6 Aturan L'Hopital

Teorema limit 7.2.-4d menyatakan bahwa jika $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ dan $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ keduanya ada, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

asalkan $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$.

Terdapat berbagai situasi di mana teorema ini tidak dapat kita terapkan, yaitu apabila jika $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Pertama, kita perhatikan kasus apabila $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ dan

$\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$. Sebagai contoh, jika

$f(x) = x^2 - 9$ dan $g(x) = x - 3$, maka $\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 9) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to 3}(x - 3) = 0$

Tetapi pembilang dan penyebut dapat kita faktorkan dan memberikan

$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3}(x + 3) = 6$$

Contoh lagi, kita mempunyai $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$ dan $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, tetapi menurut Teorema 7.7

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

> Definisi 8.2
>
> Jika f dan g dua sehingga $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$, maka fungsi $\frac{f}{g}$ dikatakan memiliki bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ di c.

Dari definisi ini, maka $\frac{x^2 - 9}{x - 3}$ memiliki bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ di 3 dengan

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

Demikian pula, $\sin x / x$ memiliki bentuk tak tentu 0/ 0 dengan $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Sekarang kita akan mempelajari suatu metode yang lebih umum untuk menentukan limit fungsi dari bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, jika limit ini ada. Sebenarnya, terdapat beberapa bentuk tak tentu yang lain, yaitu $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 dan $\infty - \infty$. Akan tetapi semua bentuk tak tentu itu dapat kita reduksi menjadi bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$. Oleh karena itu, kita fokuskan pembahasan kepada dua bentuk tak tentu ini.

Metode untuk menghitung limit jenis ini berkaitan erat matematikawan Perancis Marquis Guillame Francois L'Hospital (1661 – 1704) pengarang pertama buku kalkulus, yang berjudul L'Analyse des infiniment petits, dipublikasikan pada 1696. Metodenya dikenal dengan Aturan L'Hospital. Aturan L'Hospital ini sengaja diberikan tanpa bukti karena buktinya di luar jangkauan buku ini.

Teorema 8.12 (Aturan L'Hopital)

Misalkan f dan g fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka I, kecuali mungkin di c sendiri, dengan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \neq c$ pada I. Jika

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, maka

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema ini juga berlaku jika semua limitnya adalah limit kiri atau limit kanan. Jika kita terapkan Aturan L'Hopital terhadap dua contoh di atas, maka

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{2x}{1} = 6 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Contoh 8.6.1

Hitung limit yang diberikan berikut (jika ada).

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$ b. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 x}{x}$ c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x}{\sin 2x}$

Penyelesaian:

a. Kita terapkan Aturan L'Hopital dua kali,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sin x} \qquad \left(\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\cos^3 x} = 2$$

b. Langsung dari aturan L'Hopital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1} = 0$$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2x^2 - 3x}{\sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x - 3}{2 \cos 2x} = -\dfrac{3}{2}$

□

Latihan 8.7

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 12, tentukan limitnya jika ada.

1. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{5\cos x}{2x - \pi}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2 - x}{\sin \pi x}$

4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(\frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\tan^3 x}$

6. $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \sin x}$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

8. $\lim\limits_{x \to 0} (\csc^2 x - x^{-2})$

9. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \csc x$

10. $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$

11. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{x \cos 3x}{\cos^2 x}$

12. $\lim\limits_{x \to 2} (x - 2) \tan \frac{\pi}{4} x$

13. Tentukan a dan b sehingga

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x + ax + bx^3}{x^3} = 0$$

14. Tentukan a dan b sehingga

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \sin x - x(1 + b\cos x)}{x^3} = 1$$

Rangkuman

1. Turunan fungsi f di bilangan c, dinotasikan dengan $f'(c)$, didefinisikan sebagai
$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$
jika limit ini ada.
2. Jika fungsi f mempunyai turunan di c, maka f kontinu di c.
3. Jika fungsi $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka $f'(x) = 0$.
4. Jika n bilangan asli dan $f(x) = x^n$, maka $f'(x) = nx^{n-1}$.
5. Misalkan u dan v suatu fungsi yang mempunyai turunan.
   a. Jika k konstanta, dan $f(x) = ku(x)$, maka $f'(x) = ku'(x)$.
   b. Jika $f(x) = u(x) + v(x)$, maka $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.
   c. Jika $f(x) = u(x)\,v(x)$, maka $f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$.
   d. Jika $f(x) = u(x)/v(x)$, maka $f'(x) = (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))/v^2(x)$.
6. Aturan Rantai. Jika fungsi v mempunyai turunan di x dan u mempunyai turunan di $v(x)$, maka fungsi komposisi $u \circ v$ mempunyai turunan di x, dan $(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x)$
7. Turunan fungsi trigonometri:
   a. Jika $f(x) = \sin x$, maka $f'(x) = \cos x$.
   b. Jika $f(x) = \cos x$, maka $f'(x) = -\sin x$,
   c. Jika $f(x) = \tan x$, maka $f'(x) = \sec^2 x$,
   d. Jika $f(x) = \cot x$, maka $f'(x) = -\csc^2 x$,
   e. Jika $f(x) = \sec x$, maka $f'(x) = \sec x \tan x$,
   f. Jika $f(x) = \csc x$, maka $f'(x) = -\csc x \cot x$.
8. Garis singgung pada kurva $y = f(x)$ di titik $(c, f(c))$ adalah garis yang melalui dengan kemiringan $f'(c)$.
9. Jika $s = f(t)$ sebagai fungsi posisi partikel, maka kecepatan atau kecepatan sesaat $v(c)$ partikel pada saat $t = c$ didefinisikan sebagai $v(c) = ds/dt = f'(c)$. Sedangkan, percepatan sesaat partikel didefinisikan $a = dv/dt = d^2s/dt^2$
10. Aturan L'Hopital
    Misalkan f dan g fungsi yang mempunyai turunan pada interval terbuka I, kecuali mungkin di c sendiri, dengan untuk setiap pada I. Jika
    $$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0 \text{ dan } \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \text{, maka } \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Math Info

Konsep turunan sebagai bagian utama dari kalkulus dipikirkan pada saat yang bersamaan oleh Newton dan Leibniz dari tahun 1665 sampai dengan tahun 1675 sebagai suatu alat untuk menyelesaikan berbagai masalah dalam geometri dan mekanika. Sir Isaac Newton (1642 - 1727) , ahli matematika dan fisika bangsa Inggris dan Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716), ahli matematika bangsa Jerman dikenal sebagai ilmuwan yang menemukan kembali kalkulus. Kalkulus memberikan bantuan tak ternilai pada perkembangan beberapa cabang ilmu pengetahuan lain. Dewasa ini kalkulus digunakan sebagai suatu alat bantu yang utama dalam menyelesaikan berbagai permasalahan ilmu pengetahuan dan teknologi. Selanjutnya, suatu fungsi yang mempunyai turunan sampai tingkat tertentu dapat dihampiri oleh suatu suku banyak, yang dikenal sebagai hampiran Taylor.

Gambar 8. Gottfried Wilhelm Leibniz
Sumber: www.et.fh-koeln.de

Uji Kompetensi

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 15, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika $f(x) = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x}$, maka $f'(\frac{\pi}{3}) = \ldots$.

   A. 2
   B. $\dfrac{4}{3}$
   C. $\dfrac{3}{4}$
   D. 1
   E. $\dfrac{1}{4}$

2. Turunan dari $y = (1-x)^2(2x+3)$ adalah ....

   A. $(1-x)(3x+2)$
   B. $(x-1)(3x+2)$
   C. $2(1+x)(3x+2)$
   D. $2(x-1)(3x+2)$
   E. $2(1-x)(3x+2)$

3. Turunan fungsi $y = \sqrt[4]{(2x^2-3)^3}$ adalah ....

   A. $-\dfrac{x}{\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   B. $\dfrac{3x}{\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   C. $\dfrac{16x}{3\sqrt[4]{2x^2-3}}$
   D. $-3\sqrt[4]{2x^2-3}$
   E. $3x\sqrt[4]{2x^2-3}$

4. Jika $f(x) = x^2\sqrt{4-6x}$, maka nilai $f'(-2) = \ldots$.

   A. -22
   B. -19
   C. $-17\frac{1}{2}$
   D. $-16\frac{1}{2}$
   E. -13

5. Jika f^{-1} merupakan invers dari fungsi $f(x)=\dfrac{x+2}{5-3x}$, $x \neq 5/3$, dan g turunan dari f^{-1}, maka nilai $g(1)=\ldots$.

A. $-\dfrac{9}{16}$

B. $-\dfrac{7}{16}$

C. $\dfrac{7}{16}$

D. $\dfrac{11}{16}$

E. $\dfrac{13}{16}$

6. Persamaan garis singgung di titik dengan $x = 2$ pada kurva $y=\dfrac{27}{\sqrt{5x-1}}$ adalah ....

A. $5x+2y-28=0$

B. $x+2y-20=0$

C. $5x-2y-8=0$

D. $x-2y+16=0$

E. $2x-y+5=0$

7. Turunan pertama dari $y=\cos^4 x$ adalah ….

A. $\dfrac{1}{4}\cos^3 x$

B. $-\dfrac{1}{4}\cos^3 x$

C. $-4\cos^3 x$

D. $-4\cos^3 x \sin x$

E. $4\cos^3 x \sin x$

8. Jarak yang ditempuh sebuah mobil dalam waktu t diberikan oleh fungsi

$$s(t)=-\tfrac{1}{3}t^3+3t^2-5t$$

Kecepatan mobil tertinggi dicapai pada waktu t = ...

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

9. Jika $f(x)=a\tan x+bx$, maka nilai $f'(\frac{\pi}{4})=3$ dan $f'(\frac{\pi}{3})=9$, maka $a+b=$ ….

A. π

B. 2

C. $\dfrac{\pi}{2}$

D. 1

E. 0

10. Jika $f(x) = \left(2x + \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}\right)^2$, maka $f'(x) = \ldots$.

A. $8x - \dfrac{27}{x^3} - \dfrac{6}{x\sqrt{x}}$

B. $8x - \dfrac{27}{x^3} + \dfrac{6}{x\sqrt{x}}$

C. $8x - \dfrac{27}{x^4} - \dfrac{12}{x\sqrt{x}}$

D. $8x - \dfrac{27}{x^4} - \dfrac{6}{x\sqrt{x}}$

E. $8x - \dfrac{27}{x^4} + \dfrac{6}{x\sqrt{x}}$

11. Garis singgung di titik (2, 8) pada kurva $f(x) = 2x\sqrt{x+2}$ memotong sumbu-x dan sumbu-y di titik $(a, 0)$ dan $(0, b)$. Nilai $a + b = \ldots$.

A. $-1\frac{1}{10}$

B. $-1\frac{1}{15}$

C. $-1\frac{3}{10}$

D. $-1\frac{2}{5}$

E. $-1\frac{3}{5}$

12. Suatu roda berputar pada sumbunya. Pada waktu t setiap jari-jari roda itu sudah menjalani sudut sebesar $\omega = 72t - 3t^2$. Kelajuan perubahan kecepatan sudutnya …

A. selalu makin tinggi
B. selalu makin rendah
C. makin tinggi hanya pada $t < 12$
D. makin rendah hanya pada $t > 12$
E. paling tinggi pada $t = 24$

13. Koordinat titik-titik singgung pada kurva $y = x^2(2x - 3)$ yang garis singgungnya sejajar garis $2y - 24x = 1$ adalah ...

A. (–1, 5) dan (–2, –4)
B. (–1, 5) dan (2, 4)
C. (–1, –5) dan (2, 4)
D. (1, –5) dan (2, 4)
E. (1, 5) dan (–2, –4)

14. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3 + 5$ yang tegak lurus $x + 3y = 2$ adalah ...

A. $3x - y + 3 = 0$ dan $3x - y + 7 = 0$
B. $3x - y - 3 = 0$ dan $3x - y - 7 = 0$
C. $3x - y - 9 = 0$ dan $3x - y - 1 = 0$
D. $3x - y + 3 = 0$ dan $3x - y - 5 = 0$
E. $3x - y + 9 = 0$ dan $3x - y + 1 = 0$

15. Garis k menyinggung kurva $y = x^3 - 4x$ di titik $(1, -3)$ dan memotong kurva di titik ...

A. (–2, 0)
B. (–1, 0)
C. (2, 0)
D. (–1, 3)
E. (–3, –15)

B. *Untuk soal nomor 16 sampai dengan nomor 20, kerjakan dengan singkat dan jelas!*

16. Hitung $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3+x)^2 - \sin 9}{x}$.

17. Tentukan nilai b agar fungsi f mempunyai turunan di $x = b$, jika

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & \text{, untuk } 0 < x \le b \\ \dfrac{2}{x} & \text{, untuk } x > b \end{cases}$$

18. Suatu kurva mempunyai persamaan $y = x^2 + ax + b$ dengan a dan b konstanta. Garis $y = 2x$ menyinggung kurva tadi di titik dengan absis 3. Tentukan a dan b.

19. Hitung $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - \sin(a+x) + \sin a}{x^2}$.

20. Rusuk kubus bertambah panjang dengan kelajuan 7 cm/detik. Berapakah kelajuan bertambahnya volume pada saat panjang rusuknya 15 cm?

Soal Analisis

1. Tangga dengan panjang 10 meter bersandar pada dinding tegak. Misalkan θ adalah sudut antara puncak tangga dan dinding serta misalkan x adalah karak dari ujung bawah tangga ke dinding. Jika ujung bawah tangga bergeser menjauhi dinding, seberapa cepat x berubah terhadap θ ketika $\theta = \dfrac{\pi}{3}$?

2. Besarnya muatan Q dalam coulomb (C) yang melewati sebuah titik dalam kabel sampai waktu t (diukur dalam detik), mengikuti fungsi

$$Q(t) = t^3 - 2t^2 + 6t + 2$$

Berapakah kuat arus listrik pada waktu $t = 0{,}5$ dan $t = 1$ detik? Apa satuannya? Kapan arus terrendah?

3. Gaya yang diperlukan untuk menarik benda seberat W sepanjang bidang datar diberikan oleh persamaan

$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$

dengan θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, dan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Lihat kembali contoh 3.2.4.

a. Carilah laju perubahan *F* terhadap θ.
b. Kapan laju perubahan ini sama dengan 0?
c. Kecemerlangan bintang *Delta Cepheid* pada saat *t*, dengan *t* diukur dalam hari, dimodelkan oleh fungsi

$$B(t) = 4{,}0 + 0{,}35 \sin\left(\frac{2\pi t}{5{,}4}\right)$$

Lihat kembali soal nomor 13 sub-bab 3.1.
d. Carilah laju perubahan kecemerlangan setelah *t* hari.
e. Dengan menggunakan kalkulator, carilah sampai dua desimal, laju pertambahan setelah satu hari.

4. Di sebuah peternakan ikan, populasi ikan dimasukkan ke tambak dan dipanen secara teratur. Model laju perubahan populasi ikan diberikan oleh persamaan

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}05\left(1 - \frac{P(t)}{10.000}\right)P(t) - \beta P(t)$$

dengan $P(t)$ jumlah populasi ikan setelah *t* hari, dan β adalah persentase populasi yang dipanen.

a. Berapa nilai $\frac{dP}{dt}$ yang berpadanan terhadap populasi stabil.
b. Jika laju pemanenan adalah 4%, carilah tingkat populasi stabil.
c. Apa yang terjadi jika β diperbesar menjadi 5%?

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama	:	Tanggal	: ....
Kelas	: XI	Materi Pokok	: Turunan
Kelompok	:	Semester	: 2 (dua)
Kegiatan	: Survei data populasi penduduk suatu kelurahan		
Tujuan	: Menentukan laju perubahan penduduk		

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. Data populasi penduduk kelurahan
2. Komputer
3. Alat tulis
4. Buku catatan

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 4 atau 5 siswa.
2. Carilah data jumlah penduduk dari kelurahan terdekat dengan tempat tinggal Anda, untuk kurun waktu tahun 1993 – 2007 untuk periode dua tahunan. Masing-masing kelompok harus mensurvei kelurahan yang berbeda.
3. Catat data jumlah penduduk $P(t)$ untuk setiap tahunnya, dan isikan pada tabel di bawah.

Tahun (t)	1993	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007
$P(t)$								

C. Analisis

1. Buat grafik dari data yang diperoleh di atas dengan bantuan komputer.
2. Untuk setiap tahun t buat tabel $\dfrac{P(t) - P(2003)}{t - 2003}$.
3. Tentukan laju perubahan penduduk pada kelurahan survei Anda pada tahun 2003.
4. Tafsirkan hasil di atas sebagai pendekatan limit fungsi $P(t)$ di $t = 2003$.
5. Tuliskan hasil di atas dengan notasi turunan.
6. Perkirakan jumlah penduduk pada thun 2009 pada kelurahan survei Anda.

BAB IX

NILAI EKSTRIM FUNGSI DAN MEMBUAT GRAFIK FUNGSI

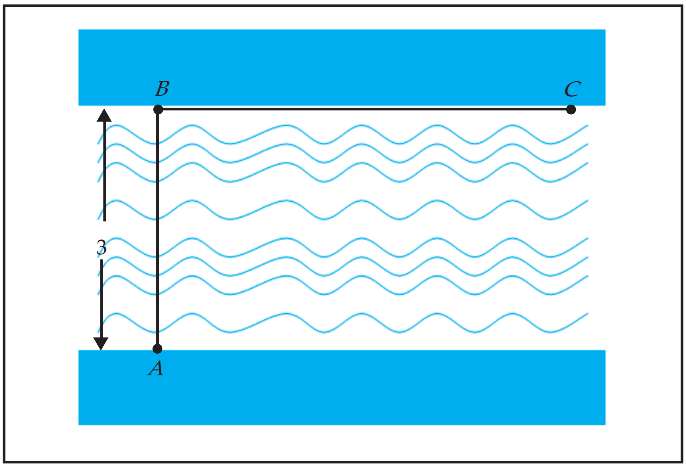
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari materi bab ini, Anda diharapkan mampu:

1. menentukan selang dimana suatu fungsi naik atau turun,
2. menentukan titik stasioner suatu fungsi beserta jenis ektrimnya,
3. menentukan titik belok suatu fungsi,
4. menggambarkan grafik fungsi,
5. menjelaskan karakteristik masalah yang model matematikanya menentukan ekstrim fungsi,
6. menentukan besaran masalah yang dirancang sebagai peubah dalam ekspresi matematikanya,
7. merumuskan fungsi satu peubah yang merupakan model matematika dari suatu masalah,
8. menentukan penyelesaian dari model matematika,
9. memberikan tafsiran terhadap penyelesaian dari masalah.

Pengantar

Gedung A dan B adalah dua gedung yang berhadapan pada masing-masing tepi suatu danau yang lurus dengan lebar 3 km. Gedung C terletak di tepi danau dimana gedung B berada, dan jauhnya 6 km dari B. Suatu perusahaan telekomunikasi akan memasang kabel telepon dari A ke C. Jika biaya pemasangan kabel per kilometer di bawah air adalah 25% lebih mahal dari pada pemasangan kabel di daratan, bagaimanakah cara pemasangan kabel yang termurah untuk perusahaan tersebut? Ilustrasi posisi dari gedung A, B, dan C diberikan oleh gambar berikut.

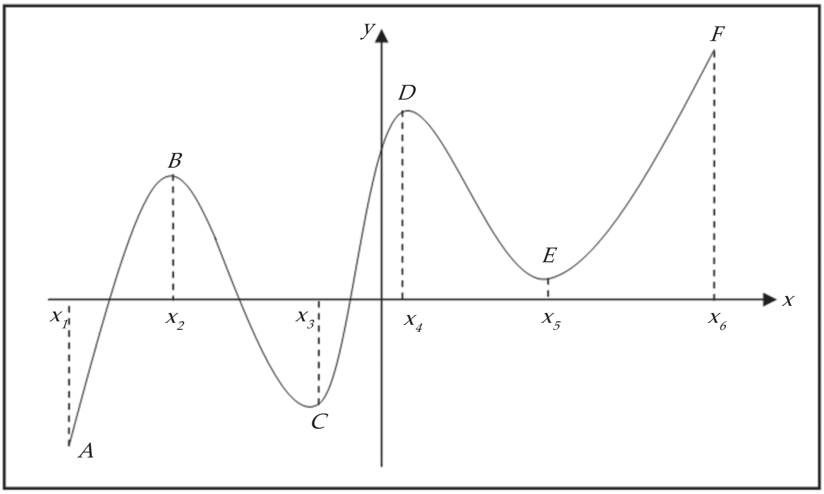


Gambar 9.1

Pemecahan dari masalah ini erat hubungannya dengan pengoptimuman fungsi. Sebelum menyelesaikan masalah ini secara khusus, sebaiknya Anda harus sudah menguasai bab sebelumnya terutama fungsi, limit fungsi, dan turunan.

9.1 Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Gambar 9.2 memberikan sketsa grafik fungsi f pada interval $[x_1, x_6]$. Grafik itu memperlihatkan bahwa jika titik bergerak sepanjang kurva dari A ke B maka nilai fungsi bertambah seiring bertambahnya absis; dan juga jika titik bergerak sepanjang kurva B ke C, maka nilai fungsi berkurang seiring bertambahnya absis. Dalam hal ini kita katakan bahwa f naik pada interval $[x_1, x_2]$,dan turun pada $[x_2, x_3]$. Definisi formalnya kita berikan berikut.



Gambar 9.2

Definisi 9.1

1. Fungsi f dikatakan naik pada interval I, jika untuk sembarang $x_1,\ x_2 \in I$ dengan $x_1 < x_2$, maka $f(x_1) < f(x_2)$.
2. Fungsi f dikatakan turun pada interval I jika untuk sembarang dengan $x_1,\ x_2 \in I$, maka $f(x_1) > f(x_2)$.

Pada ilustrasi gambar 9.2 fungsi f naik pada interval tertutup

$$[x_1, x_2], [x_3, x_4], \text{ dan } [x_5, x_6]$$

Fungsi f turun pada interval tertutup

$$[x_2, x_3] \text{ dan } [x_4, x_5]$$

Hubungannya dengan turunan, kita mempunyai sifat berikut ini.

Teorema 9.1

Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan pada interval tertutup $[a, b]$.

1. Jika $f\,'(x) > 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$.
2. Jika $f\,'(x) < 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f turun pada $[a,b]$.

Contoh 9.1.1

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan pada interval mana f naik atau turun.

Penyelesaian:

Kita mempunyai

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

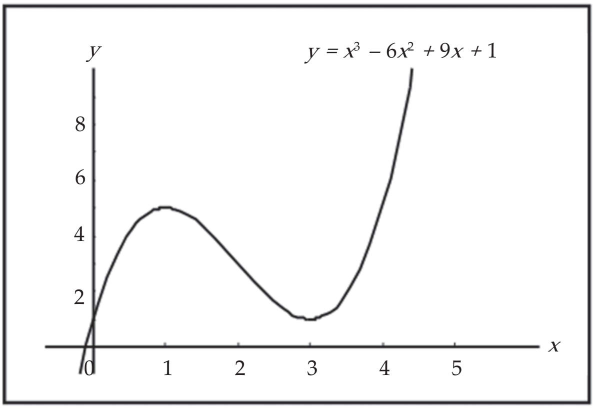
Dengan mengambil $f'(x) = 0$, kita memperoleh

$$3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ atau } x = 1$$

Tabel 9.1

Interval	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 1$	+	f naik
$1 < x < 3$	–	f turun
$3 < x$	+	f naik

Dari tabel 9.1 kita simpulkan bahwa f naik untuk $x < 1$ atau $x > 3$, dan turun untuk $1 < x < 3$.



Gambar 9.3 Grafik fungsi $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

□

Contoh 9.1.2

Diberikan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{untuk } x < 3 \\ 8 - x, & \text{untuk } x \geq 3 \end{cases}$$

Tentukan pada interval mana f naik atau turun.

Penyelesaian:

Fungsi f tidak mempunyai turunan di $x = 3$ (mengapa?), dan

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{untuk } x < 3 \\ -1, & \text{untuk } x > 3 \end{cases}$$

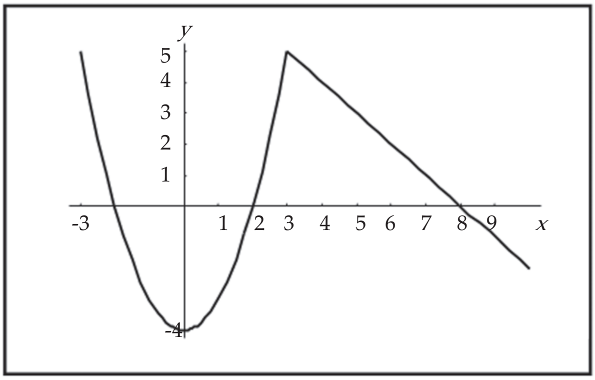
Dengan mengambil $f'(x) = 0$, maka

$$2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tabel 9.2

Interval	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 0$	$-$	f turun
$0 < x < 3$	$+$	f naik
$3 < x$	$-$	f turun

Tabel 9.2 menyatakan bahwa f naik pada interval $0 < x < 3$, dan turun pada $x < 0$ atau $x > 3$.



Gambar 9.4

□

Latihan 9.1

1. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tentukan interval dimana fungsi itu naik atau turun.

   a. $f(x) = x^2 - 4x - 3$

   b. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

   c. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 5$

   d. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

   e. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2$

   f. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

2. Untuk setiap fungsi yang diberikan, tentukan interval di mana fungsi itu naik atau turun.

   a. $f(x) = 2x + \dfrac{1}{2x}$

   b. $f(x) = \dfrac{x+2}{x-2}$

   c. $f(x) = x\sqrt{5-x}$

   d. $f(x) = (1-x)^2(1+x)^3$

   e. $f(x) = \sin x$

   f. $f(x) = 2 - 3(x-4)^{2/3}$

3. Buktikan bahwa $y = \dfrac{1}{x}$ selalu turun.
4. Misalkan f naik pada interval I. Buktikan bahwa:
   a. Jika $g(x) = f(x) + C$, maka g naik pada I.
   b. Jika fungsi $h(x) = -f(x)$, maka h turun pada I.
   c. Jika $k(x) = 1/f(x)$ dan $f(x) > 0$ pada I, maka k turun pada I.

9.2 Nilai Ekstrim

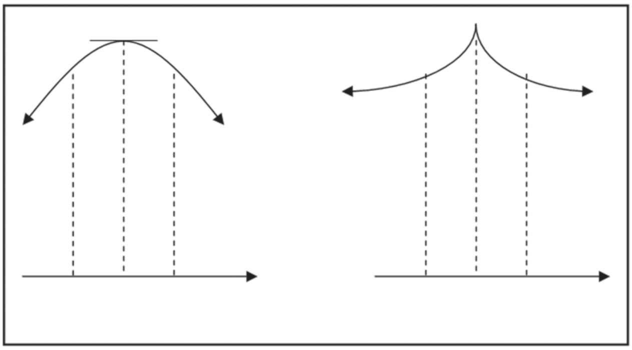
Beberapa aplikasi dari turunan yang terpenting adalah persoalan pengoptimumam. Dalam kasus ini kita dituntut untuk mencari metode terbaik untuk melakukan sesuatu. Sebagai contoh adalah masalah pemasangan kabel telepon yang diungkapkan di awal bab. Persoalan ini dapat direduksi menjadi pencarian nilai minimum fungsi. Serupa dengan ini, banyak masalah yang intinya adalah pencarian nilai maksimum. Oleh karena itu, pada sub-bab ini kita akan mengkaji nilai maksimum dan nilai minimum fungsi. Penelusuran nilai maksimum dan minimum dapat dilakukan melalui pendekatan grafik.

Jika kita kembali pada gambar 9.2, titik B atau D nilainya paling besar di antara titik-titik sekitarnya. Dalam hal ini, kita menyebutnya bahwa B dan D nilai maksimum relatif. Sementara itu, titik C atau E pada gambar 9.2 nilainya paling kecil diantara titik-titik sekitarnya. Dalam hal ini, kita menyebutnya bahwa C dan E nilai minimum relatif. Secara umum, kita mempunyai definisi berikut.

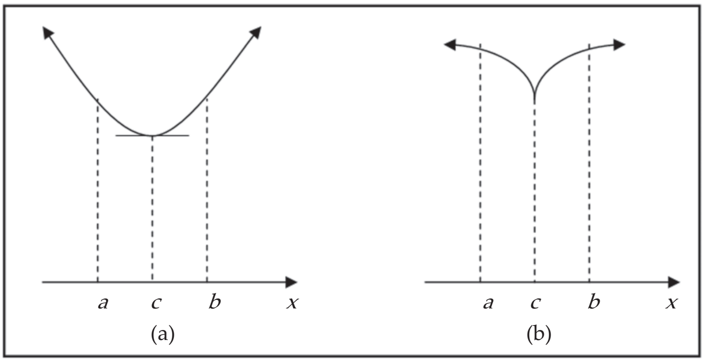
Definisi 9.2

1. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
2. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
3. Fungsi f yang mempunyai nilai maksimum relatif atau minimum relatif di c, dikatakan mempunyai ekstrim relatif di c.

Gambar 9.5 masing-masing menunjukkan sketsa dari sebagian grafik suatu fungsi yang mempunyai maksimum relatif di c. Sedangkan, gambar 9.6 masing-masing menunjukkan sketsa dari sebagian grafik fungsi yang mempunyai minimum relatif di c.



Gambar 9.5 Sketsa maksimum fungsi



Gambar 9.6 Sketsa minimum fungsi

Jika kita perhatikan gambar 9.5 (a) dan 9.6 (a), maka garis singgung di titik (c, $f(c)$) horisontal; ini adalah titik dimana $f'(c) = 0$. Kita akan menamai secara khusus titik semacam ini.

Definisi 9.3

Jika $f'(c) = 0$, maka fungsi f dikatakan stasioner di c. Nilai $f(c)$ disebut nilai stasioner dari f. Titik (c, $f(c)$) disebut titik stasioner dari f.

Sebaliknya, tampak pada gambar 9.5 (b) dan 9.6 (b) bahwa fungsi f di bilangan c tidak mempunyai turunan (masih ingat mengapa?).
Dari keempat kasus di atas, kita mempunyai kesimpulan berikut ini.

Teorema 9.2
Jika f terdefinisi pada (a, b) dan mempunyai ekstrim relatif di c, $a < c < b$, maka $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada.

Bilangan c di dalam daerah asal f sehingga $f'(c) = 0$ atau $f'(c)$ tidak ada kita sebut sebagai bilangan kritis.

Lebih lanjut, dari gambar 9.5 (a) dan 9.6 (a) secara geometri juga dapat kita simpulkan bahwa jika fungsi f yang mencapai maksimum relatif di c, maka grafik f di kiri titik c naik dan di kanan c turun. Sebaliknya, dari gambar 9.5 (b) dan 9.6 (b) jika fungsi f mencapai minimum relatif di c, maka grafik di kiri c turun dan di kanan c naik. Dengan fakta ini dan Teorema 9.1, kita mempunyai alat uji ekstrim yang dikenal sebagai Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif.

Teorema 9.3 (Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif)

Misalkan f mempunyai turunan di sekitar c kecuali mungkin di c sendiri.

1. Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < c$, dan $f'(x) < 0$ untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
2. Jika untuk $x < c$, dan untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai minimum relatif di c.

Sebagai kesimpulan, langkah-langkah untuk menentukan ekstrim relatif suatu fungsi f adalah:

1. Tentukan $f'(x)$.
2. Tentukan bilangan kritis nilai x, ($f'(x) = 0$ atau $f'(x)$ tidak ada).
3. Gunakan uji turunan pertama (Teorema 9.3).

Contoh 9.2.1

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan jenis ekstrim relatif dari fungsi f.

Penyelesaian:

1. Kita mempunyai

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

2. Dari contoh 9.1.1,

$$f'(x) = 0 \iff x = 3 \text{ atau } x = 1$$

3. Dengan uji turunan pertama, hasilnya disimpulkan pada tabel 9.3.

Tabel 9.3

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	Kesimpulan
$x < 1$		+	f naik
$x = 1$	5	0	f mempunyai nilai maksimum relatif
$1 < x < 3$		–	f turun
$x = 3$	1	0	f mempunyai nilai minimum relatif
$3 < x$		+	f naik

Dari tabel 9.3, kita menyimpulkan bahwa nilai maksimum relatif dari f adalah 5 yang terjadi di $x = 1$, dan nilai minimum relatif dari f adalah 1 yang terjadi di $x = 3$. Lihat kembali gambar 9.3.

□

Contoh 9.2.2

Diberikan

$$f(x)=\begin{cases} x^2-4, & \text{untuk } x<3 \\ 8-x, & \text{untuk } x\geq 3 \end{cases}$$

Tentukan jenis ekstrim relatif dari fungsi f.

Penyelesaian:

1. Dari contoh 9.1.2 kita peroleh

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & \text{untuk } x<3 \\ -1, & \text{untuk } x>3 \end{cases}$$

   Ingat bahwa f tidak mempunyai turunan di $x=3$.

2. Dalam hal ini,

$$f'(x) \text{ tidak ada } \Leftrightarrow x=3,$$

   dan stasioner

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

3. Dengan uji turunan pertama, hasilnya disimpulkan pada tabel 9.4.

Tabel 9.4

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	Kesimpulan
$x<0$		$-$	f turun
$x=0$	-4	0	f mempunyai nilai minimum relatif
$0<x<3$		$+$	f naik
$x=3$	5	tidak ada	f mempunyai nilai maksimum relatif
$3<x$		$-$	f turun

Dari tabel 9.4, kita menyimpulkan bahwa nilai maksimum relatif dari f adalah 5 yang terjadi di $x=3$, dan nilai minimum relatif dari f adalah -4 yang terjadi di $x=0$. Lihat kembali gambar 9.4.

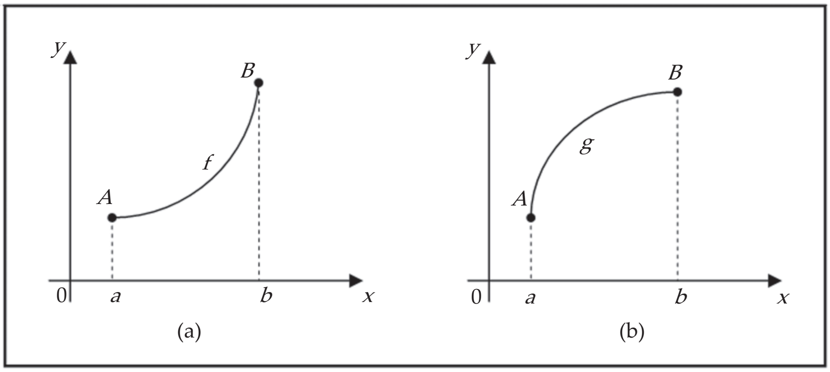
□

Tugas Mandiri

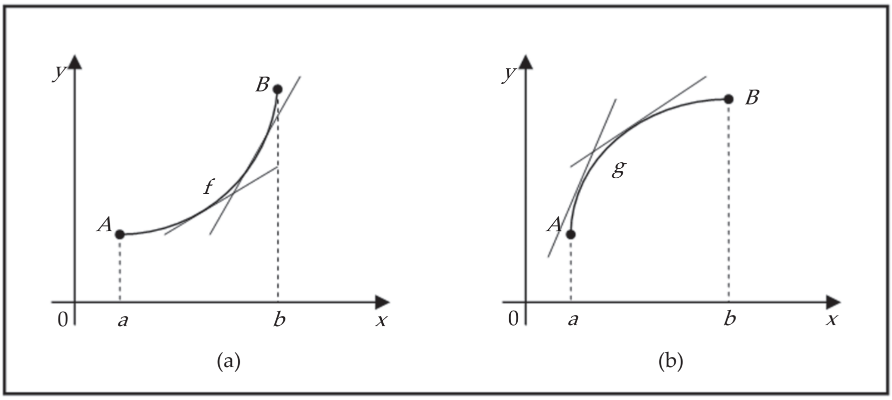
Tentukan nilai bilangan a yang bersifat bahwa fungsi f tidak mempunyai bilangan kritis: $f(x)=(a^2+a-6)\cos 2x+(a-2)x+\cos 1$

Kecekungan dan Titik Belok

Kita perhatikan gambar 9.7. Kedua grafik menghubungkan titik A dan B tetapi mereka kelihatan berbeda, karena mereka melengking pada arah yang berlainan. Bagaimana perbedaan dua perlakuan ini? Pada Gambar 9.8 telah digambarkan beberapa garis singgung dari kedua kurva ini. Pada gambar (a) kurva terletak di atas garis singgung dan f cekung ke atas pada (a, b). Pada gambar (b) kurva terletak di bawah garis singgung dan grafik g cekung ke bawah pada (a, b).



Gambar 9.7



Gambar 9.8

Secara umum, kita mempunyai definisi berikut ini.

Definisi 9.4

Grafik fungsi f dikatakan cekung ke atas pada interval I, jika grafik f terletak di atas semua garis singgungnya pada I. Grafik fungsi f dikatakan cekung ke bawah pada interval I, jika grafik f terletak di bawah semua garis singgungnya pada I.

Jika kita perhatikan grafik gambar 9.8 (a), berangkat dari kiri ke kanan, kemiringan garis singgung bertambah besar. Ini artinya bahwa turunan f' adalah fungsi naik, dan sehingga turunannya f'' adalah positif. Serupa, pada gambar 9.8 (b), kemiringan garis singgung berkuarang dari kiri ke kanan, sehingga f' fungsi turun dan berakibat f'' adalah negatif. Sehingga secara umum kita mempunyai uji kecekungan berikut ini.

Teorema 9.4 (Uji Kecekungan)

1. Jika $f''(x) > 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke atas pada I.
2. Jika $f''(x) < 0$ untuk semua x dalam I, maka grafik f cekung ke bawah pada I.

Dari Teorema 9.4 kita dapat bertanya: apa tafsirannya terhadap grafik apabila $f''(x) = 0$? Mudah untuk kita jawab pertanyaan ini, yaitu di titik tersebut merupakan perubahan kecekungan dari cekung ke atas berubah menjadi cekung ke bawah, atau sebaliknya. Dengan demikian di titik tersebut grafiknya mengalami pembelokan arah garis singgung.

Definisi 9.5

Titik P pada kurva disebut titik belok jika kurva berubah dari cekung ke atas menjadi cekung ke bawah, atau dari cekung ke bawah menjadi cekung ke atas di P.

Sebagai konsekuensi Teorema9.4, jika turunan kedua ada di titik belok, maka turunan kedua di titik tersebut sama dengan nol.

Teorema 9.5

Jika f mempunyai turunan pada interval yang memuat c, dan $(c, f(c))$ adalah titik belok, maka $f''(c)$ ada, dan $f''(c) = 0$.

Contoh 9.2.3

Diberikan

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Tentukan titik belok grafik fungsi f dan juga interval dimana grafiknya cekung ke atas dan cekung ke bawah.

Penyelesaian:

Dari fungsi yang diberikan

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \text{ dan } f''(x) = 6x - 12$$

$f''(x)$ ada untuk setiap x. Menurut Teorema 9.5, kemungkinan titik belok hanya di bilangan x sehingga $f''(x) = 0$,

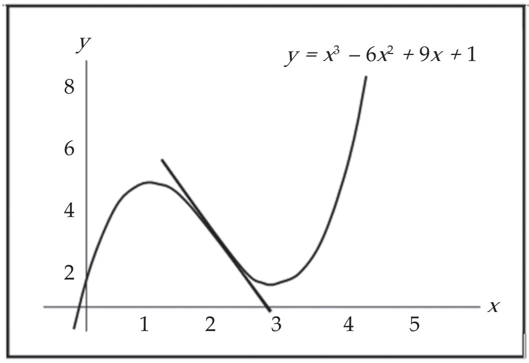
$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Kita periksa tanda $f''(x)$ dengan Teorema 9.4,

Tabel 9.5

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < 2$			$-$	grafik cekung ke bawah
$x = 2$	3	-3	0	grafik mempunyai titik belok
$2 < x$			$+$	grafik cekung ke atas

Dari Tabel 9.5, kita menyimpulkan bahwa (2, 3) adalah titik belok grafik fungsi f, grafik cekung ke bawah pada interval $x < 2$, dan grafik cekung ke atas pada interval $x > 2$.



Gambar 9.9

□

Selain bermanfaat untuk menentukan titik belok, keuntungan lain dari turunan kedua adalah bahwa turunan tersebut dapat digunakan sebagai uji ekstrim relatif.

Teorema 9.6 (Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif)
Misalkan f mempunyai turunan pada interval terbuka yang memuat c dan $f'(c) = 0$.

1. Jika $f''(c) < 0$, maka f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
2. Jika $f''(c) > 0$, maka f mempunyai nilai minimum relatif di c.

Contoh 9.2.4

Diketahui fungsi

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Tentukan titik-titik stasioner beserta jenisnya.

Penyelesaian:

Kita mempunyai

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \quad \text{dan} \quad f''(x) = 6x - 6$$

Titik stasioner diperoleh apabila $f'(x) = 0$,

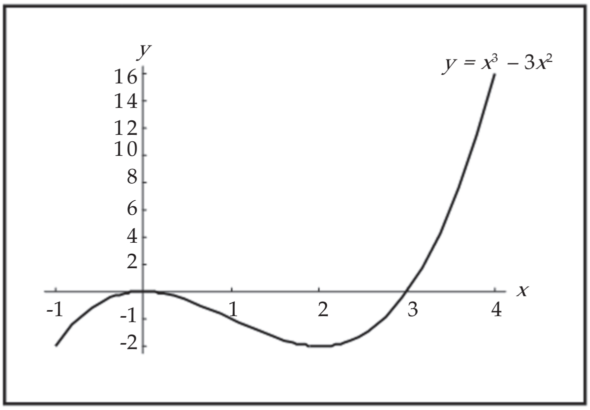
$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{atau} \quad x = 2 \end{aligned}$$

Dengan uji turunan kedua kita selidiki jenis ekstrimnya.

Tabel 9.6

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x = 0$	0	0	–	f mempunyai maksimum relatif
$x = 2$	–4	0	+	f mempunyai minimum relatif

Dari Tabel 9.6, kita menyimpulkan bahwa (0,0) dan (2,–4) adalah titik-titik stasioner, masing-masing merupakan titik maksimum relatif dan minimum relatif.



Gambar 9.10 Grafik fungsi $y = x^3 - 3x^2$

Latihan 9.2

1. Untuk setiap fungsi yang diberikan tentukan titik-titik stasioner dan ekstrim relatif dengan uji turunan pertama.

   a. $f(x) = x^2 + 4x - 3$

   b. $f(x) = x^3 - 3x + 2$

   c. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$

   d. $f(x) = x^4 + 4x$

   e. $f(x) = 4 \sin \frac{1}{2} x$

   f $f(x) = \frac{1}{5} x^5 - \frac{5}{3} x^3 + 4x + 1$

2. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan ekstrim relatif dengan uji turunan pertama.

   a. $f(x) = (x+2)^2(x-1)^2$

   b. $f(x) = x\sqrt{3-x}$

   c. $f(x) = x - 3x^{1/3}$

   d. $f(x) = x^{2/3}(x-1)^2$

   e. $f(x) = \begin{cases} 2x+9 & , \text{ untuk } x \le -2 \\ x^2+1 & , \text{ untuk } x > -2 \end{cases}$

   f. $f(x) = \begin{cases} 4-(x+5)^2 & , \text{ untuk } x \le -4 \\ 12-(x+1)^2 & , \text{ untuk } x \ge -4 \end{cases}$

3. Tentukan ekstrim relatif dari fungsi pada soal nomor 1 dan nomor 2 dengan uji turunan kedua (jika mungkin).

4. Untuk setiap grafik dari fungsi berikut, tentukan titik beloknya (jika ada), interval dimana grafik cekung ke atas dan cekung ke bawah

   a. $f(x) = x^3 + 9x$

   b. $g(x) = x^3 - 6x^2 + 20$

   c. $h(x) = x^4 - 8x^3$

   d. $F(x) = (x+2)^3$

   e. $G(x) = (x-1)^3$

   f. $H(x) = (x+2)^{1/3}$

   g. $f(x) = (x-1)^{1/3}$

   h. $g(x) = \dfrac{2}{(x^2+3)}$

   i. $h(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)}$

   j. $G(x) = 2 \cos 3x$

5. Tentukan a, b, c dan d sehingga grafik fungsi $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mempunyai ekstrim relatif di (0, 3) dan mempunyai titik belok di (1, –1).
6. Tentukan a dan b sehingga fungsi yang didefinisikan oleh $f(x) = x^3 + ax^2 + b$ mempunyai ekstrim relatif di (2, 3).
7. Diberikan $f(x) = x^3 + 3rx + 5$. Buktikan:
   a. Jika $r > 0$, maka f tidak mempunyai ekstrim relatif.
   b. Jika $r < 0$, maka f mempunyai maksimum dan minimum relatif.
8. Suatu epidemi penyakit berjangkit di lingkungan masyarakat. Dalam x bulan setelah epidemi mulai berjangkit, P persen penduduk telah ketularan, dengan
$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}$$
Setelah berapa bulan paling banyak penduduk ketularan dan berapa persenkah ini dari penduduknya?
9. (Gunakan Kalkulator). Di antara $0\,^oC$ dan $30\,^oC$, volume V (dalam sentimeter kubik) dari 1 kg air pada suhu T secara hampiran diberikan oleh rumus:
$$V = 999,87 - 0,064267T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$$
Tentukan suhu, sehinga pada suhu tersebut air mencapai kerapatan maksimum.
10. Gaya yang diperlukan untuk menarik benda seberat W sepanjang bidang datar diberikan oleh persamaan
$$F = \frac{\mu W}{\mu \sin\theta + \cos\theta}$$
dengan θ adalah sudut yang terbentuk antara tali dan bidang datar, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$, dan μ adalah konstanta koefisien gesekan. Lihat kembali contoh 3.2.4 dan soal analisis no.3 bab 8. Perlihatkan bahwa F minimum ketika $\tan\theta = \mu$.

9.3 Ekstrim Mutlak pada Interval Tertutup

Pada sub-bab 9.2 kita telah membahas bahwa syarat perlu fungsi kontinu mempunyai ektrim relatif di c dalam daerah asal adalah bahwa c bilangan kritis. Tetapi jika daerah asal f adalah interval tertutup, maka kita dapat menemukan nilai fungsi terbesar atau terkecil pada interval tersebut. Kita perhatikan ilustrasi fungsi berikut. Misalkan f diberikan oleh

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & , \text{ untuk } x < 1 \\ x^2 - 6x + 7 & , \text{ untuk } x \ge 1 \end{cases}$$

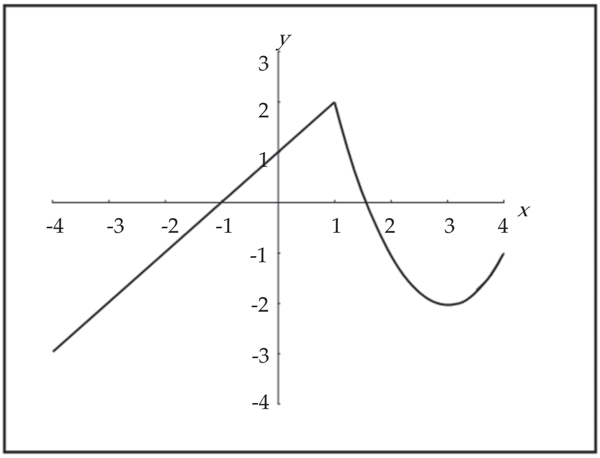
Sketsa grafik f pada interval [–4, 4] diberikan oleh gambar 9.11. Perhatikan bahwa f mempunyai nilai ekstrim relatif di $x = 1$ dan $x = 3$, karena 1 dan 3 adalah bilangan kritis f, dengan

$$f(1) = 2 \quad \text{dan} \quad f(3) = –2$$

Kemudian nilai f pada batas interval,

$$f(– 4) = –3 \quad \text{dan} \quad f(4) = –1$$

Jadi, kita peroleh nilai terbesar dari f pada interval [–4, 4] adalah 2, dan nilai terkecil dari f pada interval tersebut adalah –3. Nilai ini masing-masing disebut sebagai nilai maksimum mutlak dan nilai minimum mutlak dari f pada [–4, 4].



Gambar 9.11

Definisi 9.6

Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval tertutup dan c anggota interval.

1. Jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak dari f pada interval tersebut.
2. Jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x dalam interval , maka $f(c)$ disebut nilai minimum mutlak dari f pada interval tersebut.
3. Jika $f(c)$ maksimum mutlak atau minimum mutlak, maka $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f.

Faktanya, fungsi f pada ilustrasi di atas adalah fungsi yang kontinu pada interval tertutup [–4, 4]. Hasil ini berlaku untuk sembarang fungsi kontinu pada interval tertutup.

Teorema 9.7 (Teorema Nilai Ekstrim)

Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada $[a, b]$.

Dari ilustrasi di atas, kita dapat menyimpulkan bahwa kemungkinan ekstrim mutlak dari fungsi kontinu pada interval tertutup terjadi di *bilangan kritis* atau di *batas interval*. Sehingga kita mempunyai metode pencarian ekstrim berikut ini.

Metode Interval Tertutup

Untuk mencari nilai maksimum dan minimum mutlak suatu fungsi kontinu f pada interval tertutup $[a, b]$:

1. Carilah nilai f di bilangan kritis f di dalam (a, b),
2. Carilah nilai f di titik batas interval,
3. Bandingkan nilai-nilai pada langkah 1 dan 2, yang terbesar adalah nilai maksimum mutlak; yang terkecil adalah nilai minimum mutlak

Contoh 9.3.1

Diketahui fungsi

$$f(x) = x - 2\sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$$

Tentukan ekstrim mutlak dari f pada interval tersebut.

Penyelesaian:

Fungsi $f(x) = x - 2\sin x$ kontinu pada interval $[0, 2\pi]$. Karena, $f'(x) = 1 - 2\cos x$, kita peroleh $f'(x) = 0$ apabila $\cos x = 1/2$, dan ini terjadi ketika $x = \pi/3$ atau $x = 5\pi/3$. Nilai f di bilangan kritis ini adalah

$$f(\pi/3) = \frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} = -0,684853$$

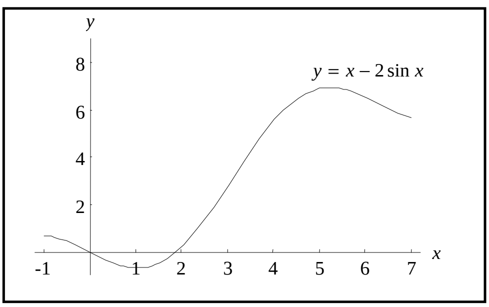
dan

$$f(5\pi/3) = \frac{5\pi}{3} - 2\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} + \sqrt{3} = 6,968039$$

Nilai f di titik batas interval adalah

$$f(0) = 0 \quad \text{dan} \quad f(2\pi) = 2\pi = 6,28$$

Dengan membandingkan empat bilangan ini dengan menggunakan Metode Selang Tutup, kita peroleh nilai minimum mutlak adalah $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, dan nilai maksimum mutlak adalah $f(5\pi/3) = 5\pi/3 + \sqrt{3}$.



Gambar 9.12 Grafik fungsi $y = x - 2\sin x$

Contoh 9.3.2

Teleskop Ruang Angkasa Hubble dilepaskan pada 24 April 1990 oleh pesawat ulang-alik Discovery. Model untuk kecepatan pesawat ulang-alik selama misi ini, sejak peluncuran pada saat $t = 0$ sampai pendorong roket pejal memulai pembuangan pada $t = 126$ detik, diberikan oleh

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083$$

(dalam kaki per detik). Dengan model ini, perkirakan nilai ekstrim mutlak dari percepatan pesawat ulang-alik di antara peluncuran dan pembuangan pendorong.

Penyelesaian:

Fungsi percepatan untuk pesawat adalah

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61$$

Kita terapkan Metode Interval Tertutup terhadap fungsi kontinu a pada interval $0 \le t \le 126$. Turunannya adalah

$$a'(t) = 0,007812t - 0,18058$$

Bilangan kritis hanya terjadi ketika $a'(t) = 0$:

$$t_1 = \frac{0,18058}{0,007812} \approx 23,12$$

Dengan menghitung $a(t)$ di bilangan kritis dan di titik ujung, kita peroleh

$$a(0) = 23,6; \qquad a(t_1) \approx 21,52; \qquad a(126) = 62,87$$

Jadi, percepatan maksimum kira-kira 62,87 kaki/detik^2 dan percepatan minimum kira-kira 21,52 kaki/detik^2.

□

Latihan 9.3

Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 8, tentukan (jika ada) ekstrim mutlak dari setiap fungsi yang diberikan pada interval yang ditentukan. Gambarkan pula sketsa grafik fungsi pada interval tersebut (jika mungkin gunakan komputer).

1. $f(x) = x^3 + 5x - 4, \quad [-3, -1]$
2. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \quad [-4, 0]$
3. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$
4. $f(x) = x - 2\cos x, \quad [-\pi, \pi]$
5. $f(x) = \dfrac{x}{x+2}, \quad [-1, 2]$
6. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}, \quad [0, 1]$
7. $f(x) = (x+1)^{2/3}, \quad [-2, 1]$
8. $f(x) = \begin{cases} 2x - 7 & \text{, untuk } -1 \le x \le 2 \\ 1 - x^2 & \text{, untuk } 2 < x \le 4 \end{cases}$

9. Pada suatu monopoli, persamaan permintaan suatu barang tertentu adalah $x + p = 140$, dengan x banyaknya satuan barang yang diproduksi setiap hari dan p juta menyatakan harga setiap satuan. Biaya produksi dalam jutaan rupiah untuk memproduksi x satuan diberikan oleh

$$C(x) = 300 + 20x + x^2$$

untuk $x \in [0,140]$.

a. Tentukan fungsi keuntungan total.
b. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biaya marginal.
c. Tentukan maksimum keuntungan setiap hari.

10. Misalkan dalam suatu monopoli, persamaan permintaan suatu barang tertentu adalah $p = \frac{1}{5}\sqrt{x-100}$, dengan p juta menyatakan harga x barang dengan $x \in [100,1000]$. Biaya produksi dalam jutaan rupiah untuk memproduksi x satuan diberikan oleh $C(x) = 100 + 2x$.

a. Tentukan fungsi pendapatan marginal dan fungsi biaya marginal.
b. Tentukan nilai x yang menghasilkan keuntungan maksimum.

9.4 Menggambar Grafik Fungsi Aljabar

Sedemikian jauh kita telah membahas beberapa aspek tentang fungsi, kini pada gilirannya kita siap menuangkan aspek-aspek tersebut untuk menggambarkan grafik secara benar. Kita mempunyai pedoman untuk membuat sketsa grafik fungsi $y = f(x)$:

1. Daerah asal
2. Perpotongan sumbu
   Perpotongan sumbu-y adalah $f(0)$, dan perpotongan sumbu-x kita ambil untuk $y = 0$.
3. Asimtot
   (a) *Asimtot datar*. Garis $y = L$ adalah asimtot datar, jika $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ atau $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$.
   (b) *Asimtot tegak*. Garis $x = c$ adalah asimtot tegak, jika paling sedikit salah satu limit berikut dipenuhi.

   $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = -\infty$

   $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = \infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = -\infty$
4. Interval naik dan turun
5. Nilai ekstrim beserta jenisnya
6. Kecekungan dan titik belok
7. Gambarkan sketsa kurva

Contoh 9.4.1

Gambarkan grafik dari fungsi $f(x) = x^3 - 3x - 2$.

Penyelesaian:

1. Daerah asal adalah $\mathbb{R}$ (himpunan semua bilangan real), karena f sukubanyak.
2. Titik potong grafik dengan sumbu-x, yaitu untuk $y = 0$,

$$y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 (x - 2) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ atau } x = 2$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-x adalah (–1, 0) dan (2, 0)
Titik potong grafik dengan sumbu-y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 3.0 - 2 = -2$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-y adalah (0, –2).

3. Karena f sukubanyak, maka tidak mempunyai asimtot.
4. Kita mempunyai $f\,'(x) = 3x^2 - 3$ dan $f\,''(x) = 6x$,

$$f\,'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow 3(x - 1)(x + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ atau } x = -1$$

dan

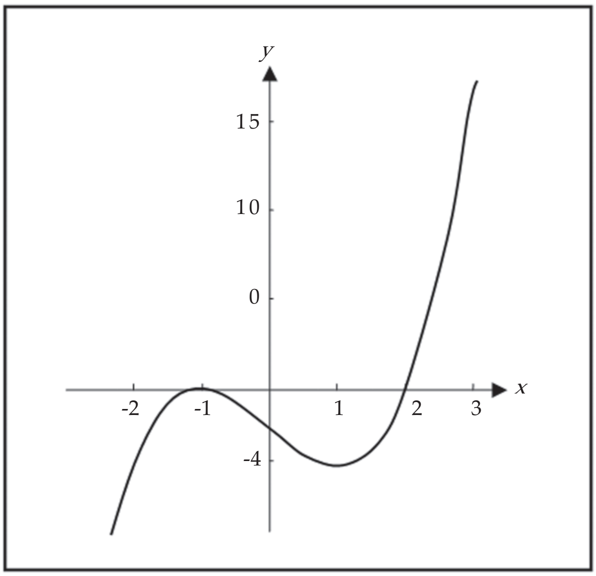
$$f\,''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

Kita rangkum hasilnya

Tabel 9.7

Interval	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	Kesimpulan
$x < -1$		+		f naik
$x = -1$	0	0	–	f mempunyai maksimum relatif
$x = 0$	–2		0	f mempunyai titik belok
$-1 < x < 1$	–4	–	+	f turun
$x = 1$		0		f mempunyai minimum relatif
$1 < x$		+		f naik

Dari Tabel 9.7, kita mempunyai (–1, 0) adalah titik maksimum relatif, dan (1,–4) adalah titik minimum relatif.



Gambar 9.13

Contoh 9.4.2

Gambarkan sketsa grafik fungsi

$$f(x) = \frac{3x+6}{x-2}$$

Penyelesaian:

1. Tampak bahwa fungsi tidak terdefinisi di $x = 2$, sehingga daerah asalnya $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$.
2. Titik potong grafik dengan sumbu-x, yaitu untuk $y = 0$,

$$\begin{aligned} y = 0 &\Leftrightarrow 3x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \end{aligned}$$

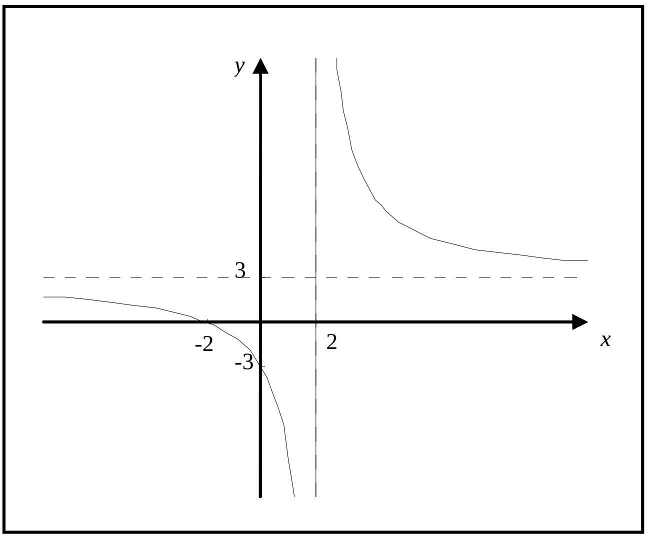
Jadi, titik potong grafik dengan sumbu- x adalah $(-2, 0)$.
Titik potong grafik dengan sumbu-y, yaitu untuk $x = 0$,

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{3.0+6}{0-2} = -3$$

Jadi, titik potong grafik dengan sumbu-y adalah $(0, -3)$.

3. Karena $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{3x+6}{x-2} = \infty$, maka garis $x = 2$ adalah asimtot tegak. Sehingga untuk $x \to 2$ grafiknya menuju ke ∞ dan ke $-\infty$.

Karena $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x+6}{x-2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3+\frac{6}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 3$, maka garis $y = 3$ adalah asimtot datar. Sehingga untuk $x \to +\infty$ grafiknya mendekati garis $y = 3$.



Gambar 9. 14

□

Latihan 9.4

Gambarkan grafik dari setiap fungsi yang diberikan.

1. $f(x) = x^3$
2. $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$
3. $f(x) = (x-1)^2\,(x+2)$
4. $f(x) = x^4 - 2x^3$
5. $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x - 4$
6. $f(x) = 3x^5 + 5x^4$
7. $f(x) = (x+1)^3(x-2)^2$
8. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$
9. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$
10. $f(x) = \dfrac{10}{(x-2)}$
11. $f(x) = \dfrac{2x}{(x-4)}$
12. $f(x) = \dfrac{(x-20)}{(2x+3)}$

9.5 Masalah Pengoptimuman

Metode yang telah kita pelajari dalam bab ini digunakan untuk mencari nilai ekstrim yang mempunyai penerapan praktis dalam banyak bidang kehidupan. Dalam memecahkan praktis tantangan terbesar adalah mengubah masalah dalam kalimat menjadi masalah pengoptimuman matematis dengan merancang fungsi yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan. Secara singkat, kita mempunyai tiga aktivitas utama dalam memecahkan masalah pengoptimuman, yaitu: merancang model matematika, menyelesaikan model, dan menafsirkan penyelesaian. Berikut ini, kita rangkum langkah-langkah dalam memecahkan masalah pengotimuman:

1. Memahami permasalahan
   Baca dengan seksama sampai paham. Tanyakan pada diri kamu sendiri: Apa yang tidak diketahui? Apa besaran yang diketahui? Apa syarat yang diberikan?
2. Gambar diagram
   Jika memungkinkan gambarkan diagram.
3. Perkenalkan notasi
   Berikan simbol untuk besaran yang harus dimaksimumkan atau diminimumkan (misalkan F). Pilih juga besaran-besaran yang tidak diketahui (misalkan : $a, b, c, \ldots, x, y$).
4. Buat persamaan F dalam simbol-simbol besaran yang tidak diketahui.
5. Gunakan metode penentuan maksimum dan minimum pada bab ini.

Contoh 9.5.1

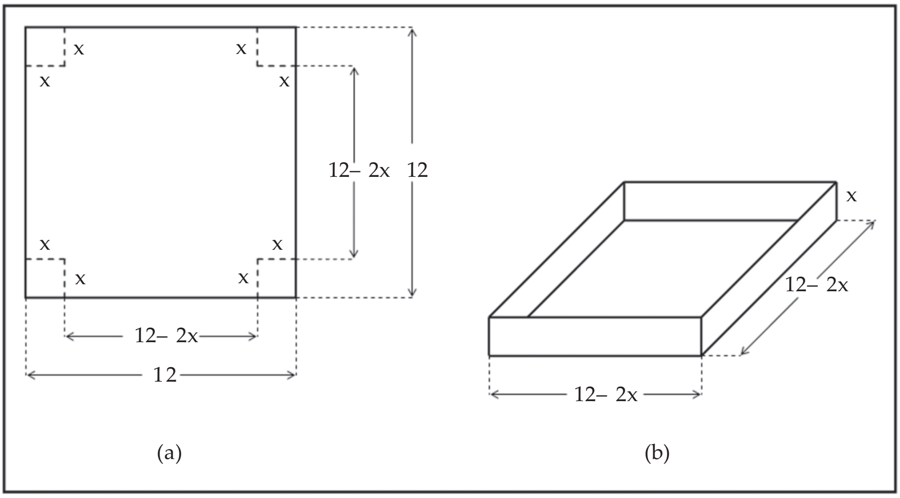
Suatu perusahaan kotak kardus akan membuat kotak tanpa tutup dari karton berbentuk persegi yang berukuran 12 inci. Pembuatan kotak dilakukan dengan cara memotong persegi-persegi yang ukurannya sama dari keempat sudutnya, kemudian melipat sisi-sisinya ke atas. Tentukan ukuran pemotongan agar diperoleh kotak kardus dengan isi terbesar.

Penyelesaian:

Gambar 9.15 (a) menyatakan satu lembar karton dan gambar 9.15 (b) menyatakan kotak yang dihasilkan dari karton tersebut. Misalkan x inci adalah sisi persegi-persegi dari keempat sudut karton. Setelah sisi-sisinya dilipat maka terbentuk kotak dengan ukuran $(12 - 2x)$ inci, $(12 - 2x)$ inci dan x inci. Perhatikan gambar 9.15 (b). Jika $V(x)$ inci kubik menyatakan isi kotak, maka

$$\begin{aligned} V(x) &= (12 - 2x)(12 - 2x)\,x \\ &= 144x - 48x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Daerah asal V adalah interval tertutup [0, 6]. Mengapa?



Gambar 9.15

Kita akan menentukan maksimum mutlak dari V pada interval [0,6] dengan Metode Interval tertutup. Kita mempunyai $V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$,

$$\begin{aligned} V'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow 144 - 96x + 12x^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 6)(x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ atau } x = 6 \end{aligned}$$

Jadi, bilangan kritis V adalah 2 dan 6. Nilai V di bilangan kritis dan di titik batas interval adalah maksimum mutlak V terjadi di bilangan kritis atau pada batas interval,

$$V(0) = 0, \qquad V(2) = 128, \qquad V(6) = 0.$$

Jadi, pemotongan sudut karton sepanjang 2 inci, akan memberikan volume kotak kardus maksimum sebesar 128 inci kubik.

□

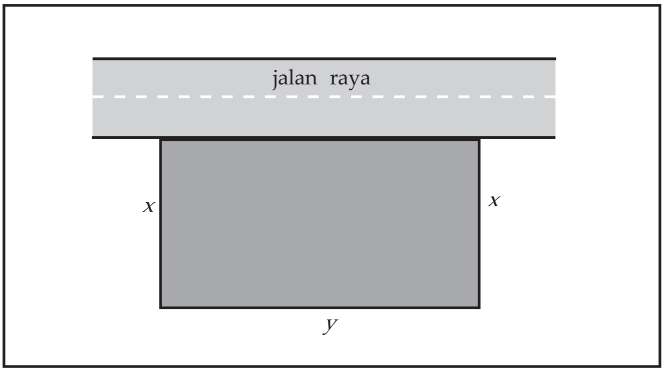
Contoh 9.5.2

Lapangan berbentuk empat persegi panjang yang terbentang di tepi jalan raya, hendak dipagari tetapi sepanjang tepi jalan tidak ikut dipagari. Harga material untuk pagar pada sisi yang sejajar dengan jalan adalah Rp120.000,00 per meter, dan harga material untuk pagar kedua sisi lainnya adalah Rp80.000,00 per meter. Tentukan ukuran lapangan yang luasnya terbesar yang dapat dipagari dengan pagar seharga Rp36.000.000,00.

Penyelesaian:

Misalkan x meter adalah panjang sisi lapangan yang tegak lurus dengan jalan, y meter adalah panjang sisi lapangan yang sejajar jalan, dan A m^2 luas lapangan, perhatikan gambar 9.16, maka

$$A = xy.$$



Gambar 9.16

Harga material untuk sisi lapangan yang tegak lurus jalan adalah Rp80.000,00 per meter. Karena panjangnya x meter, maka harga material untuk satu sisi tersebut adalah $80000x$ rupiah. Harga material untuk sisi ketiga adalah $120000y$ rupiah. Diketahui total biaya adalah Rp36.000.000,00 maka

$$80000x + 80000x + 120000y = 36000000$$

atau

$$4x + 3y = 900$$

Kita nyatakan y dalam x, $y = 300 - \frac{4}{3}x$, kemudian kita subtitusikan ke dalam A,

$$A = A(x) = x(300 - \frac{4}{3}x) = 300x - \frac{4}{3}x^2$$

Kita terapkan uji turunan pertama, $A'(x) = 300 - \frac{8}{3}x$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow\ 300 - \frac{8}{3}x = 0 \\ &\Leftrightarrow\ x = 112{,}5 \end{aligned}$$

Untuk $x = 112{,}5$ akan menghasilkan $y = 300 - \frac{4}{3}\cdot(112{,}5) = 150$. Subtitusi kedua harga ini ke dalam A memberikan

$$A = (112{,}5((150) = 16875 \text{ m}^2$$

Jadi, luas terbesar yang dapat dipagari dengan harga Rp36.000.000,00 adalah 16.875 m^2, yang diperoleh apabila sisi lapangan yang sejajar jalan 150 m dan panjang masing-masing sisi yang lain adalah 112,5 m.

□

Untuk mengakhiri bab, kita tinjau kembali masalah pemasangan kabel telepon di antara dua gedung yang berseberangan pada tepi danau, yang sampaikan pada awal bab.

Contoh 9.5.3

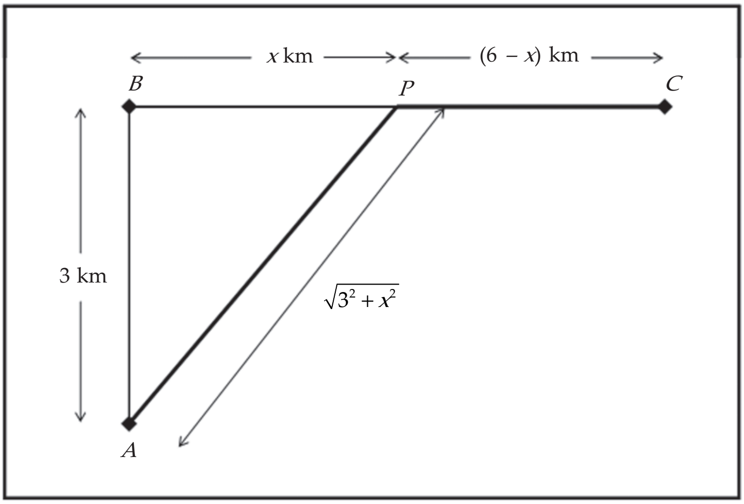
Titik A dan B adalah dua titik yang berhadapan pada masing-masing tepi danau yang lurus dengan lebar 3 km. Titik C terletak di tepi danau di mana B terletak dan jauhnya 6 km dari B. Perusahaan telekomunikasi ingin memasang kabel dari A ke C. Jika biaya pemasangan kabel per kilometer di bawah air 25 % lebih mahal daripada pemasangan kabel di daratan, bagaimanakah cara pemasangan kabel yang termurah untuk perusahaan tersebut?

Penyelesaian:

Dari informasi yang diberikan, kita awali dengan menempatkan titik P yang terletak di antara B dan C, sehingga kabel dipasang dari A ke P dan dari P ke C. Misalkan jarak B ke P adalah x km, maka jarak P ke C adalah $(6 - x)$ km, $x \in [0,6]$. Kita sederhanakan sketsa dari gambar 9.1 menjadi gambar 9.17 di bawah.

Kita akan menentukan x, yaitu posisi P, sehingga $C(x)$ minimum. Karena daerah asal $C(x)$ interval tertutup, kita dapat menggunakan Metode Interval Tertutup. Faktanya, fungsi $C(x)$ kontinu pada [0, 6], sehingga minimumnya ada. Kita mempunyai

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k$$



Gambar 9.17

Dengan menyelesaikan $C'(x) = 0$ untuk x diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{5kx}{4\sqrt{9+x^2}} - k = 0 &\Leftrightarrow 5x = 4\sqrt{9+x^2} \\
&\Leftrightarrow 25x^2 = 16(9+x^2) \\
&\Leftrightarrow x^2 = 16 \\
&\Leftrightarrow x = \pm 4
\end{aligned}$$

Tetapi -4 bukan akar penyelesaian, sehingga bilangan kritis untuk $C(x)$ pada interval [0, 6] adalah 4. Nilai $C(x)$ di bilangan kritis dan titik batas interval adalah

$$C(0) = \tfrac{39}{4}k, \qquad C(4) = \tfrac{33}{4}k, \quad \text{dan} \quad C(6) = \tfrac{15}{4}k\sqrt{5}$$

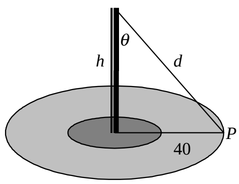
Tampak bahwa minimum mutlak dari $C(x)$ pada interval [0, 6] adalah $\tfrac{33}{4}k$, yang terjadi untuk $x = 4$. Jadi, agar biaya pemasangan kabel minimum, maka kabel harus dipasang dari A ke P di bawah air dahulu, kemudian dari P ke C di daratan, dengan biaya $33k/4$ juta rupiah, dengan k suatu konstanta.

□

Tugas Kelompok

Diskusikan soal-soal berikut dikelompok Anda, untuk menyelesaikannya.

1. Jendela Norman adalah jendela mempunyai bentuk persegi panjang yang di atasnya berupa setengah lingkaran. Jika keliling jendela p meter, berapakah jari-jari lingkaran agar luas pintu tersebut maksimum?
2. Sebuah lampu diletakkan pada puncak tiang tinggi h meter untuk menerangai suatu lingkaran lalu lintas yang sibuk, yang berjari-jari 40 meter. Intensitas penyinaran I pada sembarang titik P pada lingkaran berbanding langsung terhadap kosinus sudut θ (lihat gambar 9.18) dan berbanding terbalik terhadap kuadrat jarak d dari sumber cahaya. Perhatikan kembali soal analisis nomor 2 bab 4.



Gambar 9.18

   a. Seberapa tinggi tiang lampu untuk memaksimumkan I.
   b. Jika tinggi tiang lampu adalah h meter dan seorang berjalan menjauhi alas tiang pada laju 4 meter/detik. Pada laju berapakah intensitas cahaya pada titik dipunggungnya 4 meter di atas permukaan tanah berkurang ketika dia mencapai tepi luar dari lingkaran lalulintas tersebut?

Latihan 9.5

1. Hasil kali dua bilangan positif adalah 16. Tentukan bilangan-bilangan itu, jika:
   a. jumlahnya minimum
   b. jumlah dari bilangan pertama dan kuadrat bilangan kedua minimum
2. Diketahui lingkaran yang mempunyai persamaan $x^2 + y^2 = 9$. Tentukan:
   a. jarak terdekat dari titik (4, 5) ke suatu titik pada lingkaran
   b. jarak terjauh dari titik (4, 5) ke suatu titik pada lingkaran
3. Tentukan luas persegi panjang terbesar yang dua titik sudutnya terletak pada sumbu-x sedangkan dua titik sudut lainnya terletak di atas sumbu-x dan pada parabola $y = 9 - x^2$.
4. Persegi panjang mana yang mempunyai luas terbesar jika kelilingnya 100 cm? Berapa cm^2 luasnya yang maksimum?
5. Luas daerah persegi panjang ialah 48 cm^2.
   a. Jika panjang salah satu sisinya x cm, tulislah kelilingnya dalam x.
   b. Tentukan ukuran persegi panjang itu sehingga kelilingnya minimum.
6. Sehelai karton berbentuk persegi panjang dengan lebar 5 inci dan panjang 8 inci. Pada keempat sudut karton itu dipotong bujur sangkar yang sisinya x inci. Dari bangun yang diperoleh, dibuat kotak tanpa tutup yang tingginya x inci. Tentukan ukuran kotak agar isinya maksimum.
7. Seorang pengusaha ingin membuat kaleng berbentuk tabung yang isinya 1000 cm^3. Kaleng itu akan dibuat demikian hingga luasnya paling kecil. Tentukan jari-jari dan tinggi kaleng itu apabila:
   a. kaleng itu tanpa tutup
   b. kaleng itu dengan tutup
8. Suatu kotak tanpa tutup, alasnya berbentuk bujursangkar yang sisinya x cm. Isi kotak itu 64 cm^3.
   a. Tulislah tingginya dalam x.
   b. Jika luas permukaannya L, nyatakan L dalam x.
   c. Tentukanlah ukuran kotak itu agar bahan yang dibuat sedikit mungkin.
9. Titik A merupakan suatu pulau yang terletak 6 km dari titik terdekat B pada pantai yang lurus. Seorang turis asing di pulau tersebut bermaksud pergi ke titik C di pantai yang jaraknya 9 km dari B. Turis tersebut dapat menggunakan perahu dengan sewa Rp15.000,00 per kilometer dan pergi ke suatu titik P di antara B dan C. Kemudian dari P menuju C, dia menyewa mobil beserta supirnya dengan sewa Rp12.000,00 per kilometer. Tentukan rute perjalanan yang paling murah dari titik A ke titik C.
10. Seseorang meluncurkan perahunya dari titik A pada tepian sungai lurus, dengan lebar 3 hm, dan bermaksud menuju ke titik B, 8 hm ke arah hilir pada tepian yang berseberangan, secepat mungkin. Orang tersebut dapat mendayung perahunya langsung menyeberangi sungai ke titik C dan kemudian berlari ke B, atau dia dapat mendayung ke suatu titik D di antara C dan B dan kemudian berlari ke B. Jika dia mendayung dengan kecepatan 6 hm/jam dan berlari dengan kecepatan 8 hm/jam, di mana dia seharusnya mendarat untuk mencapai B secepat mungkin?

Rangkuman

1. Misalkan f fungsi yang mempunyai turunan pada interval tertutup $[a, b]$.
   a. Jika $f'(x) > 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f naik pada $[a, b]$.
   b. Jika $f'(x) < 0$ untuk setiap x di dalam (a, b), maka f turun pada $[a,b]$.
2. Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval terbuka dan c anggota interval.
   a. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai maksimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \geq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
   b. Fungsi f dikatakan mempunyai nilai minimum relatif di c, jika terdapat interval terbuka yang memuat c, sehingga $f(c) \leq f(x)$ untuk x dalam interval tersebut.
   c. Fungsi f yang mempunyai nilai maksimum relatif atau minimum relatif di c, dikatakan mempunyai ekstrim relatif di c.
3. Misalkan fungsi f terdefinisi pada interval tertutup dan c anggota interval.
   a. Jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x dalam interval, maka $f(c)$ disebut nilai maksimum mutlak dari f pada interval tersebut.
   b. Jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x dalam interval, maka $f(c)$ disebut nilai minimum mutlak dari f pada interval tersebut.
   c. Jika $f(c)$ maksimum mutlak atau minimum mutlak, maka $f(c)$ disebut nilai ekstrim mutlak dari f.
4. Jika $f'(c) = 0$, maka fungsi f dikatakan stasioner di c. Nilai $f(c)$ disebut nilai stasioner dari f. Titik $(c, f(c))$ disebut titik stasioner dari f.
5. Jika f terdefinisi pada (a, b) dan mempunyai ekstrim relatif di c, $a < c < b$, maka atau tidak ada.
6. Bilangan c di dalam daerah asal f sehingga atau tidak ada kita sebut sebagai bilangan kritis.
7. Uji Turunan Pertama untuk Ekstrim Relatif. Misalkan f mempunyai turunan di sekitar c kecuali mungkin di c sendiri.
   a. Jika $f'(x) > 0$ untuk $x < c$, dan untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
   b. Jika $f'(x) < 0$ untuk $x < c$, dan untuk $c < x$, maka fungsi f mempunyai nilai minimum relatif di c.
8. Uji Turunan Kedua untuk Ekstrim Relatif. Misalkan f mempunyai turunan pada interval terbuka yang memuat c dan .
   a. Jika $f''(c) < 0$, maka f mempunyai nilai maksimum relatif di c.
   b. Jika $f''(c) > 0$, maka f mempunyai nilai minimum relatif di c.
9. Teorema Nilai Ekstrim. Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f mencapai nilai maksimum mutlak dan minimum mutlak pada $[a, b]$.
10. Metode Interval Tertutup. Untuk mencari nilai maksimum dan minimum mutlak suatu fungsi kontinu f pada interval tertutup $[a, b]$:
    (1) Carilah nilai f di bilangan kritis f di dalam (a, b),
    (2) Carilah nilai f di titik batas interval,
    (3) Bandingkan nilai-nilai pada langkah (1) dan (2), yang terbesar adalah nilai maksimum mutlak; yang terkecil adalah nilai minimum mutlak.

Math Info

Pakar ilmu burung telah menetapkan bahwa beberapa jenis burung cenderung menghindari terbang melintasi genangan air luas selama siang hari. Dipercaya bahwa lebih banyak energi yang diperlukan untuk terbang melintasi air daripada melintasi tanah karena secara umum pada siang hari di atas tanah udara naik dan di atas air turun. Hal ini menunjukkan bahwa burung secara naluriah memilih jalur yang akan meminimumkan pengeluaran energi.

Gambar 9.19 Burung terbang
Sumber: indonesian.cri.cn

Uji Kompetensi

A. Berilah tanda silang (X) pada huruf a, b, c, d atau e di depan jawaban yang Anda anggap paling benar!

1. Pada interval $-1 \le x \le 2$, fungsi $y = x^3 - 3x^2 + 3$ mempunyai nilai maksimum ... .

   A. -6 B. -1 C. 3 D. 6 E. 8

2. Jumlah dari bilangan pertama dan kuadrat bilangan kedua adalah 75. Nilai terbesar dari hasil kali kedua bilangan tersebut adalah ...

   A. 50 B. 75 C. 175 D. 250 E. 350

3. Jarak terpendek titik (4, 2) ke kurva parabola $y^2 = 8x$ adalah ... .

   A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$ E. $3\sqrt{2}$

4. Suatu proyek pembangunan gedung sekolah dapat diselesaikan dalam x hari dengan biaya proyek per hari $\left(3x - 900 + \frac{120}{x}\right)$ ratus ribu rupiah. Agar biaya proyek minimum maka proyek tersebut diselesaikan dalam waktu ... hari

   A. 40 B. 60 C. 90 D. 120 E. 150

5. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka nilai $p = \ldots$.

A. 8 B. 7 C. 5 D. 4 E. 3

6. Persamaan garis yang melalui titik (2, 3) dan membentuk segitiga di kuadran pertama dengan luas terkecil adalah ... .

A. $y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2)$
B. $y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$
C. $y - 3 = \frac{2}{3}(x - 2)$
D. $y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 2)$
E. $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 2)$

7. Jika nilai stasioner dari $f(x) = x^3 - px^2 - px - 1$ adalah $x = p$, maka nilai $p = \ldots$.

A. 0 atau 1 B. 0 atau $\frac{1}{5}$ C. 0 atau –1 D. 1 E. $\frac{1}{5}$

8. Jarak yang ditempuh sebuah mobil dalam waktu t diberikan oleh fungsi

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 - 5t$$

Kecepatan mobil tertinggi dicapai pada waktu $t = \ldots$.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

9. Titik belok dari fungsi $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$ adalah .. . .

A. (–2, 3) B. (–2, 7) C. (–2, 5) D. (2, 10) E. (2, 5)

10. Kurva $y = x^3 + 6x^2 - 9x + 7$ naik untuk nilai-nilai $x \ldots$.

A. $x > 0$
B. $-3 < x < 1$
C. $-1 < x < 3$
D. $x < -3$ atau $x > 1$
E. $x < -1$ atau $x > 3$

11. Nilai maksimum dari fungsi trigonometri $f(x) = \frac{1}{5}\sin(5x - \frac{\pi}{6})$ adalah … .

A. $\frac{1}{5}$ B. 1 C. 0 D. 5 E. $\frac{5}{6}$

12. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ turun pada interval $-1 < x < 3$. Jika nilai maksimum dari $f(x)$ adalah 15, maka nilai minimumnya adalah ... .

A. – 24 B. –20 C. –17 D. –10 E. 2

13. Sebuah kerucut mempunyai jari-jari r dan tinggi t. Jika $r + t = 9$, maka volume maksimum kerucut tersebut adalah ... .

A. 24π B. 27π C. 33π D. 36π E. 42π

14. Dua bilangan a dan b memenuhi $a - 2b = 50$. Nilai minimum dari $a^2 - b^2$ adalah ....

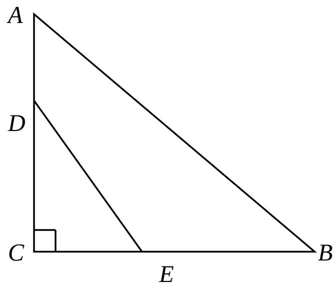
A. 300 B. 400 C. 500 D. 600 E. 700

15. Jika x_1 dan x_2 merupakan akar persamaan kuadrat $x^2 - (a-1)x + a = 0$. Nilai stasioner dari $x_1^3 + 3x_1x_2 + x_2^3$ dicapai untuk $a = \dots$.

    A. 1 dan 2
    B. 1 dan 3
    C. 3 dan 2
    D. –1 dan 2
    E. –1 dan 2

B. *Kerjakan soal-soal berikut dengan langkah-langkah yang tepat!*

16. Diketahui ΔABC siku-siku sama kaki, $AC = BC = 20$, dan $AD = CE$, berapakah luas minimum segi empat *ABED*?



Gambar 9.20

17. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$. Tentukan:
    a. interval dimana grafik f naik dan turun
    b. maksimum relatif dan minimum relatif
    c. titik belok grafik $y = f(x)$
    d. sketsa grafik $y = f(x)$

18. Biaya untuk memproduksi x unit barang per hari adalah $(x^3 - 2000x^2 + 3000000x)$ rupiah. Jika barang itu harus diproduksi, berapakah biaya paling rendah untuk per unit?

19. Sebuah roda berputar mengelilingi titik pusatnya. Sudut simpangan setiap titik pada roda pada waktu t dirumuskan sebagai:

$$\theta(t) = 54t - \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3$$

Tentukan kecepatan sudutnya. Kemudian hitung besar sudut ketika kecepatannya sama dengan nol.

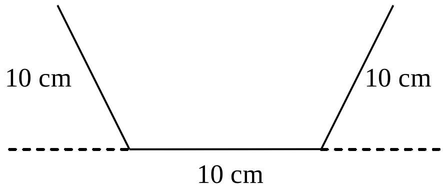
20. Misalkan pengurangan tekanan darah seseorang tergantung pada banyaknya obat tertentu yang digunakannya. Jika x mg obat yang digunakan maka pengurangan tekanan darah merupakan suatu fungsi dari x. Misalnya $f(x)$ mendefinisikan fungsi tersebut dengan

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x)$$

dengan $x \in [0, k]$ dengan k konstanta positif. Tentukan nilai x sehingga pengurangan tekanan darah terbesar.

Soal Analisis

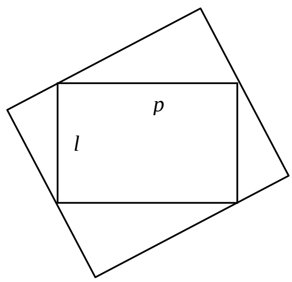
1. Pancuran hujan dibuat dari lembaran besi yang memiliki lebar 30 cm dengan menekuk ke atas dari sepertiga besi pada masing-masing sisi sebesar sudut θ. Bagaimana seharusnya θ dipilih sehingga penampung akan dapat menampung air dalam jumlah maksimum?



Gambar 9.21

Bandingkan dengan soal analisis nomor 1 bab 3.

2. Diberikan persegi panjang dengan lebar l cm dan panjang p cm. Tentukan persegi panjang dengan luas maksimum yang dapat diletakkan di sekeliling persegi panjang yang diketahui.



Gambar 9.22

Bandingkan dengan soal analisis nomor 2 bab 3.

3. Perahu meninggalkan dermaga pada pukul 14.00 dan berlayar menuju selatan dengan kecepatan 20 km/jam. Perahu lain telah menuju ke Timur pada kecepatan 15 km/jam dan mecapai dermaga yang sama pada pukul 15.00. Pada pukul berapa kedua perahu itu paling berdekatan.
4. Sebuah perusahaan memproduksi dua jenis produk A dan B. Jika biaya total produksi untuk 8 jam sehari adalah C juta, maka $C = 3x^2 + 42y$, dengan x banyaknya mesin yang digunakan untuk memproduksi produk A dan y banyaknya mesin yang digunakan untuk memproduksi produk B. Misalkan selama 8 jam sehari terdapat 15 mesin yang bekerja. Tentukan banyaknya mesin yang harus digunakan untuk memproduksi A dan banyaknya mesin yang memproduksi B agar biaya total produksi minimum.
5. Paket yang dapat diterima oleh suatu perusahaan pengiriman adalah paket yang jumlah panjang dan keliling penampang tegaknya tidak melebihi 100 inci. Bila paket berbentuk kotak tegak dengan penampang tegaknya berbentuk bujursangkar, tentukan ukuran paket yang mempunyai volume terbesar yang dapat dikirimkan oleh perusahaan pengiriman tersebut.

Aktivitas Proyek

Aktivitas

Nama : ....
Kelas : XI

Tanggal : ....
Materi Pokok : Nilai ekstrim dan teknik menggambar grafik fungsi

Kelompok: ....
Semester : 2 (dua)

Kegiatan: Membuat persegi dan segitiga sama sisi dari sepotong kawat
Tujuan : Menentukan persegi dan segitiga sama sisi sehingga total luasnya minimum

A. Alat dan bahan yang digunakan

1. 5 potong kawat masing-masing 200 cm
2. Gunting / alat pemotong
3. Meteran
4. Alat tuils
5. Buku catatan

B. Cara kerja

1. Buatlah kelompok yang beranggotakan 5 siswa, setiap kelompok menyediakan 5 potong kawat berukuran 200 cm.
2. Potong kawat menjadi dua bagian, tidak ada ketentuan panjang potongan.
3. Buat masing-masing potongan kawat menjadi persegi (PS) dan segitiga sama sisi (SS).
4. Hitung luas untuk setiap bangun datar itu, kemudian isikan pada tabel di bawah.
5. Ulangi langkah 2 sampai 4 untuk empat kawat yang lain, yang masing-masing berbeda cara memotongnya.

	Kawat I		Kawat II		Kawat III		Kawat IV		Kawat V	
	PS_1	SS_1	PS_2	SS_2	PS_3	SS_3	PS_4	SS_4	PS_5	SS_5
Sisi										
Luas										

C. Analisis

1. Dari data yang Anda peroleh di atas, manakah yang memberikan total luas minimum.
2. Jika diambil satu potong kawat 200 cm, dan x cm yang dipotong untuk dibuat persegi, berapakah kawat yang dibuat untuk segitiga sama sisi?
3. Nyatakan luas masing-masing bidang datar dalam x.
4. Misalkan L menyatakan total luas dari kedua bidang datar itu, apakah daerah asal fungsi L?
5. Dengan Uji Turunan Pertama, tentukan nilai x yang menyebabkan L minimum.
6. Manakah hasil percobaan Anda di atas yang mendekati L untuk nilai x tersebut?

Teka-Teki Matematika

Menebak Tiga Bilangan

Mintalah teman Anda untuk memikirkan 3 bilangan yang masing-masing lambang bilangannya paling banyak terdiri dari 2 angka. Misalnya: tanggal, bulan, dan tahun kelahiran (hanya dua angka terakhir dari tahun itu). Suruhlah ia melakukan perhitungan berikut.

a. Kalikan bilangan pertama dengan 10
b. Hasil dari a di atas kurangi dengan 1
c. Hasil dari b kalikan dengan 50
d. Hasil kali dari c ditambah 5 kali bilangan kedua
e. Hasil dari d kalikan dengan 20
f. Pada hasil e tambahkan bilangan ke 3
g. Akhirnya tambahkan 1 kepada hasil f

Setelah melakukan perhitungan itu suruhlah memberitahukan hasil perhitungannya kepada Anda.

Dari hasil perhitungan itu Anda dapat mengetahui bilangan pertama, kedua, dan ketiga (yang dirahasiakan itu) setelah perhitungan dari g ditambah dengan 999. Misalnya hasil perhitungan itu 240.235, maka 240.235 + 999 = 241.234. Jadi, ketiga bilangan yang dirahasiakan itu ialah 24, 12, dan 34.

Latihan Ulangan Umum Semester 2

A. Untuk soal nomor 1 sampai dengan nomor 40, pilihlah satu jawaban yang paling tepat! Kerjakan di buku tugas Anda!

1. Jika sukubanyak $F(x)$ masing-masing dibagi oleh $(x - 3)$ dan $(x + 2)$ mempunyai sisa 6 dan 10, jika dibagi oleh $x^2 - x - 6$ mempunyai sisa $2ax + 3p$, maka $\lim\limits_{x \to 15} \dfrac{px - 42}{ax + 6} = \ldots$.
   A. -8
   B. -7
   C. -4
   D. -3
   E. -2
2. Suatu sukubanyak $F(x)$ jika dibagi $(x+2)$ sisanya 14 dan jika dibagi $(x-4)$ sisanya -4, sisa pembagian $F(x)$ oleh $x^2 - 2x - 8$ adalah ....
   A. $3x - 8$
   B. $3x + 8$
   C. $8x + 3$
   D. $-3x + 8$
   E. $-3x - 8$
3. Suatu sukubanyak $F(x)$ habis dibagi oleh $(x-1)$, sisa pembagian $F(x)$ oleh $(x-1)(x+1)$ adalah ....
   A. $-\frac{1}{2}F(-1)(1-x)$
   B. $-\frac{1}{2}F(1)(1+x)$
   C. $-\frac{1}{2}F(-1)(1+x)$
   D. $\frac{1}{2}F(-1)(1+x)$
   E. $\frac{1}{2}F(-1)(1-x)$
4. Jika $(x - y + 1)$ merupakan sebuah faktor dari bentuk $px^2 + qxy + ry^2 + 5x - 2y + 3$, maka ... .
   A. $p = 2, q = -1, r = 1$
   B. $p = -2, q = 1, r = 1$
   C. $p = 2, q = -1, r = -1$
   D. $p = 2, q = -1, r = -1$
   E. $p = 1, q = -1, r = 1$
5. Jika akar-akar dari $x^3 + 5x^2 - 2x - 24 = 0$ adalah p, q, dan r, maka nilai $p^2 + q^2 + r^2 = \ldots$.
   A. 35
   B. 29
   C. 24
   D. 5
   E. 1

6. Pecahan $\dfrac{3x^2 - px - 15}{x^2 - 5x + 6}$ dapat disederhanakan apabila $p = \ldots$.

A. 2
B. 1
C. 0
D. –1
E. –2

7. Jika sukubanyak $x^7 - 7x^4 + 3x$ dibagi oleh $x^3 - 4x$ mempunyai sisa $ax^2 + bx + c$,

maka ${}^{(a+30)}\log(b + c - 3) = \ldots$.

A. 6
B. 5
C. 4
D. –1
E. –2

8. Jika $f(x) = 4x + 2$ dan $g(x) = 3$, maka $(g \circ f)(0) = \ldots$.

A. 0
B. 3
C. 4
D. 6
E. 10

9. Jika $f(x) = \sqrt{x+1}$ dan $g(x) = x^2 - 1$, maka $(g \circ f)(x) = \ldots$.

A. x
B. $x - 1$
C. $x + 1$
D. $2x - 1$
E. $x^2 + 1$

10. Jika $(g \circ f)(x) = -\dfrac{x}{2} + 1$ dan $g(x) = 4x$, maka $f(x) = \ldots$

A. $\frac{1}{8}(-x + 2)$
B. $\frac{1}{8}(-x - 2)$
C. $\frac{1}{8}(x - 2)$
D. $\frac{1}{4}(x - 1)$
E. $\frac{1}{4}(-x + 2)$

11. Jika $(g \circ f)(x) = 2x^2 + 4x + 7$ dan $f(x) = x^2 + 2x - 1$, maka $g(x) = \ldots$

A. $2x - 1$
B. $2x - 3$
C. $2x + 3$
D. $2x + 9$
E. $2x - 9$

12. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dan $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{x-2}\sqrt{x^2 - 4x + 5}$, maka $g(x - 3) = \ldots$

A. $\dfrac{1}{(x-5)}$
B. $\dfrac{1}{(x-1)}$
C. $\dfrac{1}{(x+1)}$
D. $\dfrac{1}{(x-3)}$
E. $\dfrac{1}{(x+3)}$

13. Jika $f(x) = \dfrac{2x-5}{3x-2}$, maka $f^{-1}(1) = \ldots$.

A. 11
B. $\dfrac{2}{3}$
C. -3
D. -7
E. -11

14. Jika $(g \circ f)(2x+3) = 3x-6$ dan $g(x) = x+4$, maka $f^{-1}(8) = \ldots$.

A. 5
B. 10
C. 15
D. 20
E. 25

15. Jika $f^{-1}(x) = \frac{1}{5}(x-1)$ dan $g^{-1}(x) = \frac{1}{2}(3-x)$, maka $(f \circ g)^{-1}(6) = \ldots$.

A. 3
B. 2
C. 1
D. -1
E. -2

16. Jika $f(x) = 2x+3$ dan $g(x) = x^3+1$ dengan $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 2$ maka $a = \ldots$.

A. 21
B. 18
C. 15
D. 12
E. 9

17. Jika $f(x) = \dfrac{x+1}{x}, x \neq 0$, dan p adalah banyaknya faktor prima dari 210, maka $f^{-1}(p) = \ldots$.

A. 4
B. 3
C. $\dfrac{1}{3}$
D. $\dfrac{1}{4}$
E. $\dfrac{1}{5}$

18. $\lim\limits_{x \to 2} \left(\dfrac{2x^2-8}{x-2} - \dfrac{x^2-2x}{2x-4} \right) = \ldots$.

A. 5
B. 6
C. 8
D. 9
E. ∞

19. $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^2+(3-a)x-3a}{x-a} = \ldots$.

A. a
B. $a+1$
C. $a+2$
D. $a+3$
E. $a+4$

20. $\lim\limits_{x \to -1/2} \dfrac{2x+1}{2-\sqrt{4x+6}} = \ldots$.

A. 4
B. 2
C. 0
D. -1
E. -2

21. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-x-1}{1-x^2} = \ldots$.

A. $-\dfrac{1}{2}$
B. $-\dfrac{1}{4}$
C. 0
D. $\dfrac{1}{4}$
E. $\dfrac{1}{2}$

22. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x + \sin 3x}{x \cos x} = \ldots$.

A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x^2-1)\sin 6x}{x^3+3x^2+2x} = \dots$.

A. 5 B. 3 C. 2 D. . –2 E. – 3

24. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\tan(x-1)\sin(1-\sqrt{x})}{x^2-2x+1} = \dots$.

A. ∞ B. 8 C. 6 D. 1 E. 0

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(3x-2-\sqrt{9x^2-2x+5}\right) = \dots$.

A. $-\dfrac{5}{6}$ B. $-\dfrac{7}{3}$ C. $-\dfrac{5}{3}$ D. $\dfrac{7}{3}$ E.. $\dfrac{5}{6}$

26. Jika $f(x) = x^2$, maka $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \dots$.

A. $-\dfrac{4}{5}$ B. 0 C. $\dfrac{2}{5}$ D. $\dfrac{5}{2}$ E. ∞

27. Jika $f(x) = \sqrt{6x+7}$, maka nilai $f'(3) = \dots$.

A. $\dfrac{2}{3}$ B. $\dfrac{3}{5}$ C. $\dfrac{5}{7}$ D. $\dfrac{7}{9}$ E. $\dfrac{9}{11}$

28. Jika $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x}}$, maka $f'(x) = \dots$.

A. $3\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$

B. $5\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2x^2}$

C. $3\sqrt{x} + \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$

D. $5\sqrt{x} - \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$

E. $3\sqrt{x} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$

29. Turunan dari $y = 3x^4 \cos x$ adalah ... .

A. $-12x^3 \sin x$

B. $-12x^3 \cos x$

C. $3x^4 \cos x + 12x^3 \sin x$

D. $12x^3 \sin x - 3x^4 \cos x$

E. $12x^3 \cos x - 3x^4 \sin x$

30. Turunan dari $f(x) = 5(x^2 + 2x - 1)^3$ adalah ... .

A. $15(2x + 2)^2$

B. $15(x^2 + 2x - 1)^2$

C. $10(x + 1)(x^2 + 2x - 1)^2$

D. $30(x + 1)(x^2 + 2x - 1)^2$

E. $15(2x + 2)^2(x^2 + 2x - 1)^2$

31. Jika $f(x) = \dfrac{3\sin x + 1}{4\sin x + 6}$, maka $f'(x) = \ldots$.

A. $\dfrac{3\cos x + 1}{4\sin x + 6}$

B. $\dfrac{3\sin x + 1}{(4\sin x + 6)^2}$

C. $\dfrac{3\sin x - 1}{4\sin x - 6}$

D. $\dfrac{14\cos x}{(4\sin x + 6)^2}$

E. $\dfrac{-14}{(4\sin x + 6)^2}$

32. Turunan dari $f(x) = \sin^2(2x^3 - 1)$ adalah ... .

A. $6x^2 \sin 2(2x^3 - 1)$

B. $6x^2 \cos(2x^3 - 1)$

C. $12x^2 \cos(2x^3 - 1)$

D. $2\cos(2x^3 - 1)$

E. $2\cos 6x^2$

33. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$ di titik (1, –1) adalah ... .

A. $4x - y - 4 = 0$

B. $4x - y - 5 = 0$

C. $4x + y - 4 = 0$

D. $4x + y - 5 = 0$

E. $4x - y - 3 = 0$

34. Persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 + 4x - 5$ yang sejajar dengan garis $y = 2x + 3$ adalah ... .

A. $y - 2x - 10 = 0$

B. $y - 2x + 6 = 0$

C. $y - 2x + 2 = 0$

D. $y - 2x + 8 = 0$

E. $y - 2x + 12 = 0$

35. Pada interval $-1 \le x \le 2$, fungsi $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ mempunyai nilai maksimum ... .

A. – 6

B. –1

C. 3

D. 6

E. 8

36. Grafik fungsi $f(x)=\frac{1}{6}x^3-3x^2$ naik untuk x yang memenuhi ... .

A. $1<x<6$
B. $1<x<12$
C. $-6<x<6$
D. $x<0$ atau $x>12$
E. $x<1$ atau $x>6$

37. Jika kurva $y=2x^5-5x^4+20$ mencapai nilai minimum di titik (a, b), maka a = ...

A. – 1 B. 0 C. 1 D. 2 E. 3

38. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2+kx+k=0$, maka $x_1^2+x_2^2$ mencapai minimum untuk k = ...

A. – 1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1 E. 2

39. Titik belok dari grafik fungsi $y=x^3+6x^2+9x+7$ adalah ... .

A. (–2, 3)
B. (–2, 7)
C. (–2, 5)
D. (2, 10)
E. (2, 5)

40. Suatu karton berbentuk bujur sangkar dengan sisi a cm akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara menggunting keempat pojoknya sebesar h cm. Volume kotak maksimum untuk h = ...

A. $\frac{1}{2}a$ atau $\frac{1}{6}a$
B. $\frac{1}{3}a$
C. $\frac{1}{4}a$
D. $\frac{1}{8}a$
E. $\frac{1}{6}a$

B. *Untuk soal nomor 41 sampai dengan nomor 50, kerjakan dengan singkat dan jelas!*

41. Jika f mempunyai turunan di c, dengan $c>0$, hitunglah limit dalam bentuk $f'(c)$:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{\sqrt{x}-\sqrt{c}}$$

42. Tentukan nilai $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

43. Diketahui sukubanyak $f(x)=cx^4-2x^2+1$, dengan c nilai yang berubah-ubah.

a. Tentukan nilai c sehingga sisa pembagian sukubanyak oleh (x – 1) adalah 3.
b. Untuk nilai c yang diperoleh pada a, tunjukkan bahwa titik minimum sukubanyak terletak pada parabola $y=1-x^2$.

44. Tentukan titik pada kurva $y = x^3 - 3x + 4$ dan $y = 3(x^2 - x)$ mempunyai garis singgung bersama.

45. Tentukan nilai a dan b sehingga (1, 6) adalah titik belok dari grafik fungsi

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$$

46. Misalkan diketahui bahwa $f(2) = 3$, $f'(2) = 4$, $f''(2) = -1$, $g(2) = 2$, dan $g'(2) = 5$. Carilah tiap nilai berikut.

    a. $\frac{d}{dx}[f^2(x) + g^3(x)]$ di $x = 2$,

    b. $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)]$ di $x = 2$,

    c. $\frac{d}{dx}[f(g(x))]$ di $x = 2$.

47. Suatu proyek akan diselesaikan dalam x hari, dengan biaya proyek per hari $\left(2x + \frac{1500}{x} - 80\right)$ ribu rupiah. Berapakah biaya minimum dari proyek itu?

48. Misalkan $f(x) = \sqrt{x - 2}$ dengan $g = f^{-1}$.

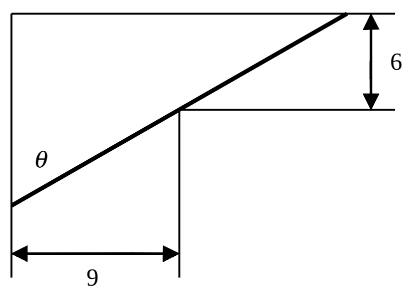
    a. Tentukan g dengan daerah asal dan daerah hasilnya.

    b. Hitung $g'(x)$.

    c. Nyatakan $g'(x)$ dalam $f'(x)$.

49. Carilah dua bilangan bulat positif sehingga jumlah bilangan pertama dengan empat kali bilangan kedua adalah 1000 dan hasilkali bilangan tersebut sebesar mungkin.

50. Pipa besi dibawa melewati gang yang memiliki lebar 9 meter. Pada ujung gang terdapat belokan menyiku ke arah gang yang lebih sempit dengan lebar 6 meter. Perhatikan gambar berikut. Berapa panjang pipa maksimum dapat dibawa secara mendatar melewati pojokan itu? Perhatikan kembali soal analisis nomor 4 bab 3.



Daftar Pustaka

Abdul Kodir, et al. 1979. *Matematika* Untuk SMA, Jilid 8^{s} dan 12. Depdikbud, Jakarta.

Alders, C.J. 1962. *Ilmu Ukur Segitiga*. Diterjemahkan oleh Bahar Azis. Noor Komala d/h Noordhoff-Kolff, N.V, Jakarta.

Alders, C.J. 1974. *Ilmu Aljabar*. Diterjemahkan oleh Bahar Azis. Pradnya Paramita, Jakarta.

Anto Dayan. 1991. *Pengantar Metode Statistik*. Jilid 1. LP3ES, Jakarta.

Ayres, F., Jr. 1957. *First Year College Mathematics*. Schaum's Outilne Series. McGraw-Hill Book Company, New York.

Ayres, F., Jr. 1964. *Calculus*. Schaum's Outilne Series. McGraw-Hill Book Company, New York.

Ayres, F., Jr. 1965. *Modern Algebra*. Schaum's Outilne Series. McGraw-Hill Book Company, New York.

Bob Foster. 2006. 1001 ^{Plus} *Soal dan Pembahasan Matematika untuk SPMB*. Erlangga , Jakarta..

Budi Nurochman. 2005. *Teori Ringkas dan Latihan Soal Pembahasan Matematika SMA*. Intersolusi Pressindo dan Pustaka Pelajar, Yogyakarta.

Coleman, A.J. dkk. 1979. *Algebra, Second Edition*. Toronto : Gage Publishing Limited.

Departemen Pendidikan Nasional. 2007*. Kurikulum Mata Pelajaran: Matematika*, untuk SMA.

Hogg Robert, V dan Craig Allen, T. 1978. *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing Co. Inc., New York

Leithold, L.1986. *The Calkulus with Analytic Geometry, 5^{th}*. Harper & Row, Publishers, Inc.

Lipschutz, S. 1974. *Theory and Problems of Probability, Schaum's Outline Series.* Singapura : McGraw-Hill Internasional Book Company.

Lipschutz, S. 1981. *Set Theory, Schaum's Outline Series.* McGraw-Hill Internasional Book Company, Singapura

Lipschutz, S. 1983. *Finite Mathematics, Schaum's Outline Series.* McGraw-Hill Internasional Book Company, Singapura.

Nasoetion, Andi Hakim. 1982. *Landasan Matematika*. Bharata karya Aksara, Jakarta.

Nasoetion, Andi Hakim. 1994. M*atematika 1*. Depdikbud, Balai Pustaka, Jakarta.

Negoro, ST. 1982. *Ensiklopedia Matematika*. Ghalia Indonesia, Jakarta.

Philip, H. (1991). *Maths Exercises for GCSE*. Thomas Nelson & Sosns Ltd, London.

Pinter, C.C,. 1970. *Set Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts.

Purcell, E, J, dkk. 2003. *Kalkulus*. Jilid 1. Alih Bahasa : I Nyoman Susila, Ph.D. Erlangga, Jakarta.

Spiegel, M.R. 1981. *Statistics, Schaum's Outline Series.* Singapura : McGraw-Hill Internasional Book Company, Singapura.

Spiegel, M.R. 1982. *Probability and Statistics, Schaum's Outline Series.* : McGraw-Hill Internasional Book Company, Singapura

Stewart, J, 1998. *Kalkulus, Edisi Keempat*. Alih Bahasa : Drs. I Nyoman Susila, M.Sc dan Hendra Gunawan, Ph.D. Erlangga, Jakarta.

Soerjadi PA. 1983. *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika..* ITB, Bandung.

Sudjana. 1984. *Metoda Statistika.* Tarsito, Bandung.

Tipler, P.A. 1998. *Fisika untuk Sains dan Teknik, Edisi Ketiga*. Alih Bahasa : Dra. Lea Prasetio, M.Sc., Erlangga, Jakarta.

Wijdeness, P. dkk. (tt). *Ilmu Aljabar Buat Sekolah Menengah, Jilid II.* Jakarta : Noordhoff-Koolff N.V.

Glosarium

absis	:	Titik-titik yang dikorespondensikan dengan bilangan-bilangan di sumbu x pada sistem koordinat Cartesius.
akar	:	Akar pangkat n dari suatu bilangan (n bilangan asli) adalah suatu bilangan yang bila dipangkatkan n menghasilkan bilangan yang ditarik akarnya tersebut. Secara matematika akar pangkat n dari bilangan a adalah bilangan x sedemikian hingga $x^n = a$.
asimtot	:	Asimtot suatu garis lengkung adalah garis yang tidak pernah dipotong oleh garis.
data	:	Sesuatu yang diketahui atau dianggap.
data kualitatif	:	Data yang tidak berbentuk angka.
data kuantitatif	:	Data dalam bentuk angka.
derajat	:	Satuan ukuran sudut, tekanan udara, dan suhu.
desil	:	Ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi 10 bagian yang sama.
diagram	:	Gambar yang menyajikan data tentang sesuatu masalah.
diagram lingkaran	:	Diagram yang menggunakan daerah lingkaran untuk menggambarkan suatu keadaan.
diameter	:	Garis tengah lingkaran atau ruas garis yang melalui titik pusat suatu lingkaran.
dispersi	:	Ukuran jauh dekatnya nilai pengamatan dari rata-rata hitungnya.
frekuensi	:	Banyaknya nilai muncul.
frekuensi nisbi atau relatif	:	Terkaan tentang seringnya suatu data muncul.
frekuensi kumulatif	:	Frekuensi yang dijumlahkan.
fungsi	:	Fungsi merupakan relasi khusus. Sering disebut juga "Relasi fungsional". Karena itu tidak semua relasi merupakan fungsi. Suatu relasi antara A dan B disebut fungsi apabila setiap unsur (anggota) himpunan A dipasangkan tepat satu unsur (anggota) himpunan B.
fungsi ganjil	:	Suatu fungsi $f(x)$ disebut ganjil apabila terdapat hubungan $f(-x) = -f(x), \forall\ x$ anggota domain.
fungsi genap	:	Suatu fungsi $f(x)$ disebut genap bila $f(-x) = f(x)$.
fungsi identitas	:	Suatu fungsi I yang dinyatakan dengan rumus $I(x) = x$.

fungsi invers : Bila f fungsi dari A ke B yang merupakan korespondensi satu-satu, maka ada fungsi f^{-1} dari B ke A sehingga $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$, I fungsi identitas. Fungsi f^{-1} ini disebut fungsi invers dari f.

fungsi konstan : Suatu fungsi f yang dinyatakan dengan rumus $f(x) = a$, dengan a suatu konstanta.

fungsi kuadrat : Fungsi f dalam R yang didefinisikan dengan $f(x) = ax^2 + bx + c$, dengan a, b, dan $c \in R$, $a \neq 0$.

fungsi kubik : Fungsi yang peubah bebasnya berpangkat tiga.

fungsi linear : Fungsi f yang dinyatakan dengan rumus $f(x) = ax + b$, a dan b konstanta, dan $a \neq 0$.

fungsi onto : Bila A dan B himpunan-himpunan, maka pemetaan A kepada B adalah fungsi onto, yaitu memasangkan setiap anggota A kepada anggota B, di mana setiap anggota B merupakan bayangan dari sedikitnya satu anggota A.

fungsi satu-satu : Fungsi $f : A \rightarrow B$ adalah satu-satu jika $a_1, a_2 \in A$ dengan $a_1 \neq a_2$ maka $f(a_1) f(a_2)$.

gradien : Koefisien arah suatu garis lurus.

grafik : Gambar-gambar yang menunjukkan secara visual data berupa angka yang biasanya juga berasal dari tabel-tabel yang telah dibuat.

histogram : Jenis grafik batangan yang khusus untuk penyajian data yang merupakan tabel distribusi frekuensi.

himpunan : Disebut juga "Kumpulan, kelompok, gugus, atau set".

invers fungsi : Invers fungsi f adalah relasi r sedemikian hingga , dengan I fungsi identitas.

jangkauan : Ukuran tertinggi dikurangi ukuran terendah.

jari-jari lingkaran : Semua ruas garis antara pusat dan sembarang titik pada lingkaran.

juring : Daerah yang dibatasi oleh 2 jari-jari dan satu busur pada suatu lingkaran.

kejadian : Kumpulan dari satu atau lebih hasil dari sebuah eksperimen.

kejadian saling bebas : Terjadinya dua kejadian yang tidak saling mempengaruhi.

kombinasi : Susunan dari beberapa elemen di mana urutan tidak diperhatikan.

koordinat : Koordinat Cartesius terdiri atas absis dan ordinat. Absis diwakili oleh titik-titik di sumbu x, dan ordinat diwakili oleh titik-titik di sumbu y.

kuartil : Ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi empat bagian yang sama.

lingkaran	:	Kurva tertutup sederhana yang khusus. Tiap titik pada lingkaran itu mempunyai jarak yang sama dari suatu titik yang disebut pusat lingkaran.
limit	:	Nilai pendekatan, $= L$ mempunyai arti nilai $f(n)$ mendekati L apabila n membesar tak terbatas.
mean	:	Jumlah semua ukuran yang diamati dibagi oleh banyaknya ukuran.
median	:	Nilai yang ada di tengah-tengah sekelompok data jika nilai-nilai tersebut diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar.
modus	:	Nilai dari sekelompok data yang mempunyai frekuensi tertinggi atau nilai yang paling banyak terjadi (muncul) dalam suatu kelompok nilai.
nilai ekstrim	:	Nilai maksimum atau nilai minimum. Nilai ekstrim ditemukan dalam fungsi non linear, misalnya dalam fungsi kuadrat dan fungsi trigonometri.
nilai maksimum	:	Nilai tertinggi.
nilai minimum	:	Nilai terendah.
ordinat	:	Titik-titik yang dikorespondensikan dengan bilangan-bilangan di sumbu y pada sistem koordinat Cartesius.
peubah	:	Disebut juga variabel.
pencerminan	:	Adalah pencerminan dalam arti geometri. Pencerminan disebut juga refleksi, menggambarkan bayangan cermin suatu bangun.
permutasi	:	Suatu pengaturan atau urutan beberapa elemen atau objek di mana urutan itu penting ()
persentil	:	Ukuran yang membagi sekelompok nilai menjadi 100 bagian yang sama.
poligon	:	Grafik garis yang diperoleh dengan menghubungkan titik tengah dari setiap batangan pada histogram.
populasi	:	Kumpulan seluruh elemen yang sejenis tetapi dapat dibedakan satu sama lain.
produk Cartesius	:	Hasil kali dari dua himpunan. Dinyatakan dengan "X".
range	:	Range dalam statistik disebut jangkauan ialah selisih antara data tertinggi dengan data terendah.
relasi	:	Hubungan. Dua himpunan yang berbeda mungkin mempunyai hubungan. Hubungan (relasi) itu diperlihatkan oleh masing-masing anggota kedua himpunan itu.
sampel	:	Bagian dari populasi.
simpangan baku	:	Akar kuadrat positif dari variansi.

Indeks

Kunci Matematika XI IPA SMA

BAB I
Statistika

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. A	11. C
3. B	13. B
5. B	15. A
7. C	
9. D	

B. Essay

17. 22 tahun
19. (57,886 – 58, 126) kg

BAB II
Peluang

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	11. A
3. D	13. B
5. E	15. A
7. B	
9. B	

B. Essay

17. 120
19. 1/10

BAB III
Rumus-rumus Trigonometri

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. D	11. E
3. D	13. C
5. C	15. A
7. C	
9. E	

B. Essay

17. $x = 60^o$ dan $y = 30^o$
19. a. maks = 1 dan min = – 1;
    b. maks = 0 dan min = – 10.

BAB IV
Lingkaran

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. D	11. B
3. A	13. A
5. D	15. D
7. B	
9. B	

B. Essay

17. $x^2 + y^2 - 14x - 26 = 0$;

    $y = ((-35 \pm 3\sqrt{65})/40)x + 5$
19. 8

Latihan Ulangan Umum Semester 1

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	21. E
3. B	23. A
5. E	25. D
7. D	27. E
9. D	29. A
11. C	31. D
13. C	33. C
15. E	35. E
17. D	37. C
19. B	39. E

B. Essay

41. a. $4:7$; b. 120 anak
43. a. $P(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = P(A)P(B)$;
    b. $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

45. 0,02

47. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$

49. $y=\frac{1}{2}x+1$

BAB V
Sukubanyak

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. C	11. B
3. B	13. B
5. E	15. D
7. D	
9. B	

B. Essay

17. 2/3 19. 2,5

BAB VI
Komposisi Fungsi dan Invers Fungsi

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. C	11. E
3. C	13. D
5. D	15. C
7. C	
9. B	

B. Essay

17. $-4 < x \le 1$ atau $x > 4$

19. a. $P(t)=\sqrt{t+\sqrt{t}+27}$;

b. $P(15)=\sqrt{42+\sqrt{15}}$

BAB VII
Limit Fungsi

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	11. D
3. C	13. A
5. C	15. D
7. A	
9. B	

B. Essay

17. 1/3 19. 3/4

BAB VIII
Turunan

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	11. E
3. B	13. C
5. D	15. A
7. D	
9. E	

B. Essay

17. $b=-1$

19. $-\frac{3}{2}\sin a$

BAB IX
Nilai Ekstrim Fungsi dan Teknik Membuat Grafik Fungsi

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. C	11. A
3. D	13. D
5. B	15. B
7. A	
9. C	

B. Essay

17. a. naik: $x < -4$ atau $x > 1$; turun: $-4 < x < 1$;

b. maks: 117, min: –8;

c. (-3/2, 38 $\frac{3}{4}$)

19. $d\theta/dt = 54-3t-t^2$; $\theta(t)=198$

Latihan Ulangan Umum Semester 2

Uji Kompetensi

A. Pilihan Ganda

1. B	11. D	21. D	31. D
3. E	13. C	23. E	33. B
5. B	15. C	25. C	35. C
7. A	17. C	27. B	37. D
9. A	19. D	29. E	39. C

B. Essay

41. $2\sqrt{c}\,f\,'(c)$

43. a. $c=4$

45. $a=-3$ dan $b=7$

47. 700 ribu rupiah

49. 400 dan 125

Wahana

MATEMATIKA 2

Program Ilmu Pengetahuan Alam

Matematika menurut sifatnya merupakan ratu dan sekaligus sebagai pelayan ilmu, maka sebagai ratu matematika mempunyai struktur yang sistematis dan logis tidak dapat dipengaruhi oleh ilmu yang lain, sedangkan sebagai pelayan matematika menyediakan alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persoalan-persoalan pada ilmu-ilmu yang lain. Buku ini ditekankan pada cara berpikir sistematis dan logis, di samping menyajikan aplikasinya pada kehidupan sehari-hari. Dengan karakteristik ini diharapkan setelah mempelajari buku ini siswa dapat berpikir secara sistematis dan logis untuk mengambil kesimpulan.

Buku ini disusun sesuai dengan kurikulum yang berlaku dan dengan harapan dapat mengembangkan keragaman potensi, minat, kecerdasan intelektual, emosional, spritual, dan kinestetik siswa secara optimal sesuai dengan tingkat perkembangan siswa tersebut. Beberapa keunggulan buku matematika ini adalah sebagai berikut.

1. Materi disajikan secara sederhana, sistematis, inspiratif, dan realistis. Siswa diajak berpikir logis dan melihat aplikasi matematika dalam kehidupan sehari-hari.
2. Untuk mempermudah pemahaman konsep materi, buku ini dilengkapi dengan contoh soal dan penyelesaian. Selain itu, soal-soal pelatihan disajikan dalam berbagai bentuk untuk meningkatkan kemampuan daya pikir, analisis, komunikasi, dan kreativitas.
3. Buku ini dilengkapi dengan math info dan teka-teki matematika.Dengan demikian diharapkan dapat membangkitkan rasa ingin tahu, perhatian, dan minat dalam mempelajari matematika.
4. Buku ini disusun dengan memenuhi kaidah-kaidah tipografi, tata letak, dan pewarnaan yang memenuhi standar “Human Computer Interactive”. Hal ini dimaksudkan untuk merangsang minat dalam membaca dan mempelajari materi.

Buku matematika ini peduli dengan proses pendidikan yang dapat diterima dengan baik oleh semua kelompok siswa; kelompok normal (novice), kelompok sedang (intermediate), dan kelompok tinggi (advance). Buku ini berusaha menjadi sarana penunjang yang baik demi kemajuan pendidikan Indonesia.

ISBN 978-979-068-854-4 (No. Jld lengkap)
ISBN 978-979-068-856-8

Buku ini telah dinilai oleh Badan Standar Nasional Pendidikan (BSNP) dan telah dinyatakan layak sebagai buku teks pelajaran berdasarkan Peraturan Menteri Pendidikan Nasional Republik Indonesia Nomor: 9 Tahun 2009 Tanggal 12 Februari 2009 tentang Penetapan Buku Teks Pelajaran yang Memenuhi Syarat Kelayakan untuk Digunakan dalam Proses Pembelajaran.

Harga Eceran Tertinggi (HET) Rp.18.194,-